ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ – ΑΠΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ Α ΛΥΚΕΙΟΥ

Δ.1

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με τα σύμβολα ∈ και ∉, αν κάθε αριθμός ανήκει ή δεν ανήκει στο αντίστοιχο σύνολο.

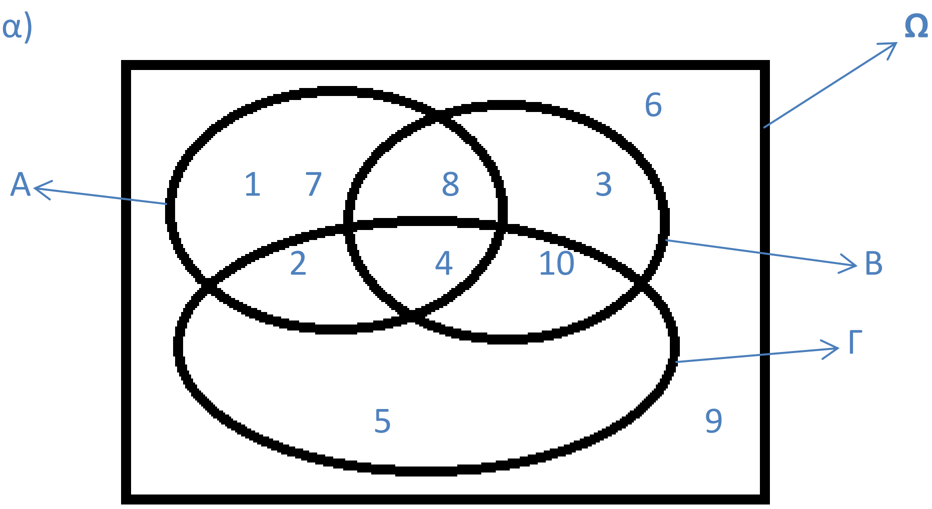
	N	**Z**	**Q**	**R**
-5,5	∉	∉	∈	∈
π	∉	∉	∉	∈
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	∉	∉	∉	∈
$\sqrt{144}$	∈	∈	∈	∈
$-\frac{13}{3}$	∉	∉	∈	∈
$\frac{40}{5}$	∈	∈	∈	∈
$\sqrt{2}$	∉	∉	∉	∈
$0,\overline{3}$	∉	∉	∈	∈
-4	∉	∈	∈	∈

Δ.2

Έστω Ω = {1,2,3,….,10} ένα βασικό σύνολο και τρία υποσύνολα αυτού
Α = {1,2,4,7,8}, Β = {3,4,8,10} και Γ= {2,4,5,10}.
α) Να παραστήσετε τα σύνολα Ω, Α, Β, Γ με διάγραμμα Venn.
β) Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων τους καθώς και με διαγράμματα Venn τα σύνολα:
i) Α∪Β ii) Β∩Γ iii) Α∪(Β∩Γ) iv) (Α∩Β)∪Γ v) Α∩Β∩Γ

Απάντηση:

α)



β)

i) A∪B = {1, 2, 3, 4, 7, 8, 10} ii) B∩Γ = {4, 10}

iii) A∪(B∩Γ) = {1,2,4,7,8}∪{ 4, 10} = {1, 2, 4, 7, 8, 10}

iv) (A∩B)∪Γ = {4, 8}∪{2, 4, 5, 10} = {2, 4, 5, 8, 10} v) A∩B∩Γ = {4}

Δ.3

Στο παρακάτω σχήμα παριστάνονται με διάγραμμα Venn ένα βασικό σύνολο Ω και τρία υποσύνολα του A, B και Γ.

α) Ποιο είναι το πλήθος των στοιχείων των συνόλων A, B, και Γ;

β) Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων τα σύνολα

i) A∪B ii) B∩Γ iii) A∪(B∩Γ) iv) A∩B∩Γ v) A΄

Απάντηση:

α) Πλήθος στοιχείων του συνόλου A = 5 (N(A)=5)

Πλήθος στοιχείων του συνόλου B = 5 (N(B)=5)

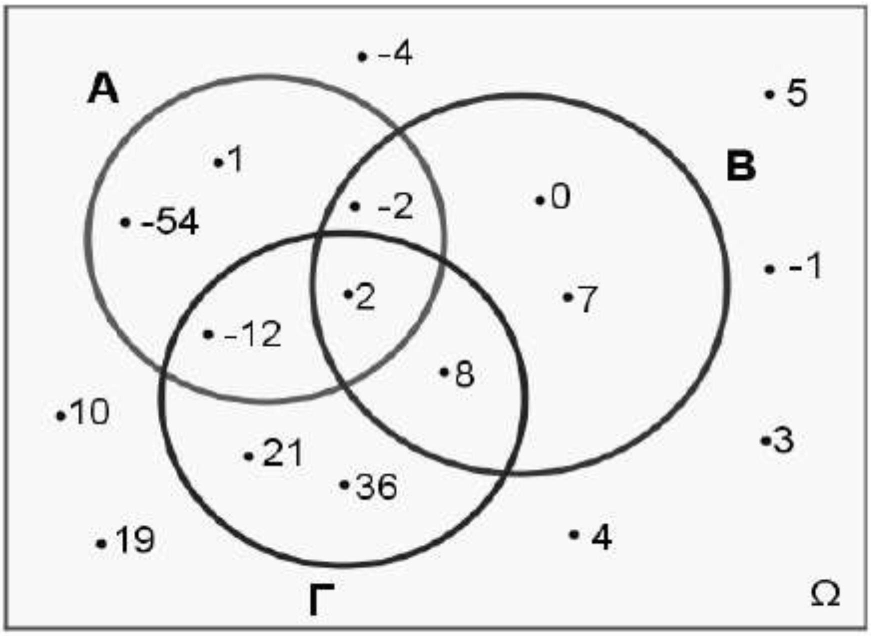
Πλήθος στοιχείων του συνόλου Γ = 5 (N(Γ)=5)

β) i) A∪B = {1, -2, 2, -12, -54}∪{-2, 2, 0, 7, 8} = {1, -2, 2, -12, -54, 0, 7, 8}

ii) B∩Γ = {-2, 2, 0, 7, 8}∩{-12, 2, 8, 21, 36} = {2, 8}

iii) A∪(B∩Γ) = {1, -2, 2, -12, -54}∪{2, 8} = {1, -2, 2, -12, -54, 8}

iv) A∩B∩Γ = {2} v) A΄= Ω – A = {-4, 5, -1, 3, 4, 19, 10, 21, 36, 8, 7, 0}



Δ.4

Ποια από τα παρακάτω πειράματα είναι πειράματα τύχης;

α) Ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών εκλείψεων του ηλίου.

β) Το πλήθος των παιδιών που έχει μια οικογένεια.

γ) Το πλήθος των πελατών ενός εμπορικού καταστήματος μια συγκεκριμένη ημέρα.

δ) Ο αριθμός των αεροπλάνων που φθάνουν σε ένα αεροδρόμιο εντός καθορισμένου χρονικού διαστήματος.

ε) Ο χρόνος που απαιτείται για να διανύσει ένα κινητό γνωστή απόσταση s με σταθερή ταχύτητα v.

ζ) Ο τόκος που λαμβάνουμε για καταθέσεις ύψους α με προκαθορισμένο επιτόκιο.

Απάντηση:

α) με ορισμένες προϋποθέσεις αιτιοκρατικό

β) Πείραμα τύχης (αν πρόκειται για συγκεκριμένη οικογένεια το πείραμα είναι αιτιοκρατικό)

γ) Πείραμα τύχης

δ) Πείραμα τύχης

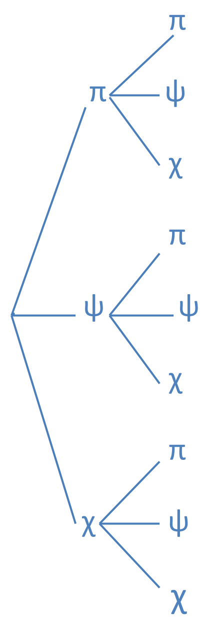
ε) Αιτιοκρατικό

ζ) Αιτιοκρατικό

Δ.5

Δύο φίλοι παίζουν το γνωστό παιχνίδι «πέτρα, ψαλίδι, χαρτί». Με χρήση δενδροδιαγράμματος ή πίνακα διπλής εισόδου να προσδιορίσετε όλα τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος και να δημιουργήσετε έτσι τον δειγματικό χώρο του πειράματος αυτού. Να προσδιορίσετε το ενδεχόμενο «ισοπαλίας».

Δενδροδιάγραμμα



Πίνακας διπλής εισόδου

1 \ 2	Π	Ψ	Χ
Π	(Π,Π)	(Π,Ψ)	(Π,Χ)
Ψ	(Ψ,Π)	(Ψ,Ψ)	(Ψ,Χ)
Χ	(Χ,Π)	(Χ,Ψ)	(Χ,Χ)

Δειγματικός χώρος:

Ω = {(Π,Π),(Π,Ψ), (Π,Χ), (Ψ,Π), (Ψ,Ψ), (Ψ,Χ), (Χ,Π), (Χ,Ψ), (Χ,Χ)}

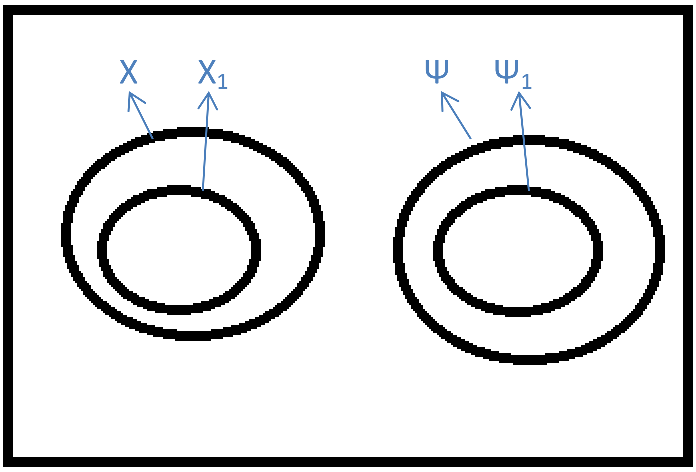
Το ενδεχόμενο ισοπαλίας είναι: Α = {(Π,Π), (Ψ,Ψ), (Χ,Χ)}

Δ.6

Σε μία ομάδα 20 ατόμων, 4 από τις 7 γυναίκες και 2 από τους 13 άνδρες φορούν γυαλιά. Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα άτομα αυτά. Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn και με χρήση της γλώσσας των συνόλων το ενδεχόμενο το άτομο που επιλέχθηκε:
Α. να είναι γυναίκα ή να φοράει γυαλιά
Β. να μην γυναίκα και να φοράει γυαλιά

Απάντηση:

Χ: άνδρας , Ψ: γυναίκα , $Χ_1$: άνδρας με γυαλιά , $Ψ_1$: γυναίκα με γυαλιά



Α. να είναι γυναίκα ή να φοράει γυαλιά
$Α = Ψ \cup (Χ_1 \cup Ψ_1) = Ψ \cup Χ_1$ $\quad Ψ_1 \subseteq Ψ$

Β. Να μην είναι γυναίκα και να φοράει γυαλιά
$Β = Ψ' \cap (Χ_1 \cup Ψ_1) = Χ_1$

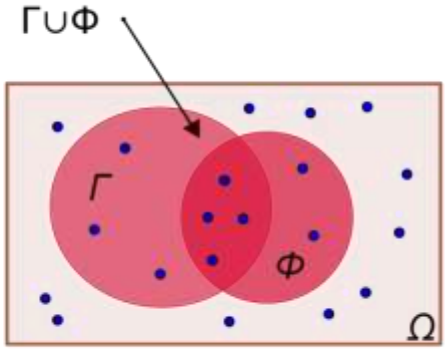
Μία πρόταση της κ. Χατζησάββα (ΓΕΛ Ν. Κυδωνίας)

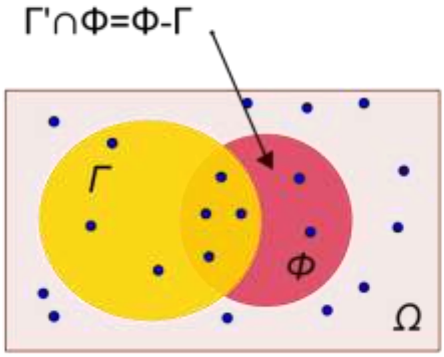
Α. να είναι γυναίκα ή να φοράει γυαλιά.
Β. να μην είναι γυναίκα και να φοράει γυαλιά.

Απάντηση: Αν Γ = {το άτομο που επιλέγεται είναι γυναίκα}

και Φ = {το άτομο που επιλέγεται φοράει γυαλιά}

τότε $Α = Γ \cup Φ$ και $Β = Γ' \cap Φ = Φ - Γ$





Δ.7

Από τους μαθητές ενός λυκείου κάποιοι μιλούν πολύ καλά την γαλλική γλώσσα. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή για να εκπροσωπήσει το σχολείο σε μια εκδήλωση του τμήματος Γαλλικής φιλολογίας. Αν ονομάσουμε τα ενδεχόμενα, Α: «ο μαθητής να είναι κορίτσι» και Β: «ο μαθητής μιλά πολύ καλά τη γαλλική γλώσσα», να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα : i) $A\cup B$, ii) $A\cap B$, iii) $B-A$, iv) $A-B$, v) A', vi) $A'\cup B$

Απάντηση:

i) $A\cup B$: «ο μαθητής είναι κορίτσι **ή** μιλά πολύ καλά τη γαλλική γλώσσα»
ii) $A\cap B$: «ο μαθητής είναι κορίτσι **και** μιλά πολύ καλά τη γαλλική γλώσσα»
iii) $B-A$: «ο μαθητής μιλά πολύ καλά τη γαλλική γλώσσα **αλλά δεν** είναι κορίτσι»
iv) $A-B$: «ο μαθητής είναι κορίτσι **αλλά δεν** μιλά πολύ καλά τη γαλλική γλώσσα»
v) A': «ο μαθητής **δεν** είναι κορίτσι»
vi) $A'\cup B$: «ο μαθητής δεν είναι κορίτσι **ή** ο μαθητής μιλά πολύ καλά τη γαλλική γλώσσα»

Δ.8

Από 120 μαθητές ενός Λυκείου, 32 μαθητές συμμετέχουν σε μια θεατρική ομάδα, 28 μαθητές συμμετέχουν στην ομάδα στίβου και 16 μαθητές συμμετέχουν και στις δύο ομάδες. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Ποια η πιθανότητα ο μαθητής:

α) να συμμετέχει σε μια τουλάχιστον από τις δύο ομάδες;

β) να συμμετέχει μόνο σε μία από τις δύο ομάδες;

γ) να μη συμμετέχει σε καμία από τις δύο ομάδες;

Απάντηση:

Α: θεατρική ομάδα , Β: ομάδα στίβου

α) $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Rightarrow P(A\cup B) = \frac{32}{120}+\frac{28}{120}-\frac{16}{120}=\frac{44}{120}$

β) $P[(A-B)\cup(B-A)] = P(A)+P(B)-2P(A\cap B) \Rightarrow$

$P[(A-B)\cup(B-A)] = \frac{32}{120}+\frac{28}{120}-2\cdot\frac{16}{120}=\frac{28}{120}$

γ) $P[(A\cup B)'] = 1 - P(A\cup B) \Rightarrow P[(A\cup B)'] = 1-\frac{44}{120}=\frac{76}{120}$

Δ.9

Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις, αιτιολογώντας το ισχυρισμό σας.

α) Πόσοι αριθμοί υπάρχουν ανάμεσα στο $\frac{3}{8}$ και το $\frac{5}{8}$;

Απάντηση: Άπειροι το πλήθος (μεταξύ $\frac{3}{8}$ =0,375 και $\frac{5}{8}$ = 0,625 υπάρχουν άπειροι δεκαδικοί αριθμοί κατά συνέπεια κλάσματα)

β) Υπάρχει αριθμός ανάμεσα στον 1,2 και στον 1,3; Αν ναι, γράψτε έναν.

Απάντηση: Ναι (άπειροι), 1,21

γ) Υπάρχει πραγματικός αριθμός α μεγαλύτερος του $\frac{5}{8}$ με την ιδιότητα: « ανάμεσα στον $\frac{5}{8}$ και τον α να μην υπάρχει άλλος αριθμός»;

Απάντηση: Όχι, αν α = $\frac{6}{8}$, μεταξύ $\frac{5}{8}$ και $\frac{6}{8}$ υπάρχουν άπειροι αριθμοί

δ) Υπάρχει ο μικρότερος θετικός πραγματικός αριθμός;
Αν ναι, ποιος είναι αυτός;
Απάντηση: Όχι, γιατί για κάθε πραγματικό αριθμό υπάρχουν άπειροι μικρότεροι και άπειροι μεγαλύτεροι το πλήθος.
ε) Υπάρχει επόμενος πραγματικός αριθμός του 24,1;
Αν ναι, ποιος είναι αυτός;
Απάντηση: Υπάρχουν άπειροι πραγματικοί αριθμοί μεγαλύτεροι από το 24,1 κανένας όμως δεν μπορεί να χαρακτηριστεί ως επόμενος
στ) Μπορείτε να βρείτε έναν αριθμό ανάμεσα στον 0,99…. και στον 1; Ανάμεσα στον 0,899… και στον 0,9; Τι παρατηρείτε;
Απάντηση:

Δ.10

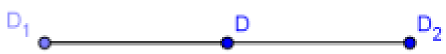
Η διάμετρος ενός δίσκου μετρήθηκε και βρέθηκε 2,37dm. Το σφάλμα της μέτρησης είναι το πολύ 0,005 dm.
Αν D η πραγματική διάμετρος του δίσκου τότε:
α) Να παραστήσετε την παραπάνω παραδοχή στην αριθμογραμμή.
β) Να εκφράσετε την παραπάνω παραδοχή με τη βοήθεια της έννοιας της απόλυτης τιμής.
γ) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της D.

Απάντηση:

α)

$D_1 = D - 0{,}005$

$D_2 = D + 0{,}005$



β) $d(2{,}37\ ,\ D) \leq 0{,}005$ ή $|D - 2{,}37| = |2{,}37 - D| \leq 0{,}005$

γ) $|D - 2{,}37| \leq 0{,}005 \Leftrightarrow -0{,}005 \leq D - 2{,}37 \leq 0{,}005 \Leftrightarrow 2{,}365 \leq D \leq 2{,}375$

Δ.11

Δίνεται η παράσταση: $(\sqrt[6]{2^3}+4)\cdot(\sqrt[6]{2^3}-4)$

α) Να υπολογίσετε την παράσταση με χρήση υπολογιστή τσέπης

β) Να υπολογίσετε την παράσταση χρησιμοποιώντας αλγεβρικές ιδιότητες

γ) Να συγκρίνετε τις δύο μεθόδους ως προς την ακρίβεια του αποτελέσματος

Απάντηση:

α) (1,251+ 4)·(1,251 – 4) = 5,251·(- 2,749) ≅ -14,435

β) $(\sqrt[6]{2^3}+4)\cdot(\sqrt[3]{2^3}-4) = (\sqrt{2}+4)\cdot(\sqrt{2}-4) = (\sqrt{2})^2-4^2 = 2-16=-14$ **ή**

$(\sqrt[6]{2^3}+4)\cdot(\sqrt[3]{2^3}-4) = (\sqrt[6]{2^3})^2-4^2 = \sqrt[6]{2^6}-16 = 2-16=-14$

γ) Χρησιμοποιώντας αλγεβρικές ιδιότητες παίρνω το ακριβές αποτέλεσμα

Δ.12

Ο τιμοκατάλογος των TAXI στην Αθήνα περιλαμβάνει 1,19€ για την εκκίνηση και 0,68€ για κάθε χιλιόμετρο διαδρομής, ενώ στα νησιά του Αιγαίου περιλαμβάνει 1,14€ για την εκκίνηση και 0,65€ για κάθε χιλιόμετρο διαδρομής.

α) Να βρείτε την απόσταση που μπορεί να διανύσει με TAXI ένας επιβάτης στην Αθήνα, αν διαθέτει 10€.

β) Να βρείτε την απόσταση που μπορεί να διανύσει με TAXI ένας επιβάτης σε νησί του Αιγαίου, αν διαθέτει 10€.

γ) Αν στους νομούς της Θεσσαλίας η χρέωση για το TAXI περιλαμβάνει 2λ€ για την εκκίνηση και λ€ για κάθε χιλιόμετρο διαδρομής, να βρείτε σε σχέση με το λ την απόσταση που μπορεί να διανύσει ένας επιβάτης αν διαθέτει 10€.

Αν στο νομό Λαρίσης η χρέωση ανά χιλιόμετρο διαδρομής είναι 0,60€ και στο νομό Μαγνησίας 0,62€, να υπολογίσετε την απόσταση που μπορεί να διανύσει με TAXI ένας επιβάτης που διαθέτει 10€.

Απάντηση:

α) $1{,}19 + 0{,}68x = 10$ β) $1{,}14 + 0{,}65x = 10$

γ) $2λ + λx = 10 \Leftrightarrow x = \dfrac{10-2λ}{λ}$, $λ \neq 0$ (1)

Νομός Λαρίσης: $2λ + 0{,}60x = 10$ (2). Από (1),(2) $\Rightarrow 2λ + 0{,}60\cdot \dfrac{10-2λ}{λ} = 10$

Νομός Μαγνησίας: $2λ + 0{,}62x = 10$ (3). Από (1),(3) $\Rightarrow 2λ+0{,}62\cdot \dfrac{10-2λ}{λ} = 10$

Δ.13

Στο πρωτάθλημα ποδοσφαίρου μιας χώρας κάθε ομάδα έδωσε με όλες τις υπόλοιπες ομάδες δύο αγώνες (εντός και εκτός έδρας). Αν έγιναν συνολικά 240 αγώνες, πόσες ήταν οι ομάδες που συμμετείχαν στο πρωτάθλημα;

Απάντηση: Έστω x οι ομάδες. Κάθε ομάδα παίζει με τις υπόλοιπες x-1 ομάδες. Σύνολο αγώνων του πρωταθλήματος: $x\cdot(x-1)$, άρα $x\cdot(x-1)=240 \Leftrightarrow x^2 - x - 240 = 0 \Rightarrow x = 16$

Δ.14

Ένας μαραθωνοδρόμος διάνυσε απόσταση 42Km και δεν μπόρεσε να κερδίσει κάποιο μετάλλιο. Όταν με τον προπονητή του ανέλυσαν την προσπάθεια του διαπίστωσαν ότι, αν η μέση ταχύτητα του ήταν 1Km/h μεγαλύτερη, θα τερμάτιζε σε 1/10 της ώρας νωρίτερα και θα έπαιρνε το χρυσό μετάλλιο. Ποια ήταν η μέση ταχύτητα με την οποία έτρεξε;

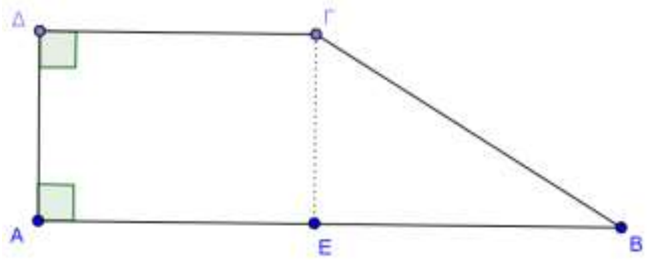
Απάντηση:

Έστω v η μέση ταχύτητα του δρομέα και t ο χρόνος στον οποίο διάνυσε την απόσταση των 42Km, άρα $t = \dfrac{42}{v}$ (1). Αν η ταχύτητα του ήταν v+1 ο χρόνος του θα ήταν $t - 0{,}1$, άρα $v+1 = \dfrac{42}{t-0{,}1}$ (2). Από (1), (2) $\Rightarrow$

$v+1 = \dfrac{42}{\frac{42}{v} - \frac{1}{10}} \Rightarrow v^2+v-420 = 0 \Rightarrow v = 20$ Km/h

Δ.15

Στο παρακάτω τραπέζιο (οι πλευρές του είναι σε m):
ΑΒ = 2+5x , ΓΔ = 2+x , ΑΔ = 3x



α) Να εκφράσετε την περίμετρο του Π ως συνάρτηση του x. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης Π(x);
β) Να εκφράσετε το εμβαδόν του Ε ως συνάρτηση του x. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης Ε(x);
γ) Να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές του x, αν η περίμετρος του τραπεζίου είναι τουλάχιστον 39m και το εμβαδόν του το πολύ $99m^2$

Απάντηση:
α) Τρίγωνο ΒΕΓ είναι ορθογώνιο με ΕΓ = 3x , ΕΒ = 2+5x – (2+x) = 4x
$B\Gamma^2 = EB^2 + E\Gamma^2 \Rightarrow B\Gamma^2 = (4x)^2 + (3x)^2 \Rightarrow B\Gamma = 5x$
$\Pi(x) = 2+5x+5x+2+x+3x \Rightarrow \Pi(x) = 14x + 4$. Πεδίο ορισμού Π(x) : R
β) $E(x) = \dfrac{2+x+2+5x}{2} \cdot 3x = 9x^2 + 6x$. Πεδίο ορισμού Ε(x) : R
γ) $\Pi(x) \geq 39 \Rightarrow 14x+4 \geq 39 \Leftrightarrow x \geq 2{,}5m$
$E(x) \leq 99 \Rightarrow 9x^2 + 6x \leq 99 \Leftrightarrow 9x^2 + 6x - 99 \leq 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 33 \leq 0$
$\Rightarrow 0 < x \leq 3$

Δ.16

Η ακολουθία 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …..ονομάζεται ακολουθία Fibonacci (Leonardo di Pisa (Fibonacci), 1175 – 1250).
α) Ας αντιστοιχίσουμε, λοιπόν, τους φυσικούς αριθμούς ν με τους όρους της παραπάνω ακολουθίας x_ν , συμπληρώνοντας τον παρακάτω πίνακα.

ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_ν	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

β) Παρατηρήστε πως προκύπτουν οι όροι της ακολουθίας από τον x_3 και μετά.
Μπορείτε να υπολογίσετε τον $12^{ο}$ όρο της ακολουθίας;
Ποιες πληροφορίες χρειάζονται για τον υπολογισμό του $12^{ου}$ όρου;
γ) Ας προσπαθήσουμε να σκεφτούμε έναν κανόνα που θα μας βοηθά να βρίσκουμε οποιονδήποτε όρο της παραπάνω ακολουθίας.

Απάντηση:

α)

ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	**12**
$x_ν$	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	**89**

β) Οι όροι της ακολουθίας από τον x_3 και μετά προκύπτουν ως έξης:

$x_4 = x_2+x_3$, $x_5 = x_3+x_4$, …., $x_{ν+2} = x_ν+x_{ν+1}$ $ν \in N$.

$x_{12} = x_{10}+x_{11} \Rightarrow x_{12}=34+55=89$

γ) Κάθε όρος της ακολουθίας προκύπτει από το άθροισμα των δύο προηγουμένων της.

Δ.17

Δέκα αδέλφια μοιράζονται 100 ευρώ. Κάθε αδελφός παίρνει α ευρώ περισσότερα από τον αμέσως μικρότερό του. Ο $7^{ος}$ στη σειρά αδελφός παίρνει 7 ευρώ.
α) Αποτελούν τα χρήματα που θα πάρουν τα αδέλφια όρους αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.
β) Πόσα χρήματα παίρνει ο κάθε αδελφός;

Απάντηση:

α) Αποτελούν όρους αριθμητικής προόδου. Έστω $α_1$, $α_2$, $α_3$, $α_4$, $α_5$, $α_6$, $α_7$ τα αδέλφια με $α_1$ τον πρώτο και $α_7$ τον $7^{ο}$ αδελφό.
$α_1=6α+7$, $α_2=5α+7$, $α_3= 4α+7$, $α_4=3α+7$, $α_5=2α+7$, $α_6=α+7$, $α_7=7$ (1)
Η διαφορά δύο οποιωνδήποτε διαδοχικών όρων είναι –α.
$α_7=α_1+(7-1)ω \Rightarrow 7 = α_1+6(-α) \Leftrightarrow α_1= 7+6α$ (2) , $S_7 = \dfrac{α_1+α_7}{2}\cdot 7 \Rightarrow$
$100 = \dfrac{α_1+7}{2}\cdot 7$ (3) , από (2), (3) $\Rightarrow 100 = \dfrac{7+6α+7}{2}\cdot 7 \Rightarrow α = \dfrac{17}{7}$
β) Αντικαθιστώ την τιμή του α στις σχέσεις (1) και βρίσκω τα χρήματα που θα πάρει κάθε αδελφός.

$\alpha_1 = 6 \cdot \frac{17}{7} + 7$, $\alpha_2 = 5 \cdot \frac{17}{7} + 7$, $\alpha_3 = 4 \cdot \frac{17}{7} + 7$, $\alpha_4 = 3 \cdot \frac{17}{7} + 7$, $\alpha_5 = 2 \cdot \frac{17}{7} + 7$, $\alpha_6 = 1 \cdot \frac{17}{7} + 7$, $\alpha_7 = 7$

Δ.18

Ένα έλκηθρο αφήνεται ελεύθερο να κυλίσει σε μια χιονισμένη πλαγιά. Το πρώτο δευτερόλεπτο της κίνησής του διανύει απόσταση 3cm, το δεύτερο δευτερόλεπτο διανύει απόσταση 5cm, το τρίτο δευτερόλεπτο 7cm, το τέταρτο δευτερόλεπτο 9cm κ.ο.κ. Η κίνηση θα διαρκέσει 60 δευτερόλεπτα.

α) Πόσο διάστημα θα διανύσει στο 20-στο δευτερόλεπτο της κίνησής του;

β) Αν τοποθετήσουμε τα διαστήματα που έχει διανύσει το έλκηθρο στα πρώτα 20 δευτερόλεπτα της κίνησής του με το παρακάτω τρόπο:

3 5 7 9 11 13 ……31 33 35 37 39 41

41 39 37 35 33 31 …. 13 11 9 7 5 3

Ποιο είναι το άθροισμα της κάθε στήλης; Μπορείτε να υπολογίσετε την συνολική απόσταση που θα έχει διανύσει το έλκηθρο στο διάστημα των πρώτων 20 δευτερολέπτων με ένα γρήγορο τρόπο;

γ) Ποιο είναι το διάστημα που θα διανύσει στο ν-στο δευτερόλεπτο της κίνησής του , με ν ≤ 60;

δ) Να αποδείξετε ότι η συνολική απόσταση που θα διανύσει το έλκηθρο στο διάστημα των ν πρώτων δευτερολέπτων , με ν ≤ 60, είναι: ν(ν+2)cm.

Απάντηση:

α) Πρόκειται για αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = 3$ και $\omega = 2$,

$\alpha_{20} = 3+(20-1)\cdot 2 \Leftrightarrow \alpha_{20} = 41$

β) 3 5 7 9 11 13 ……31 33 35 37 39 41

41 39 37 35 33 31 …. 13 11 9 7 5 3

44 44 44 44 44 44 44 44 44 44 44 44 Το άθροισμα κάθε στήλης είναι 44. Διάστημα = 44·10 = 440 cm

γ) $\alpha_\nu = 3+(\nu-1)\cdot 2$

δ) $S_\nu = \frac{2\cdot 3+(\nu-1)\cdot 2}{2}\cdot \nu = \nu(\nu+2)$ cm.

Δ.19

Ένας θρύλος αναφέρει ότι ζητήθηκε από τον εφευρέτη του παιχνιδιού που λέγεται σκάκι, να ορίσει ο ίδιος την ανταμοιβή του για την εφεύρεση αυτή. Λέγεται, λοιπόν, ότι η απαίτηση του βρίσκεται στο παρακάτω κείμενο: « φανταστείτε μια σκακιέρα. Αυτή έχει 64 τετράγωνα. Στο πρώτο τετράγωνο τοποθετούμε 1 κόκκο σιτάρι, στο δεύτερο τετράγωνο 2 κόκκους σιτάρι, στο τρίτο τετράγωνο 4 κόκκους σιτάρι, στο τέταρτο τετράγωνο 8 κόκκους σιτάρι, κ.ο.κ. μέχρι να τοποθετήσουμε και στα 64 τετράγωνα κόκκους σιταριού. Θα ήθελα τόσους κόκκους σιταριού, όσους έχει επάνω η σκακιέρα».

α) Πόσοι κόκκοι σιταριού έχουν τοποθετηθεί στο $64^{ο}$ τετράγωνο;

β) Αν η σκακιέρα είχε ν τετράγωνα, πόσοι κόκκοι σιταριού θα είχαν τοποθετηθεί στο ν-στο τετράγωνο;

γ) Αποτελεί το πλήθος των κόκκων σε κάθε τετράγωνο διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

δ) Να υπολογίσετε τους 10 πρώτους όρους της ακολουθίας:
2^0 , 2^0+2^1 , $2^0+2^1+2^2$, $2^0+2^1+2^2+2^3$, $2^0+2^1+2^2+2^3+2^4$ κ.ο.κ.
Πόσοι συνολικά κόκκοι σιταριού βρίσκονται στα 64 τετράγωνα της σκακιέρας;

ε) Αν η σκακιέρα είχε ν τετράγωνα, προσπαθήστε να εικάσετε πόσοι θα ήταν στη περίπτωση αυτή συνολικά οι κόκκοι πάνω στη σκακιέρα;

<u>Απάντηση</u>:

α) Οι αριθμοί 1, 2, 4, 8,…….αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου με $α_1 = 1$ και $λ = 2$ οπότε $α_{64} = 1\cdot 2^{63} = 2^{63}$

β) $α_ν = 1\cdot 2^{ν-1} = 2^{ν-1}$

γ) Στο ν-στο τετράγωνο $α_ν = 2^{ν-1}$ (1), στο ν+1 τετράγωνο $α_{ν+1} = 2^ν$ (2)

(2):(1) $\Rightarrow \dfrac{α_{ν+1}}{α_ν} = \dfrac{2^ν}{2^{ν-1}} = \mathbf{2}$ **σταθερός**

δ) $2^0 = 1$, $2^0+2^1 = 3$, $2^0+2^1+2^2 = 7$, $2^0+2^1+2^2+2^3 = 15$, $2^0+2^1+2^2+2^3+2^4 = 31$, $2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5 = 63$, $2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6 = 127$, $2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7 = 255$, $2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7+2^8 = 511$
$2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7+2^8+2^9 = 1023$

Συνολικά στα 64 τετράγωνα βρίσκονται:
$2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7+2^8+2^9+\ldots\ldots+2^{62}+2^{63}$ κόκκοι σιταριού

$2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7+2^8+2^9+........+2^{62}+2^{63} = 1\cdot\frac{2^{64}-1}{2-1} = 2^{64}-1$

ε) Το άθροισμα των ν όρων γεωμετρικής προόδου με $α_1 = 1$, $λ = 2$

δηλαδή $S_ν = 1\cdot\frac{2^ν-1}{2-1} = 2^ν-1$

Δ.20

Στην προηγούμενη δραστηριότητα βρήκαμε ότι το άθροισμα των ν πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου με $α_1=1$ και $λ=2$ είναι $1+2+2^2+2^3+.....+2^{ν-1}=2^ν-1$

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των: 3^0 , 3^0+3^1 , $3^0+3^1+3^2$, $3^0+3^1+3^2+3^3$

β) Προσπαθήστε να εικάσετε ένα τύπο για το άθροισμα $3^0+3^1+3^2+3^3+.....+3^{ν-1}$

γ) Στη συνέχεια, προσπαθήστε να εικάσετε ένα τύπο για το άθροισμα: $4^0+4^1+4^2+......+4^{ν-1}$

δ) Μπορείτε να εικάσετε ένα τύπο για το άθροισμα: $1+λ^1+λ^2+.....λ^{ν-1}$, για οποιονδήποτε $λ\neq1$

ε) Αν ο πρώτος όρος μιας γεωμετρικής προόδου δεν είναι ίσος με 1 (δηλαδή $α_1\neq1$), πώς μεταβάλλεται η παράσταση του ερωτήματος (δ); Πως μπορούμε να προσαρμόσουμε τον τύπο που βρήκαμε στο (δ) ερώτημα, ώστε να ισχύει γενικά;

Απάντηση:

α) $3^0 = 1$, $3^0+3^1 = 4$, $3^0+3^1+3^2+3^3 = 40$

β) $3^0+3^1+3^2+3^3+.....+3^{ν-1} = (3^ν-1):2$

γ) $4^0+4^1+4^2+......+4^{ν-1} = (4^ν-1):3$

δ) $1+λ^1+λ^2+.....λ^{ν-1} = (λ^ν-1):(λ-1)$

ε) $α_1\cdot\frac{λ^ν-1}{λ-1}$, $λ\neq1$

Δ.21

Ένα φυτό έχει ύψος 1,67cm στο τέλος της πρώτης εβδομάδας της ζωής του και συνεχίζει να ψηλώνει για 9 εβδομάδες ακόμα. Κάθε εβδομάδα ψηλώνει 4% περισσότερο από την προηγουμένη.

α) Αποτελούν τα ύψη του φυτού στο τέλος κάθε εβδομάδας όρους αριθμητικής ή γεωμετρικής προόδου; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

β) Αν η απάντηση σας στο (α) ερώτημα είναι καταφατική, να γράψετε τον γενικό όρο της προόδου.
γ) Ποιο είναι το ύψος που πήρε το φυτό την $4^η$ εβδομάδα;
(να χρησιμοποιήσετε υπολογιστή τσέπης)
δ) Ποιο θα είναι το μέγιστο ύψος που θα φθάσει το φυτό;

Απάντηση:

α) Αν παραστήσουμε με $α_1, α_2, α_3, \ldots, α_9, α_{10}$ τα ύψη τότε:
$α_1 = 1,67$, $α_2 = 1,67+1,67\cdot 0,04 = 1,67\cdot (1+0,04) = 1,67\cdot 1,04$, $α_3 = 1,67\cdot 1,04^2$ $\ldots, α_{10} = 1,67\cdot 1,04^9$. Τα ύψη $α_1,\ldots,α_{10}$ αποτελούν γεωμετρική πρόοδο με $α_1 = 1,67$ και $λ = 1,04$
β) $α_ν = 1,67\cdot 1,04^{ν-1}$
γ) Στο τέλος της $4^{ης}$ εβδομάδος το ύψος θα είναι: $α_5 = 1,67\cdot 1,04^4$
δ) Το μέγιστο ύψος θα είναι το ύψος στο τέλος της $9^{ης}$ εβδομάδος: $α_{10} = 1,67\cdot 1,04^9$

Δ.22

Ας υποθέσουμε ότι στον παρακάτω πίνακα φαίνεται η μέγιστη μηνιαία θερμοκρασία για την πόλη της Θεσσαλονίκης το έτος 2003

ΙΑΝ	ΦΕΒ	ΜΑΡ	ΑΠΡ	ΜΑΙ	ΙΟΥΝ	ΙΟΥΛ	ΑΥΓ	ΣΕΠΤ	ΟΚΤ	ΝΟΕ	ΔΕ
-0,3°C	-0,8°C	4°C	11°C	13°C	20°C	20°C	25°C	20°C	15°C	12°C	7°C

Είναι η αντιστοιχία: Μήνας → Θερμοκρασία συνάρτηση ;
Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

Απάντηση:

Είναι συνάρτηση γιατί σε κάθε μήνα αντιστοιχεί **μια** μέγιστη τιμή.

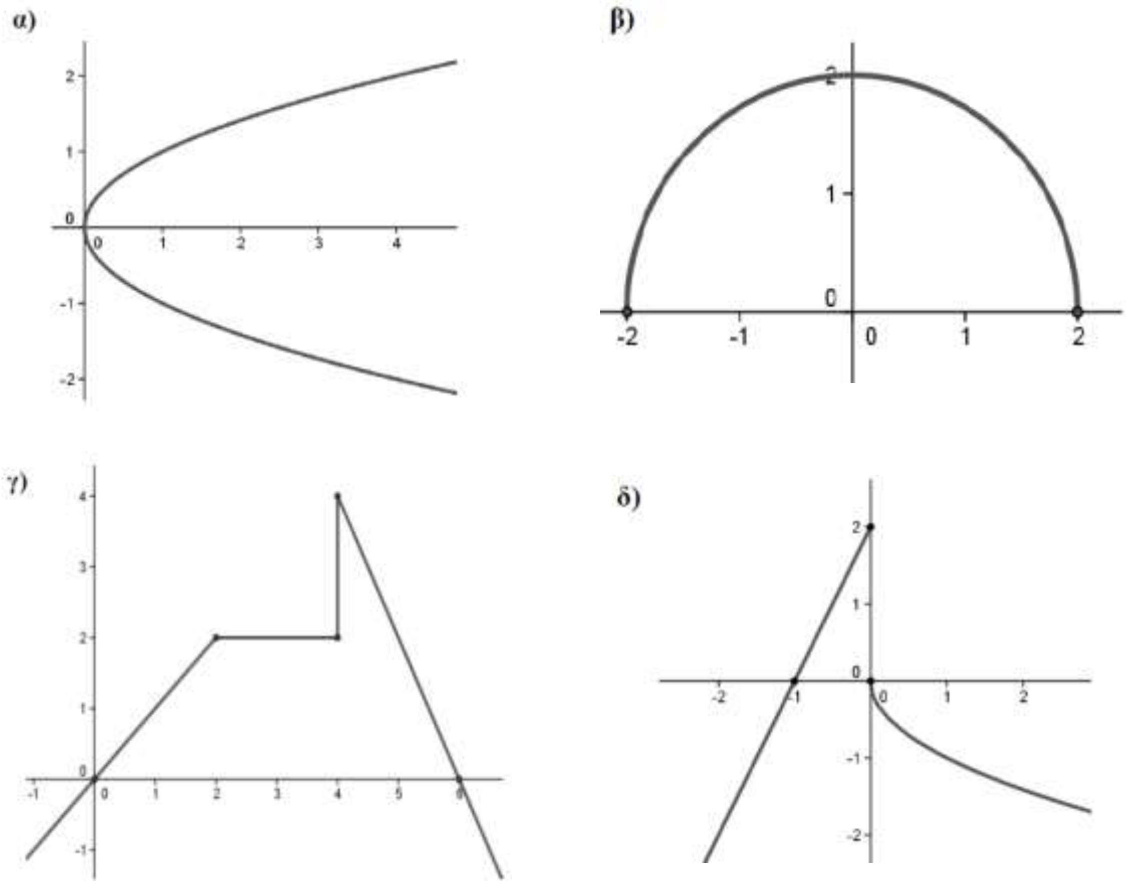
Δ.23

Είναι οι παρακάτω αντιστοιχίες συναρτήσεις ; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.
α) Ημερομηνία γέννησης → άνθρωποι που έχουν γεννηθεί εκείνη την ημέρα
β) Άτομο → Ημέρα γενεθλίων
γ) Όνομα → Ταυτότητα
δ) Μαθητής της τάξης → Αριθμός τηλεφώνου

Απάντηση:
α) Δεν είναι συνάρτηση γιατί την ίδια ημέρα έχουν γεννηθεί αρκετοί άνθρωποι.
β) Είναι συνάρτηση γιατί σε κάθε άτομο αντιστοιχεί μια ημέρα γενεθλίων.
γ) Δεν είναι συνάρτηση αν πρόκειται για το **μικρό** όνομα του ατόμου. Είναι συνάρτηση αν πρόκειται για το **πλήρες** όνομα του ατόμου.
δ) Δεν είναι συνάρτηση γιατί σε ένα μαθητή μπορεί να αντιστοιχούν περισσότεροι του ενός αριθμοί τηλεφώνου.

Δ.24

Είναι τα παρακάτω διαγράμματα γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων ; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.



Απάντηση:
Η α) γραφική παράσταση **δεν** είναι γραφική παράσταση συνάρτησης

γιατί υπάρχουν ευθείες κάθετες στον άξονα x’x που τέμνουν αυτή σε περισσότερε από ένα σημεία.

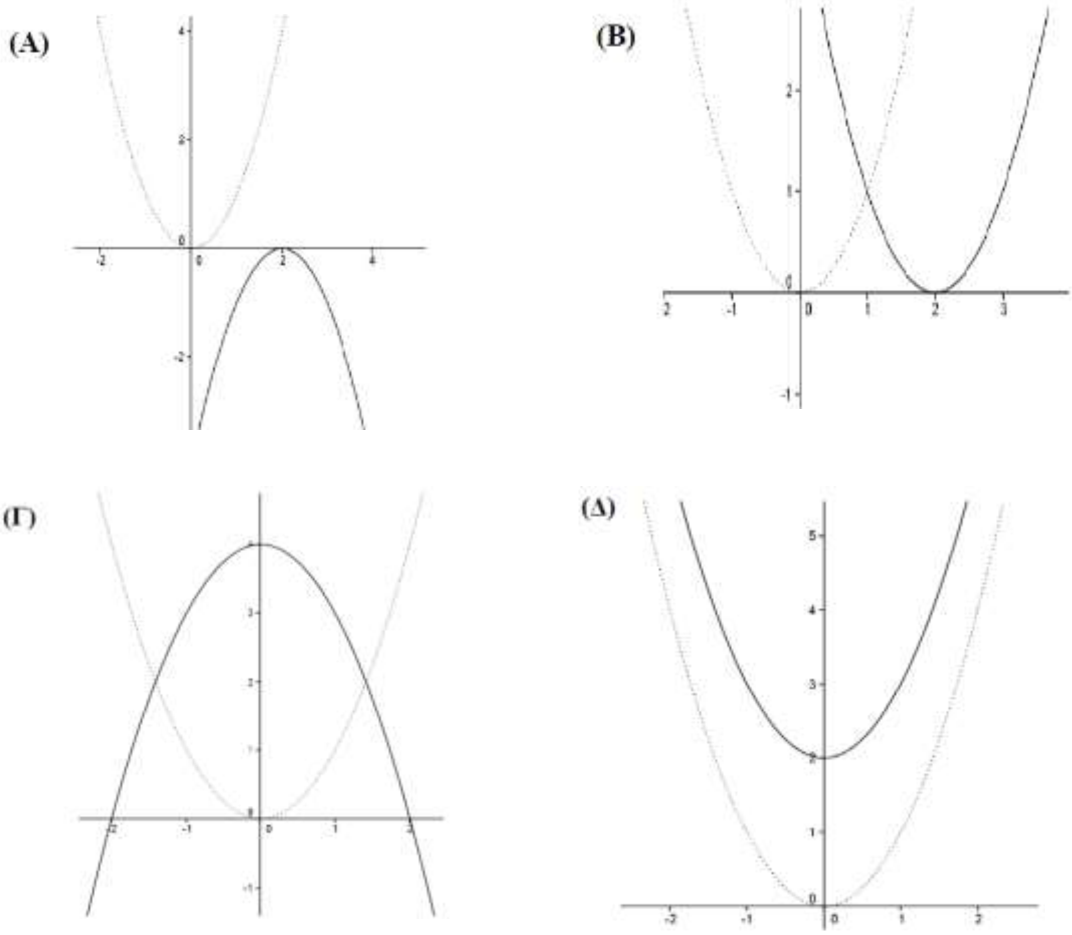
Η β) **είναι** γραφική παράσταση συνάρτησης γιατί η οποιαδήποτε κάθετη στον άξονα x’x τέμνει αυτή σε ένα το πολύ σημείο.

Η γ) **δεν** είναι γραφική παράσταση συνάρτηση συνάρτησης γιατί η κάθετη στον άξονα x’x σημείο (4,0) τέμνει αυτή σε άπειρα σημεία.

Η δ) **δεν** είναι γραφική παράσταση συνάρτησης γιατί η κάθετη στον άξονα x’x στο σημείο (0,0) (άξονας y’y) τέμνει αυτή στα σημεία (0,0) και (2,0)

Δ.25

Δίνονται οι παρακάτω παραβολές (σε κάθε σχήμα η παραβολή που παριστάνεται με διακεκομμένη γραμμή είναι η $y = x^2$) ΕΚΤΟΣ



I) Να βρείτε ποια παραβολή είναι γραφική παράσταση καθεμιάς από τις παρακάτω συναρτήσεις, αιτιολογώντας την επιλογή σας:
α) $f(x) = (2 - x)^2$ β) $g(x) = x^2 + 2$ γ) $h(x) = (2 - x)\cdot(x + 2)$

II) Να βρείτε τη συνάρτηση στην οποία αντιστοιχεί η παραβολή που δεν είναι γραφική παράσταση μιας από τις συναρτήσεις f, g και h

Απάντηση:

I)

$f(x) = (2 - x)^2 \Leftrightarrow f(x) = (x - 2)^2$. Η γραφική παράσταση της f αντιστοιχεί στο σχήμα (Β) και προκύπτει από την οριζόντια μετατόπιση της $y = x^2$ κατά 2 μονάδες δεξιά.

$g(x) = x^2 + 2$. Η γραφική παράσταση της g αντιστοιχεί στο σχήμα (Δ) και προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση της $y = x^2$ κατά 2 μονάδες προς τα πάνω.

$h(x) = (2 - x)\cdot(x + 2) \Leftrightarrow h(x) = 2^2 – x^2 \Leftrightarrow h(x) = - x^2 + 4$

Η γραφική παράσταση της h αντιστοιχεί στο σχήμα (Γ) και προκύπτει από την συμμετρική της $y = x^2$ ως προς τον άξονα x'x ($y = - x^2$) μετατόπιση αυτής κατά 4 μονάδες προς τα πάνω.

II)

Είναι η συνάρτηση $y = - (x – 2)^2$, αντιστοιχεί στο σχήμα (Α) και προκύπτει από την μετατόπιση της συμμετρικής της $y = x^2$ ($y = - x^2$) κατά 2 μονάδες δεξιά.

Δ.26

Ένα κινητό που κινείται έτσι ώστε η απόσταση του (σε km) από ένα σημείο Α (που το θεωρούμε αρχή της μέτρησης) σε σχέση με το χρόνο (σε ώρες) φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα. Από τις πληροφορίες του διαγράμματος να απαντήσετε στα ερωτήματα:

α) Ποια ήταν η διάρκεια της κίνησης ;

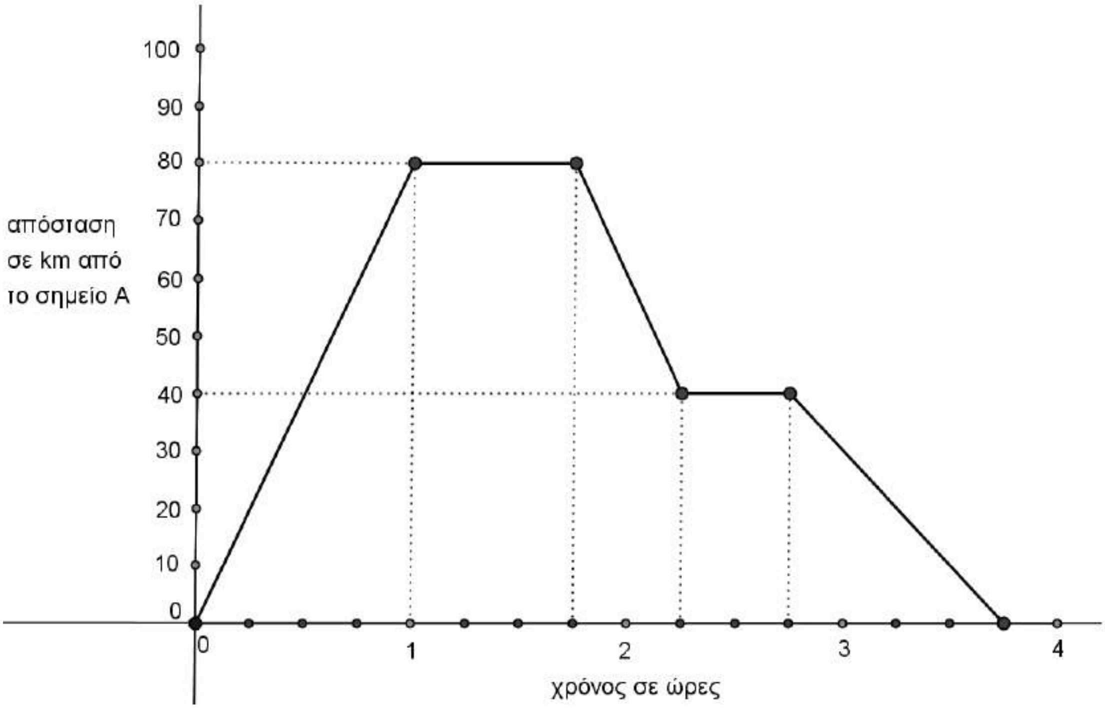
β) Πόσα χιλιόμετρα είναι η συνολική απόσταση ;

γ) Πόσες φορές το κινητό έκανε στάση και για πόση ώρα ;

δ) Πόσος χρόνος πέρασε μέχρι να κάνει την πρώτη στάση, τι απόσταση διήνυσε και ποια ήταν η ταχύτητά του σ' αυτό το χρονικό διάστημα ;

ε) Σε τι απόσταση από το Α θα βρίσκεται: 45 λεπτά, 1 ώρα και 15 λεπτά, 1 ώρα και 33 λεπτά, 3 ώρες και 30 λεπτά και 4 ώρες μετά την αρχή της μέτρησης.

στ) Προσπαθήστε να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης που περιγράφεται στο διάγραμμα.



Απάντηση:

α) Η διάρκεια της κίνησης ήταν: 3 ώρες και 45 λεπτά.

β) Συνολική απόσταση: 160 χιλιόμετρα.

γ) Έκανε δύο στάσεις συνολικής διάρκειας 1 ώρα και 15 λεπτά ($1^{η}$ στάση: 45 λεπτά , $2^{η}$ στάση: 30 λεπτά)

δ) Χρόνος που πέρασε μέχρι να κάνει την πρώτη στάση =1 ώρα

Απόσταση που διήνυσε = 80 χιλιόμετρα , Ταχύτητα = 80 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$,

Χρονικό διάστημα = 1 ώρα

ε) Σε 45 λεπτά : 60 χιλιόμετρα , σε 1 ώρα και 15 λεπτά : 80 χιλιόμετρα , σε 1 ώρα και 33 λεπτά : 80 χιλιόμετρα , σε 3 ώρες και 30 λεπτά : 10 χιλιόμετρα , σε 4 ώρες : 0 χιλιόμετρα.

στ)

$$s(t) = \begin{cases} 80t & 0 \le t < 60 \text{ min} \\ 80 & 60 \le t < 105 \text{ min} \\ -\frac{4}{3}t + 220 & 105 \le t < 135 \text{ min} \\ 40 & 135 \le t < 165 \text{ min} \\ -\frac{2}{3}t + 150 & 165 \le t \le 225 \text{ min} \end{cases}$$

Δ.27

Με χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας να μεταβάλλετε τις τιμές στα α και β και να διερευνήσετε τις μεταβολές της ευθείας y = αx +β. Προσπαθήστε να ερμηνεύσετε το ρόλο των παραμέτρων α και β.

Επισυνάπτεται το αντίστοιχο αρχείο (Geogebra)

Δ.28

Ο Στέφανος ζεσταίνει νερό με χρήση ενός θερμομέτρου. Η θερμοκρασία του νερού αυξάνεται γραμμικά κατά 15^{o}C κάθε 2 λεπτά. Αν στην αρχή το νερό έχει θερμοκρασία 10^{o}C :

α) Είναι η αντιστοιχία χρόνου – θερμοκρασίας συνάρτηση;
Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

Χρόνος (t) σε min	0	1	2	3	4	6
Θερμοκρασία (θ) σε ^{o}C	10	17,5	25	32,5	40	55

Να παραστήσετε γραφικά την αντιστοιχία χρόνου – θερμοκρασίας.

γ) Με χρήση της γραφικής παράστασης, να εκτιμήσετε μετά από πόσα λεπτά θα βράσει το νερό.

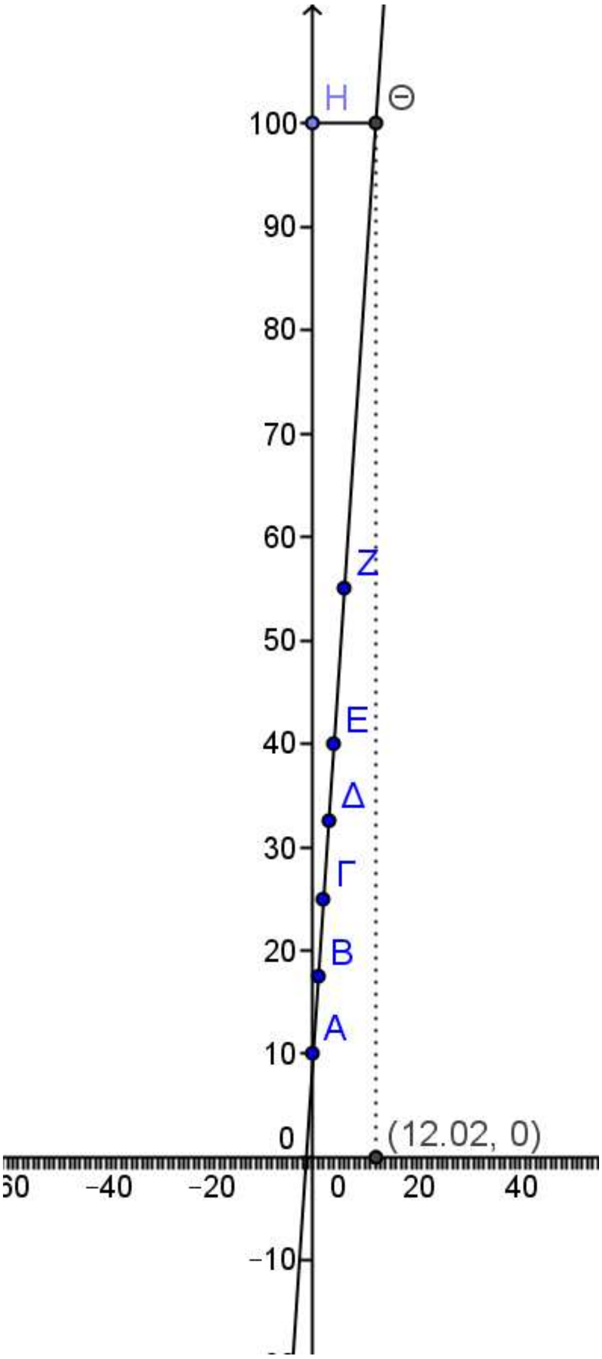
δ) Προσπαθήστε να εκφράσετε αλγεβρικά τη σχέση που περιγράφει την αντιστοιχία χρόνου – θερμοκρασίας και υπολογίστε μετά από πόσα λεπτά θα βράσει το νερό.

Απάντηση:

α) Είναι συνάρτηση γιατί σε κάθε χρονική στιγμή αντιστοιχεί μια συγκεκριμένη θερμοκρασία του νερού (η θερμοκρασία αυξάνεται γραμμικά.

β) Ο πίνακας είναι συμπληρωμένος ανωτέρω.

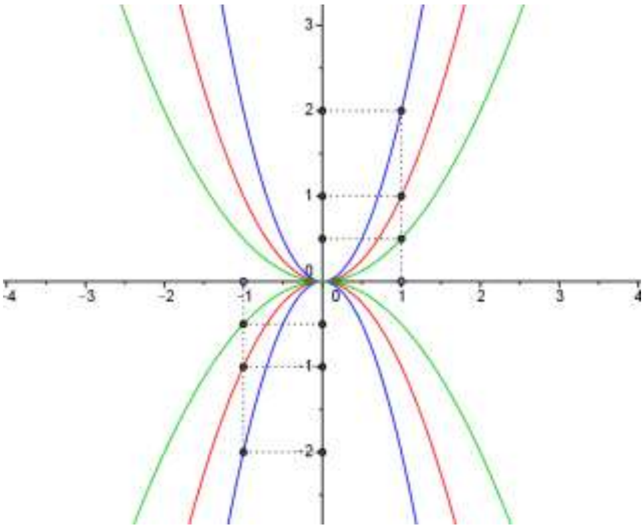
γ) Θα βράσει μετά 12min περίπου



δ) $\theta(t) = 7{,}5t + 10$ (1) , για $\theta(t) = 100$ από (1) $\Rightarrow 100 = 7{,}5t+10 \Rightarrow t = 12$min

Δ.29

Στο παρακάτω σύστημα αξόνων δίνονται έξι παραβολές.



α) Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις των οποίων οι γραφικές παραστάσεις είναι οι παραπάνω παραβολές.

β) Τι συμπεραίνετε για την μονοτονία των συναρτήσεων του ερωτήματος (α) ; Μπορείτε να γενικεύσετε τα συμπεράσματα σας για τις συναρτήσεις αυτής της μορφής; ΕΚΤΟΣ

γ) Για κάθε μια από τις παραπάνω συναρτήσεις, υπάρχει τιμή της μεταβλητής x για την οποία η συνάρτηση παίρνει τη μεγαλύτερη ή τη μικρότερη τιμή της; Εκφράστε αλγεβρικά τα συμπεράσματα σας. Μπορείτε να γενικεύσετε αυτά τα συμπεράσματα για τις συναρτήσεις αυτής της μορφής;

δ) Έχει η καθεμιά από τις παραπάνω παραβολές άξονα ή κέντρο συμμετρίας; Εκφράστε αλγεβρικά τις συμμετρίες αυτές. Μπορείτε να γενικεύσετε τα συμπεράσματα σας για τις συναρτήσεις αυτής της μορφής.

ε) Από τι εξαρτάται το «άνοιγμα» μιας παραβολής και με ποιόν τρόπο;

στ) Παρατηρείστε τις παραβολές $y = αx^2$ και $y = -αx^2$. Είναι συμμετρικές μεταξύ τους;

Απάντηση:

α) Όλες οι παραβολές είναι της μορφής $y = αx^2$. Η ανοικτή προς τα πάνω παραβολή μπλε χρώματος διέρχεται από το σημείο (1,2) άρα οι συντεταγμένες του σημείου αυτού την επαληθεύουν. Για x=1 και y=2 παίρνουμε $2=\alpha\cdot 1^2 \Rightarrow \alpha = 2$. Άρα η εξίσωση της συγκεκριμένης παραβολής είναι: $y = 2\cdot x^2$. Ομοίως οι εξισώσεις των υπόλοιπων παραβολών είναι: $y = x^2$, $y = 0{,}5x^2$, $y = -2x^2$, $y = -x^2$, $y = -0{,}5x^2$

Παρατήρηση: Οι παραβολές του ιδίου χρώματος είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα x'x (αντίθετες συναρτήσεις) κατά συνέπεια έχουν αντίθετα α

β) i. Οι παραβολές που είναι ανοικτές προς τα πάνω είναι γνήσια φθίνουσες στο $(-\infty, 0]$ και γνήσια αύξουσες στο $[0, +\infty)$

ii. οι παραβολές που είναι ανοικτές προς τα κάτω είναι γνήσια αύξουσες στο $(-\infty, 0]$ και γνήσια φθίνουσες στο $[0, +\infty)$.

Γενίκευση: i) $\alpha > 0$: γνήσια φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνήσια αύξουσα στο $[0, +\infty)$

ii) $\alpha < 0$: γνήσια αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνήσια φθίνουσα στο $[0, +\infty)$

γ) Κάθε παραβολή του σχήματος που είναι ανοικτή προς τα πάνω παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 0$ και είναι ίσο με $f(0) = 0$.

Κάθε παραβολή του σχήματος που είναι ανοικτή προς τα κάτω παρουσιάζει μέγιστο στο $x = 0$ και είναι ίσο με $f(0) = 0$.

Γενίκευση: i) Κάθε παραβολή της μορφής $f(x) = \alpha x^2$ με $\alpha > 0$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 0$ και είναι ίσο με $f(0) = 0$.

ii) Κάθε παραβολή της μορφής $f(x) = \alpha x^2$ με $\alpha < 0$ παρουσιάζει μέγιστο στο $x = 0$ και είναι ίσο με $f(0) = 0$.

δ) Οι παραβολές του σχήματος έχουν άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = 0$ (τον άξονα y'y). Αλγεβρική έκφραση: $f(-x) = f(x)$

Γενίκευση: Κάθε παραβολή της μορφής $f(x) = \alpha x^2$, $\alpha \neq 0$ έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y'y

ε) Το «άνοιγμα» μιας παραβολής εξαρτάται από το α. Όταν αυξάνει το α η παραβολή «κλείνει»

στ) Οι παραβολές της μορφής $f(x) = \alpha x^2$ και $f(x) = -\alpha x^2$ είναι συμμετρικές ως προς y'y διότι για τα ίδια x έχουν αντίθετα y.

Δ.30

α) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των $y = x^2$ και $y = x^2+κ$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού κ. Πως μπορούν να προκύψουν από τη γραφική παράσταση της $y = x^2$ οι άλλες γραφικές παραστάσεις;

β) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των $y = x^2$ και $y = (x+λ)^2$ για διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ. Πώς μπορούν να προκύψουν από τη γραφική παράσταση της $y = x^2$ οι άλλες γραφικές παραστάσεις;

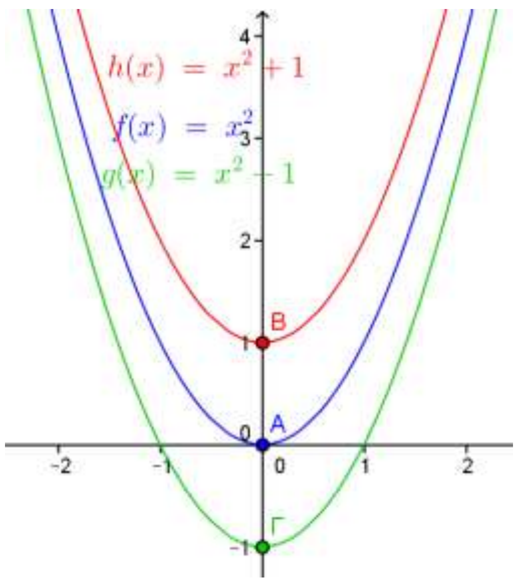
γ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2-4x+5$. Αφού τη γράψετε στη μορφή $f(x) = (x+λ)^2+κ$ προσπαθήστε να την παραστήσετε γραφικά ξεκινώντας από την $y = x^2$ με βάση τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τα προηγούμενα ερωτήματα.

δ) Σε ποια διαστήματα η $f(x) = x^2-4x+5$ είναι αύξουσα και σε ποια φθίνουσα; Για ποια τιμή του x παρουσιάζει η f ελάχιστη τιμή και ποια είναι αυτή; Έχει η γραφική παράσταση της f άξονα συμμετρίας;

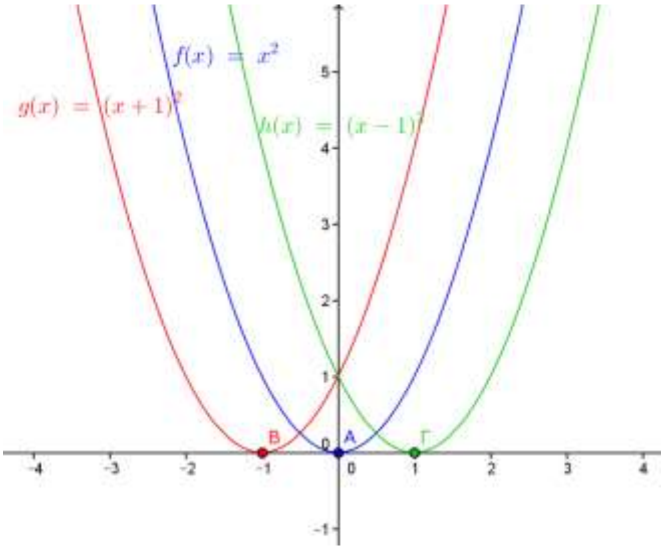
(Για την παραπάνω δραστηριότητα ενδείκνυται η χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας)

Απάντηση:

α) Οι άλλες γραφικές παραστάσεις προκύπτουν με κατακόρυφη μετατόπιση κατά κ μονάδες της $y = x^2$. i) αν κ > 0 προς τα πάνω
ii) αν κ < 0 προς τα κάτω

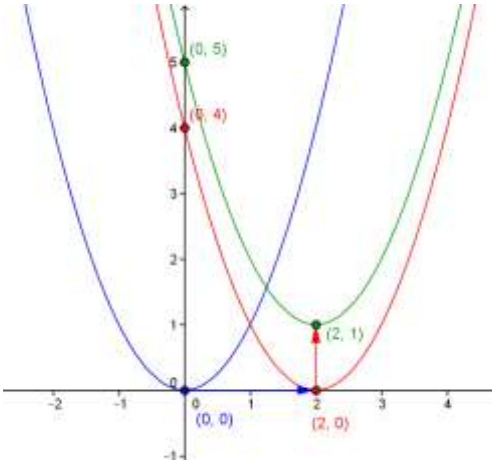


β)



Οι γραφικές παραστάσεις της μορφής $y = (x + λ)^2$ προκύπτουν με οριζόντια μετατόπιση της $y = x^2$ κατά λ μονάδες αριστερά αν $λ > 0$ και κατά λ μονάδες δεξιά αν $λ < 0$.

γ) $f(x) = x^2-4x+5 \Leftrightarrow f(x) = x^2-2\cdot 2\cdot x+2^2-2^2+5 \Leftrightarrow f(x) = (x-2)^2 -4+5 \Leftrightarrow$
$f(x) = (x-2)^2+1$



δ) $α = 1 > 0$. Γνήσια φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 2]$ και γνήσια αύξουσα στο διάστημα $[2, +\infty)$. Ελάχιστο στο $χ = 2$ και είναι ίσο με $f(2) = 1$. Άξονας συμμετρίας η ευθεία $x = 2$.

Δ.31

Ένας μαθητής πειραματίζεται παριστάνοντας γραφικά συναρτήσεις της μορφής $f(x) = αx^2+2βx+γ$. Ως τιμές των α, β και γ διαλέγει διαδοχικούς όρους της γεωμετρικής προόδου: 1, 2, 4, 8, 16, 32,…..

α) Με τη βοήθεια λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας να χαράξετε κάποιες γραφικές παραστάσεις των παραπάνω συναρτήσεων.

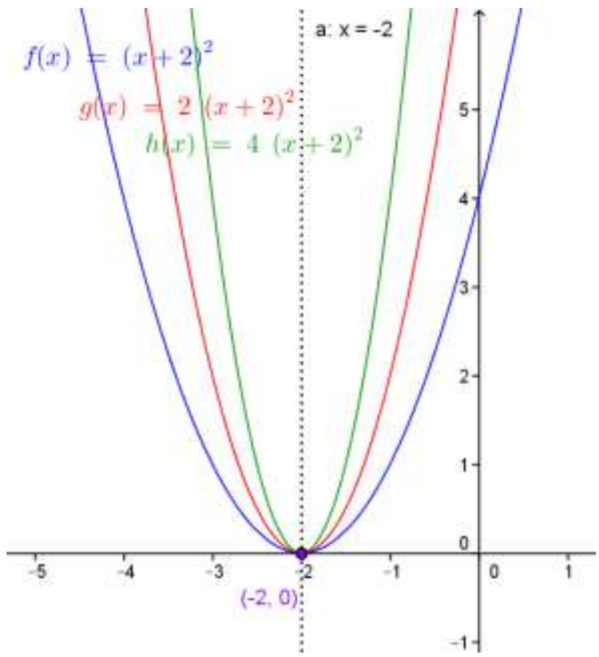
Τι παρατηρείτε; Μπορείτε να γενικεύσετε την παρατήρηση σας και να αποδείξετε την ισχύ της γενίκευσης αυτής;

β) Τι θα συμβεί αν με της ίδιας μορφής συναρτήσεις χρησιμοποιήσουμε άλλες γεωμετρικές προόδους;

Μπορείτε να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας;

Απάντηση:

α)



Για α=1, β=2, γ=4: $f(x) = x^2+4x+4 \Leftrightarrow f(x) = (x+2)^2$

Για α=2, β=4, γ=8: $g(x) = 2x^2+8x+8 = 2\cdot(x^2+4x+4) \Leftrightarrow g(x) = 2\cdot(x+2)^2$

Για α=4, β=8, γ=16: $h(x) = 4x^2+8x+16 = 4\cdot(x^2+4x+4) \Leftrightarrow h(x) = 4\cdot(x+2)^2$

Από τις γραφικές παραστάσεις των ανωτέρω παραβολών παρατηρούμε:

i) Έχουν κοινή κορυφή το σημείο (-2,0)

ii) Άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -2$ iii) το άνοιγμα αυτών ελαττώνεται (κλίνουν) με σταθερό ρυθμό όσο αυξάνεται το α (1<2<4<…)

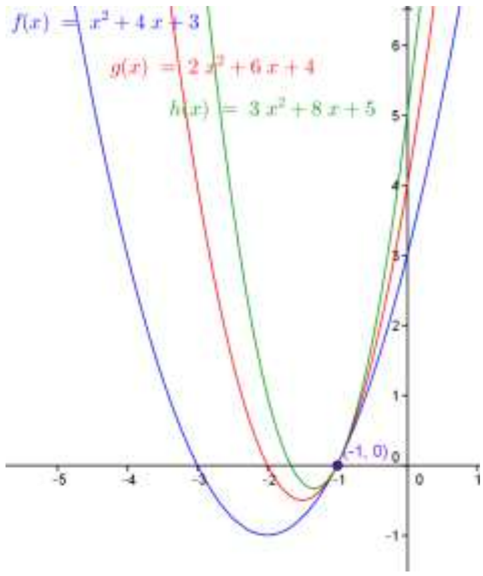
Γενικότερα: Αν $α_1$, $α_2$, $α_3$,…….$α_{ν-1}$, $α_ν$ διαδοχικοί όροι γ.π. με λόγο λ και
$f(x) = α_{ν-2}x^2+2α_{ν-1}x+α_ν = α_1λ^{ν-3}x^2+2α_1λ^{ν-2}x+α_1λ^{ν-1} = α_1λ^{ν-3}(x^2+2λx+λ^2) \Leftrightarrow$
$f(x) = α_1 \cdot λ^{ν-3} \cdot (x+λ)^2$. (1)

Για $α_1 = 1$, $λ = 2$ η (1) γίνεται $f(x) = 2^{ν-3} \cdot (x+2)^2$, $ν \geq 3$ (2)

Επισυνάπτεται αρχείο Geogebra με την γραφική παράσταση της (2).

Η (1) μπορεί να παρασταθεί γραφικά και για άλλα ζεύγη τιμών ($α_1$, λ)

β) Αν α, β, γ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με διαφορά 1 και
$f(x) = αx^2+2βx+γ$ τότε:
Αν α=1, β=2, γ=3 $f(x) = x^2+4x+3$ (3)
Αν α=2, β=3, γ=4 $g(x) = 2x^2+6x+4$ (4)
Αν α=3, β=4, γ=5 $h(x) = 3x^2+8x+5$ (5)
Οι γραφικές παραστάσεις των (3), (4), (5) φαίνονται κατωτέρω.



Παρατηρώ ότι διέρχονται από το σημείο (-1, 0)

Γενικότερα: Αν $α_1$, $α_2$, $α_3$,…….$α_{ν-1}$, $α_ν$ διαδοχικοί όροι α.π. με διαφορά ω
$f(x) = α_{ν-2}x^2+2α_{ν-1}x+α_ν = [α_1+(ν-2-1)ω]x^2+2[α_1+(ν-1-1)ω]x+[α_1+(ν-1)ω] \Leftrightarrow$
$f(x) = [α_1+(ν-3)ω]x^2+2[α_1+(ν-2)ω]x+[α_1+(ν-1)ω]$ (1).

Για $α_1 = 1$ και $ω = 1$ από (1) $\Rightarrow f(x) = (ν-2)x^2 + 2(ν-1)x + ν$, $ν \geq 3$ (2)

Επισυνάπτεται αρχείο Geogebra με την γραφική παράσταση της (2).

Η (1) μπορεί να παρασταθεί γραφικά και για άλλα ζεύγη τιμών ($α_1$, ω)

Δ.32

Δίνεται η συνάρτηση φ(x) = $2x^2$-4x-6.

α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-2	-1	0	1	2	3	4
φ(x)	10	0	-6	-8	-6	4	12

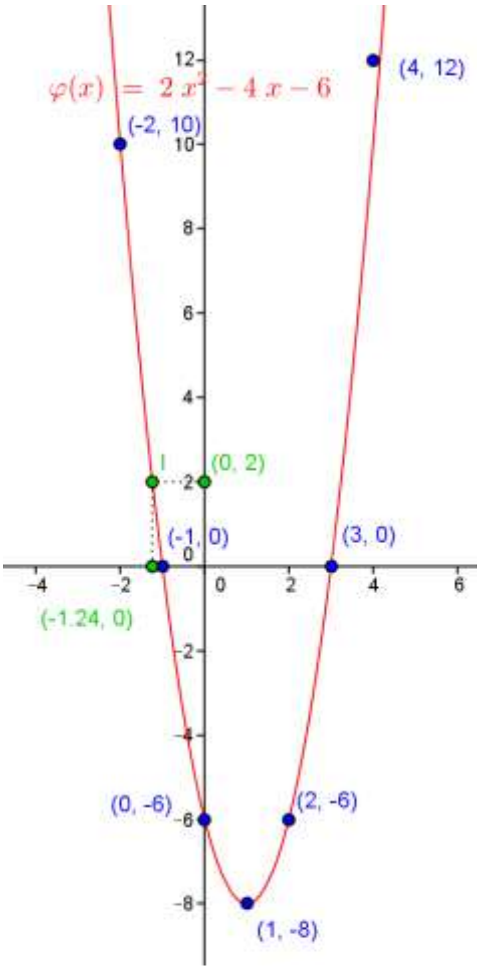
β) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης φ(x).

γ) Με χρήση τη παραπάνω γραφικής παράστασης, να προσδιορίσετε τις λύσεις των εξισώσεων φ(x) = 0, φ(x) = 2 και της ανίσωσης φ(x) > 0

δ) Να επιλύσετε αλγεβρικά τις φ(x) = 0, φ(x) = 2 και της φ(x) > 0 και να συγκρίνετε τις απαντήσεις σας με εκείνες του ερωτήματος (γ).

Απάντηση:

β)



γ) φ(x) = 0 ⇔ x = -1 , x = 3

φ(x) = 2 ⇔ x ≃ -1,24

φ(x) > 0 ⇔ x < -1 ή x > 3

δ) Οι αλγεβρικές λύσεις της φ(x) = 0 και φ(x) > 0 συμπίπτουν με τις λύσεις που βρίσκω γραφικά. Οι αλγεβρικές της φ(x) = 2 είναι:

$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{5}$