ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ – Β ΛΥΚΕΙΟΥ

1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

I. Να αντιστοιχίσετε καθένα από τα συστήματα:

(Σ_1): $\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+4y=0 \end{cases}$, (Σ_2): $\begin{cases} x+y=1 \\ x+2y=4 \end{cases}$, (Σ_3): $\begin{cases} 2x+4y=2 \\ x+2y=1 \end{cases}$, (Σ_4): $\begin{cases} x-y=1 \\ x+\alpha^2 y=1 \end{cases}$

με εκείνη από τις απαντήσεις Α, Β, Γ που νομίζετε ότι είναι η σωστή.
Α) Έχει μοναδική λύση, **Β)** Είναι αδύνατο, **Γ)** Έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

(Σ_1)	(Σ_2)	(Σ_3)	(Σ_4)
Β	Α	Γ	Α

(Σ_1): $\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+4y=0 \end{cases}$, $\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=1 \\ x+2y=0 \end{cases}$ και D = 0, Αδύνατο

(Σ_2): $\begin{cases} x+y=1 \\ x+2y=4 \end{cases}$, D = 1 ≠ 0, Έχει μοναδική λύση

(Σ_3): $\begin{cases} 2x+4y=2 \\ x+2y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=1 \\ x+2y=1 \end{cases}$ και D = 0, Έχει άπειρο πλήθος λύσεων

(Σ_4): $\begin{cases} x-y=1 \\ x+\alpha^2 y=1 \end{cases}$ $D = \alpha^2+1 \neq 0$ για κάθε $\alpha \in R$, Έχει μοναδική λύση

II. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

1. Αν ένα γραμμικό σύστημα έχει δύο διαφορετικές λύσεις, τότε θα έχει άπειρο πλήθος λύσεων. Α Ψ
2. Αν σε ένα γραμμικό σύστημα είναι D=0, τότε το σύστημα είναι κατ' ανάγκη αδύνατο. Α Ψ
3. Το σύστημα $\begin{cases} xy=1 \\ x+y=0 \end{cases}$ είναι αδύνατο Α Ψ

4. Ο κύκλος $x^2 + y^2 = 1$ και η παραβολή $y = x^2 + 1$ δεν έχουν κοινά σημεία. Α Ψ

Απάντηση: 1. Α, Αν δύο ευθείες έχουν δύο κοινά σημεία ταυτίζονται, άρα άπειρα κοινά σημεία. Κατά συνέπεια το αντίστοιχο αλγεβρικό σύστημα άπειρες λύσεις.
2. Ψ, παράδειγμα: Το σύστημα $Σ_3$, ερωτήματος Ι,
3. Α, για $x = -y$ η $xy = 1$ γίνεται $-y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = -1$ αδύνατη, άρα και το σύστημα αδύνατο
4. Ψ, για $y = x^2 + 1$ η γίνεται $x^2 + x^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow 2x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ οπότε $ψ = 1$, κοινό σημείο (0,1).

2ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Ι) Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

1. Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, τότε η –f είναι γνησίως φθίνουσα. Α Ψ

Απάντηση: f γνησίως αύξουσα στο Δ $\Leftrightarrow$ για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in Δ$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow -f(x_1) > -f(x_2) \Rightarrow -f$ γνησίως φθίνουσα.

2. Μια γνησίως μονότονη συνάρτηση έχει το πολύ μια ρίζα Α Ψ

Απάντηση: Έστω ότι η f έχει δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)=0 (1)$ και είναι γνησίως αύξουσα $\Leftrightarrow (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \overset{(1)}{\Rightarrow} 0 < 0)$, άτοπο. Ομοίως αν f είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα κάθε γνήσια μονότονη συνάρτηση έχει μία το πολύ ρίζα.

3. Υπάρχει γνησίως μονότονη συνάρτηση που διέρχεται από τα σημεία Α(1,2) , Β(2,1) και Γ(3,3) (1). Α Ψ

Απάντηση: Έστω f γνησίως αύξουσα και διέρχεται από τα σημεία Α, Β, Γ $1 < 2 < 3 \xRightarrow{f\ γν.αυξ.} f(1) < f(2) < f(3) \overset{(1)}{\Rightarrow} 2 < 1 < 3$, άτοπο. Ομοίως αν f γνησίως φθίνουσα. Άρα δεν υπάρχει γνησίως μονότονη συνάρτηση η οποία να διέρχεται από τα Α, Β, Γ.

4. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και έχει ρίζα τον αριθμό 1, τότε θα ισχύει f(0) < 0 Α **Ψ**

Απάντηση: 1 ρίζα της f ⇔ f(1) = 0 (1), $0 < 1 \xrightarrow{f\ γν.φθιν.} f(0) > f(1) \overset{(1)}{\Rightarrow} f(0) > 0$

5. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α(1,2) και Β(2,5) , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα. **Α** Ψ

Απάντηση: Αφού η f διέρχεται από τα σημεία Α, Β ⇔

f(1) = 2 και f(2) = 5 (1), 1 < 2 και $2 < 5 \overset{(1)}{\Rightarrow}$ f(1) < f(2) και δεδομένου ότι η f είναι γνήσια μονότονη συνεπάγεται ότι f είναι γνήσια αύξουσα.

6. Αν η μέγιστη τιμή μιας συνάρτησης f είναι ίση με 1, τότε η εξίσωση f(x) = 2 (1) είναι αδύνατη. **Α** Ψ

Απάντηση: Αφού η συνάρτηση f έχει μέγιστο, αυτό σημαίνει ότι για κάθε x∈A υπάρχει x_o∈A : f(x) ≤ f(x_o) (2), f(x_o) = 1 (3).

Από (2),(3) ⇒ f(x) ≤ 1 (4). Από (1),(4) ⇒ 2 ≤ 1 άτοπο. Άρα η (1) αδύνατη.

7. Η συνάρτηση f: [-1,2] → R με f(x) = $3x^2$ είναι άρτια Α **Ψ**

Απάντηση: Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης δεν είναι συμμετρικό ως προς το 0.

8. Αν μια συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή και έχει ρίζα τον αριθμό ρ, τότε θα έχει ρίζα και τον αριθμό –ρ. **Α** Ψ

Απάντηση: Αν η συνάρτηση f είναι άρτια ⇔ για κάθε x∈A, -x∈A και f(-x) = f(x) (1). Για x=ρ $\overset{(1)}{\Rightarrow}$ f(ρ) = f(-ρ) (2). ρ ρίζα της f ⇔ f(ρ) = 0 (3). Από (2), (3) ⇒ f(-ρ) = 0.

9. Αν μία συνάρτηση f είναι άρτια,
τότε δεν είναι γνησίως μονότονη **Α** Ψ

Απάντηση: f άρτια ⇔ για κάθε x∈A, -x∈A και f(-x) = f(x) (1). Έστω x > 0 ⇒ -x < x $\overset{(1)}{\Rightarrow}$ f(-x) = f(x) και όχι f(-x) < f(x) ή f(-x) > f(x). Άρα η f δεν είναι γνησίως μονότονη. Όμοια αν –x > 0.

10. Αν μία συνάρτηση f είναι άρτια, τότε η –f είναι περιττή. Α **Ψ**

Απάντηση: f άρτια ⇔ για κάθε x∈A, -x∈A και f(-x) = f(x) ⇔ -f(-x) = -f(x) ⇔ (-f)(-x) = (-f)(x) ⇒ -f άρτια (και όχι περιττή).

II) **Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση για την παρακάτω συνάρτηση f.**
Η συνάρτηση f, της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\phi(x) = 3x^4$, μιας οριζόντιας κατά 1 μονάδα προς τα αριστερά και μιας κατακόρυφης κατά 2 μονάδες προς τα πάνω, έχει τύπο:

A) $f(x) = 3(x-1)^4 + 2$ B) $f(x) = 3(x-1)^4 – 2$

Γ) $f(x) = 3(x+1)^4 + 2$ Δ) $f(x) = 3(x+1)^4 – 2$

Απάντηση: Η συνάρτηση που προκύπτει με μετατόπιση της $\phi(x) = 3x^4$ κατά 1 μονάδα αριστερά έχει τύπο $\phi_1(x) = 3(x+1)^4$. Η συνάρτηση που προκύπτει με μετατόπιση της $\phi_1(x) = 3(x+1)^4$ κατά 2 μονάδες προς τα πάνω έχει τύπο $f(x) = 3(x+1)^4 + 2$

3^o ΚΕΦΑΛΑΙΟ

I) **Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής.**

1. Αν ημω = 1, τότε υποχρεωτικά θα είναι συνω = 0 Α Ψ

Απάντηση: Αν ημω = 1 $\Rightarrow \widehat{\omega} = 360^o \cdot k+90^o$, $k \in Z \Rightarrow$ συνω = 0

2. Αν συνω = 0 , τότε υποχρεωτικά θα είναι ημω = 1 Α Ψ

Απάντηση: Αν συνω = 0 τότε ημω = 1 ή ημω = -1

3. Υπάρχει γωνία ω με ημω + συνω = 2 Α Ψ

Απάντηση: Η μέγιστη τιμή του ημω είναι ίση με 1. Αυτό συμβαίνει όταν $\widehat{\omega} = 360^o \cdot k+90^o$, $k \in Z$. Στην αντίστοιχη θέση συνω = 0. Άρα δεν υπάρχει γωνία ω τέτοια ώστε ημω + συνω = 2

4. Για κάθε γωνία ω ισχύει ημω = $\sqrt{1 - \text{συν}^2\omega}$ Α Ψ

Απάντηση: Αν $360^o \cdot k+180^o < \widehat{\omega} < 360^o \cdot k+360^o$ (η γωνία περατώνεται εντός του $3^{ου}$ ή $4^{ου}$ τεταρτημορίου) ημω = - $\sqrt{1 - \text{συν}^2\omega}$

5. $\text{ημ}^2 20^o + \text{ημ}^2 70^o = 1$ Α Ψ

Απάντηση: $\text{ημ}^2 20^o + \text{ημ}^2(90^o - 20^o) = \text{ημ}^2 20^o + \text{συν}^2 20^o = 1$

6. Για κάθε x∈R ισχύει ημ(x – π) = - ημx   Α   Ψ

Απάντηση: ημ(x – π) = ημ[-(π – x)] = -ημ(π – x) = - ημx

7. Για κάθε x∈R ισχύει $ημ^2x = ημx^2$ Α   Ψ

Απάντηση: $ημ^2x$ = ημx·ημx ενώ $ημx^2$ = ημ(x·x)

8. Αν συν$\left(x - \frac{π}{2}\right)$ + ημx = 0 , τότε ημx = 0   Α   Ψ

Απάντηση: συν$\left(x - \frac{π}{2}\right)$ + ημx = 0 ⇔ συν$\left[-\left(\frac{π}{2} - x\right)\right]$+ ημx = 0 ⇔

συν$\left(\frac{π}{2} - x\right)$ + ημx = 0 ⇔ ημx + ημx = 0 ⇔ 2·ημx = 0 ⇔ ημx = 0

9. Για κάθε x∈R ισχύει συν$\left(x - \frac{π}{6}\right)$ – ημ$\left(\frac{π}{3} + x\right)$ = 0   Α   Ψ

Απάντηση: συν$\left(x - \frac{π}{6}\right)$ – ημ$\left(\frac{π}{3} + x\right)$ = συν$\left(x - \frac{π}{6}\right)$ – συν$\left[\frac{π}{2} - \left(\frac{π}{3} + x\right)\right]$ =

συν$\left(x - \frac{π}{6}\right)$ – συν$\left(\frac{π}{2} - \frac{π}{3} - x\right)$ = συν$\left(x - \frac{π}{6}\right)$ – συν$\left(\frac{π}{6} - x\right)$ =

συν$\left(x - \frac{π}{6}\right)$ – συν$\left[-\left(x - \frac{π}{6}\right)\right]$ = συν$\left(x - \frac{π}{6}\right)$ – συν$\left(x - \frac{π}{6}\right)$ = 0

II. Να αντιστοιχίσετε καθένα από τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της Α΄ ομάδας με τον ίσο του από τη Β΄ ομάδα.

Α΄ ΟΜΑΔΑ	
1	$ημ120^o$
2	$συν150^o$
3	$ημ210^o$
4	$συν300^o$
5	$εφ210^o$
6	$σφ300^o$
7	$εφ300^o$
8	$σφ210^o$

Β΄ ΟΜΑΔΑ	
Α	$-\sqrt{3}$
Β	$-\sqrt{3}/2$
Γ	$-\sqrt{3}/3$
Δ	-1/2
Ε	1/2
Ζ	$\sqrt{3}/3$
Η	$\sqrt{3}/2$
Θ	$\sqrt{3}$

1	2	3	4	5	6	7	8
Η	Β	Δ	Ε	Ζ	Γ	Α	Θ

$ημ120^o = ημ(180^o – 60^o) = ημ60^o = \sqrt{3}/2$

$συν150^o = συν(180^o – 30^o) = - συν30^o = - \sqrt{3}/2$

$ημ210^o = ημ(180^o + 30^o) = - ημ30^o = - ½$

$συν300^o = συν(360^o – 60^o) = συν(-60^o) = συν60^o = ½$

$εφ210^o = εφ(180^o + 30^o) = εφ30^o = \sqrt{3}/3$

$σφ300^o = σφ(360^o – 60^o) = σφ(-60^o) = - σφ60^o = - \sqrt{3}/3$

$εφ300^o = εφ(360^o – 60^o) = εφ(-60^o) = - εφ60^o = - \sqrt{3}$

$σφ210^o = σφ(180^o + 30^o) = σφ30^o = \sqrt{3}$

III. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

1. Αν ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο ($Α = 90^o$) και όχι ισοσκελές, τότε:
Α) $ημ^2Β + ημ^2Γ = 1$, Β) $ημ^2Β + συν^2Γ = 1$, Γ) $εφΒ = 1$.
Απάντηση: $ημ^2Β + ημ^2Γ = ημ^2(90^o – Γ) + ημ^2Γ = συν^2Γ + ημ^2Γ = 1$

2. Αν ένα τρίγωνο ΑΒΓ δεν είναι ορθογώνιο τότε:
Α) $συν(Β + Γ) = συνΑ$, Β) $ημ(Β + Γ) = ημΑ$, Γ) $εφ(Β + Γ) = εφΑ$
Απάντηση: $Α + Β + Γ = 180^o \Leftrightarrow Β + Γ = 180^o – Α \Rightarrow ημ(Β + Γ) = ημ(180^o – Α) = ημΑ$

3. Αν ένα τρίγωνο ΑΒΓ δεν είναι ορθογώνιο τότε:

Α) $συν\left(\frac{Β+Γ}{2}\right) = ημ\frac{Α}{2}$, Β) $συν\left(\frac{Β+Γ}{2}\right) = συν\frac{Α}{2}$, Γ) $εφ\left(\frac{Β+Γ}{2}\right) = εφ\frac{Α}{2}$

Απάντηση: $\frac{Β+Γ}{2} = 90^o - \frac{Α}{2} \Rightarrow συν\left(\frac{Β+Γ}{2}\right) = συν\left(90^o - \frac{Α}{2}\right) = ημ\frac{Α}{2}$