ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ – Α ΛΥΚΕΙΟΥ

Ε.1

Ι.

1. $\alpha^2 = 9 \Rightarrow \alpha = 3$ — Ψ

p: $\alpha^2 = 9$, q: $\alpha = 3$
Σύνολο αλήθειας της p: $A = \{-3,3\}$, Σύνολο αλήθειας της q: $B = \{3\}$
$A \not\subseteq B$

2. $\alpha^2 = \alpha \Leftrightarrow \alpha = 1$ — Ψ

p: $\alpha^2 = \alpha$, q: $\alpha = 1$
Σύνολο αλήθειας της p: $A = \{0,1\}$, Σύνολο αλήθειας της q: $B = \{1\}$
$A \neq B$, ενώ $B \subseteq A$ άρα $q \Rightarrow p$ Α

3. $\alpha^2 \neq \alpha \Rightarrow \alpha \neq 1$ — Α

p: $\alpha^2 \neq \alpha$, q: $\alpha \neq 1$
Σύνολο αλήθειας της p: $A = R - \{0,1\}$, Σύνολο αλήθειας της q: $B = R - \{1\}$
$A \subseteq B$

4. $\alpha \neq 2 \Leftrightarrow \alpha^2 \neq 4$ — Ψ

p: $\alpha \neq 2$, q: $\alpha^2 \neq 4$
Σύνολο αλήθειας της p: $A = R - \{2\}$, Σύνολο αλήθειας της q: $B = R - \{-2,2\}$
$A \not\subseteq B$

5. $\alpha > 2 \Rightarrow \alpha^2 > 4$ — Α

p: $\alpha > 2$, q: $\alpha^2 > 4$
Σύνολο αλήθειας της p: $A = (2,+\infty)$,
Σύνολο αλήθειας της q: $B = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
$A \subseteq B$

6. $\alpha < 2 \Rightarrow \alpha^2 < 4$ — Ψ

p: $\alpha < 2$, q: $\alpha^2 < 4$
Σύνολο αλήθειας της p: $A = (-\infty, 2)$, Σύνολο αλήθειας της q: $B = (-2, 2)$
$A \not\subseteq B$

7. $\alpha^2 < 4 \Rightarrow \alpha < 2$ Α

p: $\alpha^2 < 4$, q: $\alpha < 2$

Σύνολο αλήθειας της p: $A = (-2, 2)$, Σύνολο αλήθειας της q: $B = (-\infty, 2)$

$A \subseteq B$

8. $\alpha^2 > 4 \Rightarrow \alpha > 2$ ψ

p: $\alpha^2 > 4$, q: $\alpha > 2$

Σύνολο αλήθειας της p: $A = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$,

Σύνολο αλήθειας της q: $B = (2, +\infty)$

$A \not\subseteq B$

9. $\alpha < 2$ και $\beta < 3 \Rightarrow \alpha \cdot \beta < 6$ ψ

p: ($\alpha < 2$ και $\beta < 3$) σύνθετη πρόταση

q: $\alpha \cdot \beta < 6$

i) Εάν $0 < \alpha < 2$ και $0 < \beta < 3 \Rightarrow 0 < \alpha \cdot \beta < 6$

ii) Εάν $\alpha \leq 0$ και $\beta \leq 0 \Leftrightarrow -\alpha \geq 0$ και $-\beta \geq 0 \Rightarrow (-\alpha)\cdot(-\beta) \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta \geq 0$ άρα σε κάθε περίπτωση δεν προκύπτει $\alpha \cdot \beta < 6$

(ομοίως οι υπόλοιποι συνδυασμοί)

Πρόταση

Δίνονται οι προτασιακοί τύποι p(x) και q(x) με σύνολα αλήθειας Α και Β αντίστοιχα. Αν για κάθε x, $p(x) \Rightarrow q(x)$ τότε $A \subseteq B$ και αντίστροφα

Πρόταση

Δίνονται οι προτασιακοί τύποι p(x) και q(x) με σύνολα αλήθειας Α και Β αντίστοιχα. Για κάθε x, $p(x) \Leftrightarrow q(x)$, $A = B$

Παράδειγμα

Δίνονται οι προτάσεις p: $x^2 = 16$ και q: ($x = 4$ ή $x = -4$)

$A = \{-4 , 4\}$, $B = \{-4 , 4\}$

$p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$, $p \Leftrightarrow q$ αληθείς

II.

1. $x(x-2) = 0 \Leftrightarrow (x=0$ ή $x-2=0) \Leftrightarrow (x=0$ ή $x=2)$

2. $x(x-2) \neq 0 \Leftrightarrow (x\neq0$ και $x-2\neq0) \Leftrightarrow (x\neq0$ και $x\neq2)$

3. $x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow (x = -2$ ή $x = 2$)

4. $x^2 = 4$ και $x < 0 \Leftrightarrow$ ($x = -2$ ή $x = 2$) και $x < 0 \Leftrightarrow x = -2$

5. $x(x-2) = 0$ και $x(x-1) = 0 \Leftrightarrow$ ($x = 0$ ή $x = 2$) και ($x = 0$ ή $x = 1$) $\Leftrightarrow x = 0$

6. $x^2 = 4$ και $\chi > 0 \Leftrightarrow$ ($x^2 = 4$ και $x > 0$)$\Leftrightarrow$ ($x = -2$ ή $x = 2$) και $x > 0 \Leftrightarrow x = 2$

1	2	3	4	5	6
Ε	Α	Γ	Ζ	Δ	Β

Ε.2

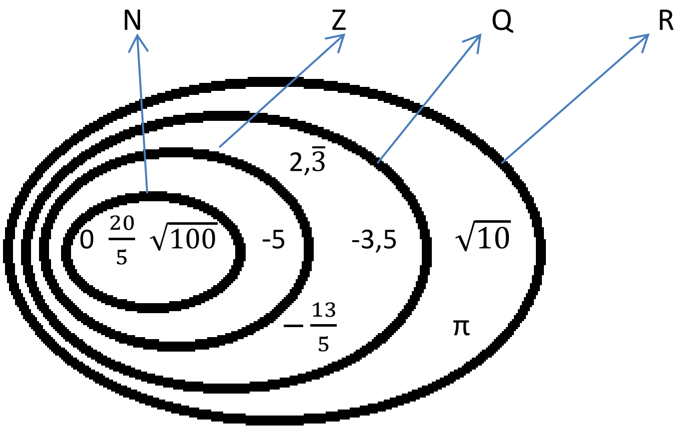
I.

1.

	-3,5	0	$\sqrt{10}$	$-\frac{13}{5}$	π	$2,\overline{3}$	$\frac{20}{5}$	$\sqrt{100}$	-5
∈ N		√					√	√	
∈ Z		√					√	√	√
∈ Q	√	√		√		√	√	√	√
∈ R	√	√	√	√	√	√	√	√	√

2. Πραγματικοί αριθμοί

3.



II.

1. Αν $A = \{x \in N | x$ διαιρέτης του $16\} = \{1,2,4,8,16\}$ και

   $B = \{x \in N |$ διαιρέτης του $24\} = \{1,2,3,4,6,8,12,24\}$, τότε:

   α) $A \cup B = \{1,2,3,4,6,8,12,16,24\}$ β) $A \cap B = \{1,2,4,8\}$

2. Ας θεωρήσουμε ως βασικό σύνολο το σύνολο Ω των γραμμάτων του ελληνικού αλφαβήτου και τα υποσύνολα του
   $A = \{x \in \Omega | x$ φωνήεν$\}$ και $B = \{x \in \Omega | x$ σύμφωνο$\}$
   Τότε:
   α) $A \cup B = \{α,β,γ,\ldots\ldots.χ,ψ,ω\}$ β) $A \cap B = \emptyset$ γ) $A' = B$ δ) $B' = A$

III.

1. Έστω δύο σύνολα Α και Β. Τότε:

   α) $A \subseteq A \cap B$ β) $B \subseteq A \cap B$ γ) $A \cap B \subseteq A$ δ) $A \cap B \subseteq B$ Σωστά τα γ και δ

2. Έστω δύο σύνολα Α και Β. Τότε:

   α) $A \subseteq A \cup B$ β) $A \cup B \subseteq B$ γ) $A \cup B \subseteq A$ δ) $A \cup B \subseteq B$ Σωστό το α

   Το δ) θα έπρεπε να ήταν $A \cap B \subseteq B$

IV.

1. Έστω Ω ένα βασικό σύνολο, $\emptyset$ το κενό σύνολο και $A \subseteq \Omega$. Τότε:

   α) $\emptyset' = \Omega$ β) $\Omega' = \emptyset$ γ) $(A')' = A$

   Δικαιολογία γ: Έστω $x \in (A')' \Rightarrow x \notin A' \Rightarrow x \in A$ και αντίστροφα

2. Έστω $A \subseteq B$. Τότε:
   α) $A \cap B = A$ β) $A \cup B = B$

1^o ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1. Δεν έχει ληφθεί υπόψη το ενδεχόμενο «ΓΚ». Το σωστό είναι $\frac{1}{4}$

2. Είναι συμπτωματικό, πρόκειται για μικρό αριθμό ρίψεων
   Σχολιασμός μέσω δενδροδιαγράμματος

3. α) «τυχαία» Ίδια πιθανότητα επιλογής
   β) (i) 3·6

	1	2	3	4	5	6
Α	(Α,1)	(Α,2)	(Α,3)	(Α,4)	(Α,5)	(Α,6)
Μ	(Μ,1)	(Μ,2)	(Μ,3)	(Μ,4)	(Μ,5)	(Μ,6)
Κ	(Κ,1)	(Κ,2)	(Κ,3)	(Κ,4)	(Κ,5)	(Κ,6)

4. (γ) 0,6

   Αν Α το ενδεχόμενο. Η πιθανότητα πραγματοποίησης του P(A)=0,4.
   Η πιθανότητα μη πραγματοποίησης του $P(A') = 1-P(A) \Rightarrow P(A') = 0{,}6$

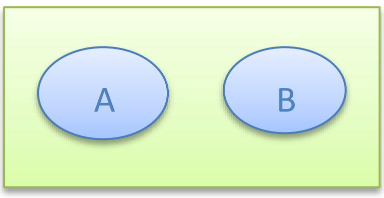
5. (β) $\frac{3}{4}$

   $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Rightarrow P(A\cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

6. (δ) Β – Α

7. Σ

8. Λ $A\cap B=\emptyset \not\Rightarrow A' = B$, $B' = A$



Σχήμα 1

9. Λ Σχήμα 1

10. Παρατήρηση :
Η ερώτηση είναι ασαφής διότι δεν αναφέρεται αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι του ίδιου δειγματικού χώρου .
Αν είναι του ίδιου δειγματικού χώρου δεν μπορεί να ισχύει διότι τότε θα ήταν και $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 1{,}3$ πράγμα άτοπο, αφού η πιθανότητα οποιουδήποτε ενδεχομένου είναι ≤ 1
Αν όμως δεν είναι του ίδιου δειγματικού χώρου, θα μπορούσε να ισχύει .

11. i) $(A\cup B)'$ ii) $(A-B)\cup(B-A)$ iii) $(B-A)'$ iv) $[(A-B)\cup(B-A)]'$

2^{o} ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Ι.

1. $(\alpha = \beta$ και $\gamma = \delta) \Leftrightarrow \alpha+\gamma = \beta+\delta$ ψ
Ιδιότητες ανισοτήτων: η 3 , σελίδα 55 (ισχύει η συνεπαγωγή)

2. Αν $\alpha^2 = \alpha\cdot\beta$, τότε $\alpha = \beta$ ψ
$\alpha^2 = \alpha\cdot\beta \Rightarrow \alpha^2 - \alpha\cdot\beta = 0 \Rightarrow \alpha\cdot(\alpha - \beta) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ ή $\alpha - \beta = 0$
$\Rightarrow \alpha = 0$ ή $\alpha = \beta$

3. $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2$ ψ
$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, γίνεται αληθής αν α=0 ή β=0

4. Το άθροισμα $\alpha + \beta$ δύο άρρητων αριθμών α και β είναι άρρητος αριθμός ψ
Αντιπαράδειγμα: Αν $\alpha=1-\sqrt{2}$ και $\beta=\sqrt{2}$ (άρρητοι), $\alpha + \beta = 1$ (ρητός)

5. Το γινόμενο $\alpha\cdot\beta$ δύο άρρητων αριθμών α και β είναι άρρητος αριθμός ψ
Αντιπαράδειγμα: Αν $\alpha=\sqrt{3} - 1$ και $\beta = \sqrt{3} + 1$ (άρρητοι), $\alpha\cdot\beta = 2$ (ρητός)

6. Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma < \delta$, τότε $\alpha - \gamma > \beta - \delta$ Α
$\alpha > \beta$ (1), $\gamma < \delta \Leftrightarrow -\gamma > -\delta$ (2), (1) + (2) $\Rightarrow \alpha - \gamma > \beta - \delta$

7. Αν $\alpha^2 > \alpha\cdot\beta$, τότε $\alpha > \beta$ ψ

$\alpha^2 > \alpha\cdot\beta \Rightarrow \alpha^2 - \alpha\cdot\beta > 0 \Rightarrow \alpha(\alpha-\beta)>0 \Rightarrow \alpha,\ \alpha-\beta$ ομόσημοι $\Rightarrow$
($\alpha > 0$ και $\alpha - \beta > 0$, $\alpha > 0$ και $\alpha > \beta$) **ή**
($\alpha < 0$ και $\alpha - \beta < 0$, $\alpha < 0$ και $\alpha < \beta$)

8. Αν $\frac{\alpha}{\beta} > 1$, τότε $\alpha > \beta$ ψ

$\frac{\alpha}{\beta} > 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha-\beta}{\beta} > o \Leftrightarrow \alpha - \beta$, β ομόσημοι $\Leftrightarrow$
($\beta > 0$ και $\alpha - \beta > 0$, $\beta > 0$ και $\alpha > \beta$) **ή**
($\beta < 0$ και $\alpha - \beta < 0$, $\beta < 0$ και $\alpha < \beta$)

9. Αν $\alpha > \beta$ και $\alpha > -\beta$, τότε $\alpha > 0$ Α

$\alpha > \beta$ (1) και $\alpha > -\beta$ (2), (1)+(2) $\Rightarrow 2\alpha > 0 \Rightarrow \alpha > 0$

10. Αν $\alpha > \frac{1}{\alpha}$, τότε $\alpha > 1$ ψ

$\alpha > \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha - \frac{1}{\alpha} > 0 \Rightarrow \frac{\alpha^2-1}{\alpha} > 0 \Rightarrow \alpha\ ,\ \alpha^2 - 1$ ομόσημοι $\Rightarrow$
($\alpha > 0$ και $\alpha^2 - 1 > 0$, $\alpha > 0$ και $\alpha < -1$ ή $\alpha > 1$) **ή**
($\alpha < 0$ και $\alpha^2 - 1 < 0$, $\alpha < 0$ και $-1 < \alpha < 1$)

11. Αν $\alpha < \beta < 0$, τότε $\alpha^2 > \beta^2$ Α

$\alpha < \beta < 0 \Rightarrow -\alpha > -\beta > 0 \Rightarrow (-\alpha)^2 > (-\beta)^2 > 0 \Rightarrow \alpha^2 > \beta^2$

12. Αν $\alpha > -2$ και $\beta > -3$ τότε $\alpha\beta > 6$ ψ

Διακρίνω περιπτώσεις για τα α, β και εξετάζω τους συνδυασμούς
($-2<\alpha\le 0$, $0<\alpha\le 2$, $\alpha>2$, $-3<\beta\le 0$, $0<\beta\le 3$, $\beta>3$)

13. Αν $\alpha < -2$ και $\beta < -3$, τότε $\alpha\beta > 6$ Α

$\alpha < -2 \Leftrightarrow -\alpha > 2$ (1) , $\beta < -3 \Leftrightarrow -\beta > 3$ (2) , από (1)·(2) $\Rightarrow (-\alpha)\cdot(-\beta) > 2\cdot 3$
$\Rightarrow \alpha\beta > 6$

14. $4\alpha^2 - 20\alpha\beta + 25\beta^2 \geq 0$ Α

$4\alpha^2 - 20\alpha\beta + 25\beta^2 = (2\alpha - 5\beta)^2 \geq 0$, το ίσο όταν $2\alpha = 5\beta$

15. $(\alpha - 1)^2 + (\alpha + 1)^2 > 0$ Α

Ως άθροισμα θετικών ($\nexists\ \alpha \in R : \alpha - 1 = 0 \wedge \alpha + 1 = 0$)

16. $(\alpha^2 - 1)^2 + (\alpha + 1)^2 > 0$ ψ

Η παράσταση $(\alpha^2 - 1)^2 + (\alpha + 1)^2$ για $\alpha = -1$ είναι ίση με μηδέν

17. $(\alpha + \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$ Α

$(\alpha + \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2 = 0 \Leftrightarrow ((\alpha + \beta)^2 = 0$ και $(\alpha - \beta)^2 = 0) \Leftrightarrow (\alpha + \beta = 0\ (1)$ και $\alpha - \beta = 0\ (2))$, $(1)+(2) \Rightarrow 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} \beta = 0$

18. Αν $\alpha \cdot \beta \geq 0$, τότε $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$ Α

Ιδιότητες απολύτων τιμών, σελίδα 63, η (3)

19. Αν $\alpha^2 = \beta$, τότε $\alpha = \sqrt{\beta}$ $\beta > 0$ Ψ

20. $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$ Ψ

$\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$

21. Αν $\alpha \geq 0$, $(\sqrt{\alpha}\,)^2 = \alpha$ Α

Ιδιότητα ριζών

22. Αν $\alpha \cdot \beta \geq 0$, τότε μπορούμε πάντοτε να γράφουμε $\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$ Ψ

Το $\alpha \cdot \beta \geq 0$ σημαίνει ότι οι α, β είναι ομόσημοι ή μηδέν.

Αν όμως $\alpha, \beta < 0$ οι $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$ δεν έχουν νόημα

23. Αν $\beta \geq 0$, τότε $\sqrt{\alpha^2 \cdot \beta} = \alpha \cdot \sqrt{\beta}$ Ψ

$\sqrt{\alpha^2 \cdot \beta} = |\alpha| \cdot \sqrt{\beta}$

24. $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \alpha + \beta$ (1) Ψ

Η (1) ισχύει αν ($\alpha = 0$ και $\beta \geq 0$) ή ($\beta = 0$ και $\alpha \geq 0$)

25. Αν $\alpha \geq 0$, τότε μπορούμε πάντοτε να γράφουμε $\sqrt[6]{\alpha^3} = \sqrt{\alpha}$ Α

Ιδιότητα ριζών

26. Μπορούμε να πάντοτε να γράφουμε $\sqrt[4]{\alpha^2} = \sqrt{\alpha}$ Ψ

$\sqrt[4]{\alpha^2} = \sqrt{|\alpha|}$

27. $5^{25} > 25^5$ Α

$5^{25} > (5^2)^5 \Leftrightarrow 5^{25} > 5^{10}$

28. $11^{22} > 22^{11}$ Α

$(11^2)^{11} > 22^{11} \Leftrightarrow 121^{11} > 22^{11}$ (αν $\alpha, \beta > 0$ τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu > \beta^\nu$)

II. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις

1. Αν $2 < x < 5$ τότε η παράσταση $|x - 2|+|x - 5|$ είναι ίση με:

Α) 2x-7 Β) 7-2x Γ) -3 Δ) 3 Δ

$2 < x < 5 \Leftrightarrow (2 < x$ και $x < 5) \Leftrightarrow (0 < x-2$ και $x-5 < 0)$ $(*)$

$|x-2|+|x-5| \overset{*}{=} x-2-x+5 = 3$

2. Αν $10 < x < 20$ τότε η τιμή της παράστασης $\frac{|x-10|}{x-10} + \frac{|x-20|}{x-20}$ είναι ίση με: Α) 2 Β) -2 Γ) 10 Δ) 0 Δ

$10 < x < 20 \Leftrightarrow (10 < x$ και $x < 20) \Leftrightarrow (0 < x-10$ και $x-20 < 0)$ $(*)$

$\frac{|x-10|}{x-10} + \frac{|x-20|}{x-20} \overset{*}{=} \frac{x-10}{x-10} + \frac{-(x-20)}{x-20} = 1-1 = 0$

3. Αν $\alpha = \sqrt[6]{10}$, $\beta = \sqrt{2}$ και $\gamma = \sqrt[3]{3}$ τότε:

Α) $\alpha < \beta < \gamma$ Β) $\alpha < \gamma < \beta$ Γ) $\gamma < \alpha < \beta$ Δ) $\beta < \gamma < \alpha$ Δ

Μετατροπή των ριζών σε ρίζες της ίδιας τάξης και εφαρμογή της:

Αν $\alpha, \beta \geq 0$, τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha < \beta \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\alpha} < \sqrt[\nu]{\beta}$

$\alpha = \sqrt[6]{10}$, $\beta = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8}$, $\gamma = \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{9}$ $8 < 9 < 10 \Rightarrow \sqrt[6]{8} < \sqrt[6]{9} < \sqrt[6]{10}$

4. Ο αριθμός $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$ είναι ίσος με:

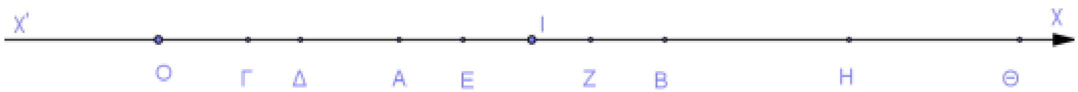
Α) $3 + 2\sqrt{5}$ Β) $3 + 2\sqrt[4]{5}$ Γ) $2 + \sqrt{5}$ Δ) $2 + \sqrt[4]{5}$ Γ

$\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} = \sqrt{4 + 5 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5}} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{5})^2 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5}} =$

$\sqrt{(2 + \sqrt{5})^2} = 2 + \sqrt{5}$

III. Στον παρακάτω άξονα τα σημεία *Ο, Ι, Α* και *Β* παριστάνουν τους αριθμούς *0, 1, α* και *β* αντιστοίχως, με $0 < \alpha < 1$ και $\beta > 1$, ενώ τα σημεία *Γ, Δ, Ε, Ζ, Η* και *Θ* παριστάνουν τους αριθμούς $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$, α^2, β^2 , α^3 , β^3 , όχι όμως με την σειρά που αναγράφονται.

Να αντιστοιχίσετε τα σημεία *Γ, Δ, Ε, Ζ, Η* και *Θ* με τους αριθμούς που παριστάνουν.



Γ	Δ	Ε	Ζ	Η	Θ
$α^3$	$α^2$	$\sqrt{α}$	$\sqrt{β}$	$β^2$	$β^3$

$3^ο$ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Ι.

1. Η εξίσωση $(α-1)x = α(α-1)$ έχει μοναδική λύση την $x = α$. ψ

   Απάντηση:

   Εάν $α-1 \neq 0 \Leftrightarrow α \neq 1$, $x = α$

   Εάν $α-1=0 \Leftrightarrow α=1$, $0x = 0$ Αόριστη

2. Η εξίσωση $(|x|+1)(|x|+2) = 0$ είναι αδύνατη. Α

   Απάντηση

   $\nexists\, x \in R : (|x|+1)\cdot(|x|+2) = 0$, γιατί $|x|+1$, $|x|+2 > 0 \ \forall\, x \in R$

3. Η εξίσωση $(|x|-1)(|x|-2) = 0$ έχει δύο πραγματικές ρίζες. ψ

   Απάντηση:

   $(|x|-1)\cdot(|x|-2) = 0 \Leftrightarrow (\ |x| = 1$ ή $|x| = 2) \Leftrightarrow (x = \pm 1$ ή $x = \pm 2\ )$

4. Η εξίσωση $(|x|-1)(|x|+2) = 0$ έχει δύο πραγματικές ρίζες. Α

   Απάντηση:

   $(|x|-1)(|x|+2) = 0 \Leftrightarrow (|x|-1 = 0$ ή $|x|+2 = 0) \Leftrightarrow$

   $(|x| = 1$ ή $|x| = -2) \Leftrightarrow (x = \pm 1$, $|x| = -2$ αδύνατη$)$

5. Η εξίσωση $|x| = x - 2$ έχει μοναδική λύση. ψ

   Απάντηση:

   $|x| \geq 0$, $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

   Για $x \geq 2$, $x = x-2 \Leftrightarrow 0 = -2$ αδύνατη

6. Η εξίσωση $|x| = 2 - x$ έχει μοναδική λύση. Α

   Απάντηση:

   $2-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$

   i) εάν $0 \leq x \leq 2$, $x = 2-x \Leftrightarrow x = 1$

   ii) εάν $x < 0$, $-x = 2-x \Leftrightarrow 0 = 2$ αδύνατη

7. Αν οι συντελεστές α και γ της εξίσωσης $αx^2+βx+γ = 0$ είναι ετερόσημοι, τότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες. Α

Απάντηση:

α, γ ετερόσημοι $\Leftrightarrow α\cdot γ < 0 \Leftrightarrow -4\, α\cdot γ > 0 \Rightarrow β^2 - 4\, α\cdot γ > 0 \Rightarrow$ 2 ρίζες πραγματικές και άνισες.

8. Αν δύο εξισώσεις 2ου βαθμού έχουν τις ίδιες ρίζες, τότε οι συντελεστές των ίσων δυνάμεων του x των εξισώσεων αυτών είναι ίσοι. ψ

Απάντηση:

Οι εξισώσεις $x^2-5x+6=0$, $2x^2-10x+12=0$ έχουν ίσες ρίζες ($ρ_1=2$, $ρ_2=3$) ενώ οι συντελεστές είναι διάφοροι μεταξύ τους.

Πρόταση: Αν δύο τριώνυμα έχουν συντελεστές ανάλογους έχουν ίσες ρίζες

9. Η εξίσωση $αx^2+2x-α = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. ψ

Απάντηση:

i) Αν $α =0$ τότε $x = 0$

ii) αν $α\neq 0$ $Δ = 2^2-4α(-α) = 4 + 4α^2 > 0$

10. Η εξίσωση $x^2-4αx+4α^2 = 0$, με $α\neq 0$, έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. ψ

Απάντηση:

$Δ = (-4α)^2-4\cdot 1\cdot 4α^2 = 16α^2-16α^2 = 0 \Rightarrow$ 1 διπλή

11. Η εξίσωση $α^2x^2-2αx+2 = 0$, με $α\neq 0$, δεν έχει πραγματικές ρίζες. Α

Απάντηση:

$Δ = (-2α)^2 - 4\cdot α^2\cdot 2 = -4α^2 < 0 \Rightarrow$ αδύνατη στο R

12. Η εξίσωση $2x^2+3αx+α^2 = 0$, δεν έχει πραγματικές ρίζες. ψ

Απάντηση:

$Δ = (3α)^2-4\cdot 2\cdot α^2 = α^2 \geq 0 \Rightarrow$ ρίζες πραγματικές

13. Η εξίσωση $x^2 - (α + \frac{1}{α})x +1 = 0$, με $α\neq 0,1,-1$ έχει δύο άνισες και αντίστροφες πραγματικές ρίζες. Α

Απάντηση:

$Δ = [-(α + \frac{1}{α})]^2-4\cdot 1\cdot 1 = α^2+ \frac{1}{α^2} +2 - 4 = (α - \frac{1}{α})^2 > 0$ και $ρ_1\cdot ρ_2 =1$

14. Οι εξισώσεις $\frac{x^2-3x+2}{x-1}=0$ και x^2-3x+2 = 0 έχουν τις ίδιες λύσεις. ψ

Απάντηση:

$\frac{x^2-3x+2}{x-1}=0$ (x -1 ≠ 0 ⇔ x ≠ 1) ⇒ x^2-3x +2 = 0 ⇒
x = 2 ή x = 1 απορρίπτεται. x^2-3x +2 = 0 ⇒ χ = 2 ή χ = 1. Άρα διαφορετικές

15. Οι εξισώσεις $\frac{2x^2+3x+1}{x^2-1}=5$ και $(2x^2+3x+1) = 5(x^2-1)$ έχουν τις ίδιες λύσεις. ψ

Απάντηση:

$\frac{2x^2+3x+1}{x^2-1}=5$ (x ≠ ±1) ⇒ x^2-x-2 = 0 ⇒ (x = 2 ή x = -1 απορρίπτεται).
$(2x^2+3x+1) = 5(x^2-1)$ ⇔ x^2-x-2 = 0 ⇒ x = 2 ή x = -1

16. Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x και y που να έχουν άθροισμα S=-10 και γινόμενο P=16. Α

Απάντηση:

Αν υπάρχουν , θα είναι λύσεις της εξίσωσης $\omega^2+10\omega+16 = 0 \Rightarrow \omega_1=-2$, $\omega_2 = -8$. Άρα S = -10 , P = 16

17. Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x και y που να έχουν άθροισμα S=10 και γινόμενο P=25. Α

Απάντηση:

Αν υπάρχουν , θα είναι λύσεις της εξίσωσης $\omega^2-10\omega+25 = 0$
$\Rightarrow \omega_1 = \omega_2 = 5$. Άρα S = 10, P = 25

18. Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x και y που να έχουν άθροισμα S=2 και γινόμενο P=2. ψ

Απάντηση:

Αν υπάρχουν , θα είναι λύσεις της εξίσωσης x^2-2x+2 = 0.
$\Delta = (-2)^2-4\cdot1\cdot2 = -4 < 0$ ⇒ Αδύνατη στο R. Άρα δεν υπάρχουν.

II. Να εντοπίσετε το λάθος στους παρακάτω συλλογισμούς:

1. Η εξίσωση $(2x-1)(x+2) = (3-2x)(x+2)$ γράφεται ισοδύναμα:
$(2x-1)(x+2) = (3-2x)(x+2) \Leftrightarrow 2x-1 = 3-2x \Leftrightarrow 4x = 4 \Leftrightarrow x = 1$.
Όμως και ο αριθμός $x = -2$ επαληθεύει τη δοθείσα εξίσωση.
Απάντηση:
Διαγραφή του παράγοντα $x+2$ ο οποίος μηδενίζεται για $x = 2$

2. Η εξίσωση $|2x-1| = x-2$ γράφεται ισοδύναμα:
$|2x-1| = x-2 \Leftrightarrow 2x-1 = x-2$ ή $2x-1 = 2-x \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 1$.
Όμως καμία από τις τιμές αυτές του x δεν επαληθεύει τη δοθείσα εξίσωση.
Απάντηση:
Τα αναγραφόμενα ισχύουν αν $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$. Για $x \geq 2$ οι λύσεις $x = -1$ και $x = 1$ απορρίπτονται.

4ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

I. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

1. Αν η ανίσωση $-x^2+2x+\gamma \geq 0$ είναι αδύνατη τότε: Γ
   Α) $\gamma > -1$ Β) $\gamma = -1$ Γ) $\gamma < -1$ Δ) $\gamma \geq -1$
   Απάντηση:
   Η $-x^2+2x+\gamma \geq 0$ είναι αδύνατη αν $\Delta < 0$ (δεδομένου ότι $\alpha = -1 < 0$) $\Rightarrow$ $2^2 - 4(-1)\gamma < 0 \Leftrightarrow 4 + 4\gamma < 0 \Leftrightarrow \gamma < -1$

2. Αν η ανίσωση $x^2-2x+\gamma > 0$ αληθεύει για κάθε $x \in R$, τότε: Γ
   Α) $\gamma < 1$ Β) $\gamma = 1$ Γ) $\gamma > 1$ Δ) $\gamma \leq 1$
   Απάντηση:
   Η ανίσωση $x^2-2x+\gamma > 0$ αληθεύει για κάθε $x \in R$ αν $\Delta < 0$ (δεδομένου ότι $\alpha = 1 > 0$) $\Rightarrow (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \gamma < 0 \Leftrightarrow 4 - 4\gamma < 0 \Leftrightarrow \gamma > 1$

3. Αν η ανίσωση $-2x^2 + 3\lambda x - \lambda^2 \leq 0$ αληθεύει για κάθε $x \in R$, τότε: Δ
   Α) $\lambda > 0$ Β) $\lambda < 0$ Γ) $\lambda = 1$ Δ) $\lambda = 0$
   Απάντηση: Η ανίσωση $-2x^2 + 3\lambda x - \lambda^2 \leq 0$ αληθεύει για κάθε $x \in R$ αν $\Delta \leq 0$ (δεδομένου ότι $\alpha = -2 < 0$) $\Rightarrow (3\lambda)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-\lambda^2) \leq 0 \Leftrightarrow$ $9\lambda^2 - 8\lambda^2 \leq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 \leq 0 \Rightarrow \lambda = 0$

4. Η εξίσωση $|x-1|+|x-5|=4$ αληθεύει αν και μόνο αν: Γ

A) $x<1$ B) $x>5$ Γ) $1\le x\le 5$ Δ) $1<x<5$

Απάντηση:

$|(x-1)+(x-5)|\le |x-1|+|x-5| \Rightarrow |2x-6|\le 4 \Leftrightarrow |x-3|\le 2 \Leftrightarrow -2\le x-3\le 2$
$\Leftrightarrow 1\le x\le 5$

5. Η εξίσωση $|x-1|=x-1$: Γ

A) Είναι αδύνατη B) Έχει μοναδική λύση τη $x=1$

Γ) Έχει άπειρες λύσεις Δ) Είναι ταυτότητα

Απάντηση:

Η σχέση $|x-1|=x-1$ ισχύει αν $x-1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 1$, για $x\ge 1$ η δοσμένη εξίσωση γίνεται $x-1=x-1$ η οποία έχει άπειρες λύσεις

II. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

1. Η ανίσωση $x^2+\lambda x+\lambda^2>0$, με $\lambda\ne 0$, αληθεύει για όλα τα $x\in R$. Α

Απάντηση: $\Delta=\lambda^2-4\lambda^2=-3\lambda^2<0$ (δεδομένου ότι $\alpha=1>0$)

2. Η ανίσωση $\lambda^2x^2+4\lambda x+5\le 0$, με $\lambda\ne 0$, αληθεύει για όλα τα $x\in R$. Ψ

Απάντηση: $\Delta=(4\lambda)^2-4\lambda^2\cdot 5=16\lambda^2-20\lambda^2=-4\lambda^2<0$ ($\alpha=\lambda^2>0$)

3. Οι ανισώσεις $x^2(x-1)\ge 0$ και $x-1\ge 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις. Ψ

Απάντηση: Οι λύσεις της $x^2(x-1)\ge 0$ είναι $x=0$ και $x\ge 1$, ενώ της $x-1\ge 1$ τα $x\ge 1$

4. Οι ανισώσεις $x^2(x-1)\le 0$ και $x-1\le 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις. Α

Απάντηση: Οι λύσεις της $x^2(x-1)\le 0$ και της $x-1\le 0$, είναι $x\le 1$

5. Οι ανισώσεις $\frac{2\chi-1}{\chi+1}>1$ και $2x-1>x+1$ έχουν τις ίδιες λύσεις. Ψ

Απάντηση: $\frac{2\chi-1}{\chi+1}>1 \Leftrightarrow \frac{2\chi-1}{\chi+1}-1>0 \Leftrightarrow \frac{\chi-2}{\chi+1}>0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1)>0$, $x\ne -1 \Leftrightarrow (-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$. $2x-1>x+1 \Leftrightarrow x>2$ ΕΚΤΟΣ

6. Οι ανισώσεις $\frac{\chi-1}{(\chi-2)^2} \geq 0$ και $x - 1 \geq 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις. Ψ

Απάντηση: $\frac{\chi-1}{(\chi-2)^2} \geq 0 \Leftrightarrow x - 1 \geq 0$ και $x \neq 2 \Leftrightarrow x\in[1, 2)\cup(2, +\infty)$.

$x- 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ ΕΚΤΟΣ

7. Οι ανισώσεις $\frac{\chi-1}{(\chi-2)^2} \geq 0$ και $(x - 1)(x - 2)^2 \geq 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις. Ψ

Απάντηση: $\frac{\chi-1}{(\chi-2)^2} \geq 0 \Leftrightarrow x - 1 \geq 0$ και $x \neq 2 \Leftrightarrow x\in[1, 2)\cup(2, +\infty)$.

$(x - 1)(x - 2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ και $x = 2 \Leftrightarrow x \geq 1$ ΕΚΤΟΣ

8. Οι ανισώσεις $\frac{\chi-2}{\chi-1} \geq 0$ και $(x - 2)(x - 1) \geq 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις.

Απάντηση: Ψ

$\frac{\chi-2}{\chi-1} \geq 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 1) \geq 0$ με $x \neq 1 \Leftrightarrow x\in(-\infty, 1)\cup[2, +\infty)$

$(x - 2)(x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty, 1]\cup[2, +\infty)$ ΕΚΤΟΣ

9. Οι ανισώσεις $\frac{\chi-2}{\chi-1} < 0$ και $(x - 2)(x - 1) < 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις.

Απάντηση: Α

$\frac{\chi-2}{\chi-1} < 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 1) < 0$ με $x \neq 1 \Leftrightarrow x\in(1, 2)$

$(x - 2)(x - 1) < 0 \Leftrightarrow x\in(1, 2)$ ΕΚΤΟΣ

10. Οι ανισώσεις $\frac{\chi+1}{\chi-1} < \frac{\chi+2}{\chi+1}$ και $(x+1)^2 < (x-1)(x+1)$ έχουν τις ίδιες λύσεις. Ψ

Απάντηση: $\frac{\chi+1}{\chi-1} < \frac{\chi+2}{\chi+1} \Leftrightarrow \frac{\chi+1}{\chi-1} - \frac{\chi+2}{\chi+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{\chi+3}{(\chi-1)(\chi+1)} < 0$ με

$\chi \neq \pm 1 \Leftrightarrow (\chi + 3)(\chi - 1)(\chi + 1) < 0 \Leftrightarrow \chi\in(-\infty, -3)\cup(-1, 1)$.

$(x+1)^2 < (x-1)(x+1) \Leftrightarrow (x+1)^2 - (x-1)(x+1) < 0 \Leftrightarrow (\chi+1)(\chi+1-\chi+1) < 0 \Leftrightarrow$

$2(\chi+1) < 0 \Leftrightarrow \chi < -1$ ΕΚΤΟΣ

III. Να αντιστοιχίσετε καθένα από τα τριώνυμα της Α' ομάδας με την ισοδύναμη μορφή του από τη Β' ομάδα.

Α' ΟΜΑΔΑ	
1	$-2x^2 + 6x - 4$
2	$x^2 - 3x + 2$
3	$-x^2 + 3x - 2$
4	$2x^2 - 6x + 4$

Β' ΟΜΑΔΑ	
Α	$(x-1)(x-2)$
Β	$-(x-1)(x-2)$
Γ	$2(x-1)(x-2)$
Δ	$-2(x-1)(x-2)$

Απάντηση:

Α' ΟΜΑΔΑ	1	2	3	4
Β' ΟΜΑΔΑ	Δ	Α	Β	Γ

IV. Να εντοπίσετε το λάθος στους παρακάτω συλλογισμούς:

1. Η ανίσωση $(2x-6)\cdot(x-1) > 0$ γράφεται ισοδύναμα:

$(2x-6)\cdot(x-1) > 0 \Leftrightarrow 2x-6 > 0$ και $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 3$ και $x > 1 \Leftrightarrow x > 3$.

Όμως ο αριθμός 0 , αν και είναι μικρότερος του 3 , επαληθεύει τη δοθείσα ανίσωση.

Απάντηση: $(2x-6)\cdot(x-1) > 0 \Leftrightarrow$ $2\chi-6$, $\chi-1$ Ομόσημοι.

i) $2x-6 > 0$ και $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 3$ και $x > 1 \Leftrightarrow x > 3$.

ii) $2x-6 < 0$ και $x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 3$ και $x < 1 \Leftrightarrow x < 1$. Οπότε $x < 1$ ή $x > 3$

2. Η ανίσωση $\chi < \frac{4}{\chi}$ γράφετε ισοδύναμα: $\chi < \frac{4}{\chi} \Leftrightarrow \chi^2 < 4 \Leftrightarrow$

$\chi^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < \chi < 2$

Όμως ο αριθμός -1 , αν και είναι μεταξύ του -2 και του 2 , δεν επαληθεύει τη δοθείσα ανίσωση.

Απάντηση: Πολλαπλασιάσαμε τα μέλη της $\chi < \frac{4}{\chi}$ με χ το πρόσημο του οποίου δεν γνωρίζουμε. Οπότε:

i) πολλαπλασιάζω με $\chi^2 > 0$ $(\chi \neq 0)$, $\chi^2 \cdot \chi < \frac{4}{\chi} \cdot \chi^2 \Leftrightarrow \chi^3 < 4\chi$ **ή**

ii) Διακρίνω περιπτώσεις για το χ πριν πολλαπλασιάσω

α) $\chi > 0$, β) $\chi < 0$

3. Η ανίσωση $(\chi+2)^2\cdot(\chi-1) \geq 0$ γράφεται ισοδύναμα:

$(\chi+2)^2\cdot(\chi-1) \geq 0 \Leftrightarrow \chi-1 \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq 1$

Όμως ο αριθμός -2 , αν και είναι μικρότερος του 1, επαληθεύει τη δοθείσα ανίσωση.

Απάντηση: Η πρώτη ισοδυναμία δεν ισχύει , αφού μπορεί $(\chi+2)^2=0$

$6^{ο}$ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

I.

1. Υπάρχει συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α(1,2) και Β(1,3). Ψ

Απάντηση: Όχι, γιατί για την ίδια τιμή του x (x=1) αντιστοιχούν δύο τιμές του y.

2. Οι ευθείες $y = \alpha^2x - 2$ και $y = -x + 1$ τέμνονται. Α

Απάντηση: Τέμνονται γιατί η εξίσωση $\alpha^2x - 2 = - x + 1$ έχει λύση για κάθε $\alpha \in R$.

3. Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, τότε η $-f$ είναι γνησίως φθίνουσα. ΕΚΤΟΣ

Α Απάντηση: f γνησίως αύξουσα άρα για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow - f(x_1) > - f(x_2) \Rightarrow - f$ γνησίως φθίνουσα.

4. Μια γνησίως μονότονη συνάρτηση έχει το πολύ μία ρίζα. ΕΚΤΟΣ Α

Απάντηση: Έστω ότι έχει δύο ρίζες. Αν x_1, x_2 (με $x_1 \neq x_2$) οι ρίζες της συνάρτησης τότε $f(x_1)=f(x_2)$. Έστω ότι f είναι γνησίως αύξουσα τότε $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ άτοπο. Ομοίως αν f γνησίως φθίνουσα.

5. Υπάρχει γνησίως μονότονη συνάρτηση που διέρχεται από τα σημεία Α(1,2) , Β(2,1) και Γ(3,3). ΕΚΤΟΣ Ψ

Απάντηση: Έστω f γνησίως αύξουσα. $1 < 2 < 3 \Rightarrow f(1) < f(2) < f(3) \Leftrightarrow 2 < 1 < 3$ άτοπο.

6. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και έχει ρίζα τον αριθμό 1 , τότε θα ισχύει $f(0) < 0$. ΕΚΤΟΣ Ψ

Απάντηση: $0 < 1 \Rightarrow f(0) > f(1)$ (1) , $f(1)=0$ (2) από (1), (2) $\Rightarrow f(0) > 0$ άτοπο

7. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α(1,2) και Β(2,5) , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα. ΕΚΤΟΣ Α

Απάντηση: $1 < 2$ (1) , $f(1) = 2 < f(2) = 5$ (2). Από (1), (2) και δεδομένου ότι η f είναι γνησίως μονότονη $\Rightarrow$ f γνησίως αύξουσα.

8. Αν η μέγιστη τιμή μιας συνάρτησης f είναι ίση με 1, τότε η εξίσωση $f(x) = 2$ είναι αδύνατη. ΕΚΤΟΣ Α

Απάντηση: $f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in A$, άρα η $f(x) = 2$ αδύνατη.

9. Η συνάρτηση $f : [-1,2] \to R$ με $f(x) = 3x^2$ είναι άρτια. ΕΚΤΟΣ Ψ

Απάντηση: για κάθε $x \in [-1,2] \not\Rightarrow -x \in [-1,2]$ άρα η f δεν είναι άρτια.

10. Αν μία συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή και έχει ρίζα τον αριθμό ρ, τότε θα έχει ρίζα και τον αριθμό $-\rho$. ΕΚΤΟΣ Α

Απάντηση: Έστω f άρτια, $f(\rho) = f(-\rho)$ (1), $f(\rho) = 0$ (2). Από (1),(2) $\Rightarrow$ $f(-\rho) = 0 \Leftrightarrow -\rho$ ρίζα. ΕΚΤΟΣ

11. Αν μία συνάρτηση f είναι άρτια, τότε η f δεν είναι γνησίως μονότονη. ΕΚΤΟΣ Α

Απάντηση: f άρτια $\Leftrightarrow$ για κάθε $x \in A$, $-x \in A$ και $f(x) = f(-x)$.
Αν $-x < x \not\Rightarrow f(-x) < f(x)$ ή $f(-x) > f(x)$ άρα η f δεν είναι γνησίως μονότονη.
Ομοίως αν $-x > x$.

12. Αν μια συνάρτηση f είναι άρτια, τότε η $-f$ είναι περιττή. ΕΚΤΟΣ Ψ

Απάντηση: $(-f)(-x) = -f(-x) = -f(x)$

II. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση για την παρακάτω συνάρτηση f.

Η συνάρτηση f, της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\phi(x) = 3x^4$, μιας οριζόντιας κατά 1 μονάδα προς τα αριστερά και μιας κατακόρυφης κατά 2 μονάδες προς τα πάνω, έχει τύπο: ΕΚΤΟΣ

Α) $f(x) = 3(x-1)^4 + 2$ Β) $f(x) = 3(x-1)^4 – 2$

Γ) $f(x) = 3(x+1)^4 + 2$ Δ) $f(x) = 3(x+1)^4 – 2$

7ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Ι.

1. Αν η παραβολή $y = αx^2$, $α≠0$ διέρχεται από το σημείο Α(1,2) , τότε βρίσκεται στο 3ο και 4ο τεταρτημόριο. Ψ

Απάντηση:

Οι συντεταγμένες του σημείου Α είναι θετικές. Αυτό συμβαίνει στο 1ο τεταρτημόριο, άρα η γραφική παράσταση βρίσκεται στο 1ο και 3ο τεταρτημόριο.

2. Αν το τριώνυμο $f(x) = αx^2+βx+γ$, $α≠0$ έχει ρίζες τους αριθμούς $x_1=-1$ και $x_2=3$, τότε έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=1$. Α

Απάντηση:

$x_1+x_2 = -1+3 \Leftrightarrow x_1+x_2 = 2$ (1), $x_1+x_2=-\frac{β}{α}$ (2) από (1), (2) $\Rightarrow -\frac{β}{α} = 2 \Leftrightarrow -\frac{β}{2α} = 1 \Rightarrow x = 1$ άξονας συμμετρίας.

3. Για οποιουσδήποτε $α, β \in \mathbb{R}^*$ η παραβολή $y = αx^2$ και η υπερβολή $y = \frac{β}{χ}$ έχουν ένα και μοναδικό κοινό σημείο. Α

Απάντηση: Θα πρέπει το σύστημα των $y = αx^2$ (1) , $y = \frac{β}{χ}$ (2) να έχει μοναδική λύση. Από (1), (2) $\Rightarrow αx^2 = \frac{β}{χ} \Rightarrow αx^3 = β$ $(x \neq 0) \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{β}{α}}$

για $x = \sqrt[3]{\frac{β}{α}}$ από (1) $\Rightarrow y =α\cdot \left(\sqrt[3]{\frac{β}{α}}\right)^2$.

4. Η υπερβολή $y = \frac{1}{x}$ και η ευθεία $y = -x$ τέμνονται. Ψ

Απάντηση: Για να τέμνονται θα πρέπει το σύστημα των $y = \frac{1}{x}$ (1) , $y = -x$ (2) να έχει λύση. Από (1) , (2) $\Rightarrow \frac{1}{x} = -x \Rightarrow x^2 = -1$ αδύνατη, άρα δεν τέμνονται.

II. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω δύο περιπτώσεις με τα σύμβολα της ισότητας ή της ανισότητας.

1. Αν το τριώνυμο $f(x) = 2x^2 + βx + γ$ έχει ρίζες τους αριθμούς $x_1 = -1$ και $x_2 = 3$, τότε θα ισχύει:

f(-5)…0 , f(1)…0 , f(5)…0 , γ…0 , β…-4

Απάντηση:

$f(-5) > 0$, $f(1) < 0$, $f(5) > 0$, $γ < 0$, $β = -4$

$α = 2 > 0$ και $Δ > 0$ (αφού έχει πραγματικές ρίζες)

Πρόσημο του τριωνύμου: $-\infty\ldots\overset{+}{\ldots}\ldots -1 \ldots\overset{-}{\ldots}\ldots 3 \ldots\overset{+}{\ldots}\ldots +\infty$

-5, +5 εκτός των ριζών άρα $f(-5) > 0$, $f(5) > 0$

1 εντός των ριζών άρα $f(1) < 0$

Ένα τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες αν α , γ ετερόσημα, $α = 2 > 0$, άρα $γ < 0$. $x_1+x_2 = 2 \Rightarrow -\frac{β}{2} = 2 \Leftrightarrow β = -4$

2. Αν το τριώνυμο $f(x) = -x^2+βx+γ$ έχει ρίζες τους αριθμούς $x_1 = -3$ και $x_2 = 1$, θα ισχύει:

f(-5)….0 , f(-2)….0 , f(5)….0 , γ…..0 , β….-2

Απάντηση:

$f(-5) < 0$, $f(-2) > 0$, $f(5) < 0$, $γ > 0$, $β = -2$

$α = -1 < 0$ και $Δ > 0$ (αφού έχει πραγματικές ρίζες)

Πρόσημο του τριωνύμου: $-\infty\ldots\overset{-}{\ldots}\ldots -3 \ldots\overset{+}{\ldots}\ldots 1 \ldots\overset{-}{\ldots}\ldots +\infty$

-5, +5 εκτός των ριζών άρα $f(-5) < 0$, $f(5) < 0$

-2 εντός των ριζών άρα $f(-2) > 0$

Ένα τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες αν α , γ ετερόσημα, $α = -1 < 0$, άρα $γ > 0$. $x_1+x_2 = -2 \Rightarrow -\frac{β}{-1} = -2 \Leftrightarrow β = -2$

III. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = αx^2+βx+γ$, $α \neq 0$. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

1. Αν $α = 2$ και το τριώνυμο f έχει κορυφή το σημείο Κ(1,-3) , τότε

Α) $f(x) = 2(x-1)^2 + 3$ Β) $f(x) = 2(x-1)^2 - 3$

Γ) $f(x) = 2(x+1)^2 + 3$ Δ) $f(x) = 2(x+1)^2 - 3$

Απάντηση:

Από τον μετασχηματισμό του τριωνύμου γνωρίζουμε ότι :

$f(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma = \alpha(x + \frac{\beta}{2\alpha})^2 - \frac{\Delta}{4\alpha}$ Κορυφή: $K(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha})$

Στη προκειμένη περίπτωση $K(1,-3)$ άρα $-\frac{\beta}{2\alpha} = 1 \Leftrightarrow \frac{\beta}{2\alpha} = -1$ και $-\frac{\Delta}{4\alpha} = -3$. Σωστή απάντηση η Β

2. Αν $f(1) < 0$, $f(3) > 0$ και $f(5) < 0$, τότε

Α) $\Delta = 0$ και $\alpha > 0$ Β) $\Delta > 0$ και $\alpha > 0$ Γ) $\Delta > 0$ και $\alpha < 0$

Απάντηση:

$1 < 3 < 5$ και $f(3)$ ετερόσημο των $f(1)$, $f(5)$ άρα το 3 βρίσκεται εντός των ριζών και τα 1 , 5 εκτός των ριζών οπότε $\Delta > 0$ και $\alpha < 0$.

3. Αν το τριώνυμο έχει κορυφή το σημείο $K(1,2)$ και $\alpha > 0$, τότε:

Α) $\Delta > 0$ Β) $\Delta = 0$ Γ) $\Delta < 0$ Δ) $\gamma < 0$

Απάντηση: $-\frac{\Delta}{4\alpha} = 2 \Rightarrow -\frac{\Delta}{4\alpha} > 0 \Rightarrow -\Delta > 0$ $(\alpha > 0) \Rightarrow \Delta < 0$

4. Αν το τριώνυμο έχει κορυφή το σημείο $K(1,0)$, τότε:

Α) $\beta = 0$ Β) $\Delta < 0$ Γ) $\Delta > 0$ Δ) $\Delta = 0$

Απάντηση:

$-\frac{\Delta}{4\alpha} = 0 \Rightarrow \Delta = 0$ $(-\frac{\beta}{2\alpha} = 1 \Rightarrow \alpha \neq 0)$

IV. Οι παρακάτω καμπύλες C_1, C_2, C_3 και C_4 είναι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f_1(x) = x^2-4x+\gamma_1$, $f_2(x) = 2x^2-8x+\gamma_2$, $f_3(x) = -x^2-4x+\gamma_3$, $f_4(x) = -2x^2-8x+\gamma_4$, όχι όμως με την ίδια σειρά. Να αντιστοιχίσετε καθεμιά από τις παραπάνω συναρτήσεις με τη γραφική της παράσταση. (Βλέπε σχήμα στο βιβλίο)

Απάντηση:

Οι καμπύλες C_1 και C_3 είναι ανοικτές προς τα κάτω άρα αντιστοιχούν στις συναρτήσεις f_3 και f_4 ($\alpha_3=-1$, $\alpha_4 = -2 < 0$ αντίστοιχα) και συγκεκριμένα η C_1 στην f_3 και η C_3 στην f_4 ($|-1|<|-2|$). Οι καμπύλες C_2 και C_4 είναι ανοικτές προς τα πάνω άρα αντιστοιχούν στις συναρτήσεις f_1 και f_2 ($\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2 > 0$ αντίστοιχα) και συγκεκριμένα η C_2 στην f_1 και η C_4 στην f_2 ($1<2$).

f_1	f_2	f_3	f_4
C_2	C_4	C_1	C_3