ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Έστω συγκεκριμένος πραγματικός αριθμός χ και η οικογένεια των μιγαδικών : $z_\nu=(\nu+2)\chi^2+(\nu+1)\chi+\nu+i\ln[\nu\chi^2+(\nu+1)\chi+(\nu+2)]$, $\nu\in N^*$
Να αποδείξετε ότι, ανεξάρτητα από την τιμή του πραγματικού χ και για κάθε τιμή του $\nu\in N^*$, οι μιγαδικοί αυτοί:
i. Είναι καλά ορισμένοι. ii. Είναι όλοι διάφοροι του 0.
iii. Κανείς από αυτούς δεν είναι πραγματικός ούτε φανταστικός.
iv. Είναι όλοι διαφορετικοί μεταξύ τους.

Απάντηση: i. ii. iii. $\nu\chi^2+(\nu+1)\chi+(\nu+2)>0$, $(\nu+2)\chi^2+(\nu+1)\chi+\nu>0$ για κάθε $\nu\in N^*$
iv. Έστω ότι υπάρχουν $\nu_1, \nu_2\in N^*$ $(\nu_1\neq\nu_2)$: $z_{\nu_1} = z_{\nu_2}$ ....άτοπο

2. Δίνεται ο μιγαδικός $z = (\alpha^2+1+\mu^2-2\alpha) -(1-\alpha)\mu i$.
Υπάρχουν τιμές των πραγματικών α, κ για τις οποίες είναι $z > 0$;

Απάντηση: Είναι $z > 0$ για ($\alpha=1$ και $\mu\neq0$) ή ($\alpha\neq1$ και $\mu=0$)

Παρατήρηση: Στους μιγαδικούς αριθμούς δεν ορίζεται διάταξη.
Η απαίτηση $z = \gamma+\delta i > 0$ με $\gamma, \delta\in R$ δεν έχει νόημα, εκτός αν $\delta=0$ και $\gamma>0$

3. Να αποδείξετε ότι κάθε μιγαδικός $z=\alpha+\beta i$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $z_1=7+5i$, $z_2=4+3i$.

Πρόταση: Αρκεί να δειχθεί ότι υπάρχουν μοναδικοί $\mu, \nu\in R$ τέτοιοι ώστε να ισχύει $z=\mu z_1+\nu z_2$

4. Να λύσετε στο σύνολο Z των ακεραίων την εξίσωση:

$$3^{2(x+1)} + 9(-1{,}5+1{,}5\sqrt{3}\cdot i)^{3x} - 810\cdot3^x = 0$$

Απάντηση: $x = 2$

5. Να αποδείξετε ότι για κάθε z, w ∈ C ισχύει:

$|z+2w|+|5z-3w|+|3z+4w| \leq 9(|z|+|w|)$

Πρόταση: $|z+2w| \leq |z|+2|w|$, $|5z-3w| \leq 5|z|+3|z|$, $|3z+4z| \leq 3|z|+4|w|$

6. Να αποδείξετε ότι για κάθε z, w ∈ C ισχύει:

$|z+2w|+|2z+w|+|3z+2w| \leq 5|z+w|+2|w|+z|$

Πρόταση: $|z+2w| \leq |z+w|+|w|$, $|2z+w| \leq |z+w|+|z|$,
$|3z+2w|=|3(z+w)-w| \leq 3|z+w|+|w|$

7. Να αποδείξετε ότι για κάθε z, w, u ∈ C ισχύει:

$|z+1|+|z+w|+|w+u|+|u| \geq 1$

Πρόταση: $|z+1|+|z+w|+|w+u|+|u| \geq |(z+1)-(z+w)|+|(w+u)-u| =$
$|z+1-z-w|+|w+u-u| \geq |1-w+w|=1$

8. Έστω η συνάρτηση $f(z) = \dfrac{2zi-1}{z-2i}$ με $z \in C$ και $z \neq 2i$

α. Να βρείτε τον μιγαδικό z_1, αν ισχύει $f(z_1)=i$ και να υπολογίσετε τον αριθμό z_1^{2014} Απ. -3^{2014}

β. Να αποδείξετε ότι $f(f(z))=z$

γ. Αν $f(z)=f(\bar{z})$, να αποδείξετε ότι ο z είναι πραγματικός αριθμός

δ. Αν $|f(z)|=3$, αποδείξετε ότι $|z|^2 = 8Im(z)-7$

9. Αν $z=\alpha+\beta i$ με $\alpha, \beta \in R$ τότε $\sqrt{z} = \pm\dfrac{z+|z|}{\sqrt{2(\alpha+|z|}}$ (1)

Απόδειξη:

Έχουμε: $(z+|z|)^2 = z^2+|z|^2+2z|z| \Rightarrow (z+|z|)^2 = z^2+z\bar{z}+2z|z| \Rightarrow (z+|z|)^2 = z(z+\bar{z})+2z|z| \Rightarrow (z+|z|)^2 = 2\alpha z+2z|z| \Rightarrow (z+|z|)^2 = 2z(\alpha+|z|) \Rightarrow$
$z+|z| = \pm\sqrt{2z(\alpha+|z|)} \Rightarrow z+|z| = \pm\sqrt{z}\cdot\sqrt{2(\alpha+|z|)} \Rightarrow$

$$\sqrt{z} = \pm\frac{z+|z|}{\sqrt{2(\alpha+|z|)}}$$

Παρατήρηση: η τετραγωνική ρίζα μιγαδικού δίνεται και από τον τύπο (1)

10. Αν $\frac{\alpha i}{2} = \frac{\beta i}{3} = \frac{\gamma i}{4}$ με α, β, γ ∈C δείξτε ότι : $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \frac{81\alpha^2}{4}$

11. Να υπολογιστεί η παράσταση: $A = \sum_{\nu=1}^{\nu} i^{3\nu} + \sum_{\nu=1}^{\nu} i^{\nu}$

Απάντηση: α) ν=4κ, κ∈N, A = 0, β) ν=4κ+1, A = 0, γ) ν=4κ+2, A = 2, δ) ν=4κ+3, A = -2

12. α) Αν z_1, z_2 ∈C τότε $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2 = 2|z_1|^2+|z_2|^2$ (1)
(κανόνας του παραλληλογράμμου ή διάμεσος των μιγαδικών z_1 , z_2)
β) Αν z_1, z_2 ∈C δείξτε ότι:
$|z_1+\sqrt{z_1^2 - z_2^2}| + |z_1 - \sqrt{z_1^2 - z_2^2}| = |z_1+z_2|+|z_1-z_2|$

Πρόταση: β) χρησιμοποιήσατε την (1) για τους μιγαδικούς $\sqrt{z_1 + z_2}$, $\sqrt{z_1 - z_2}$

13. Να λυθεί η εξίσωση: $z^3-4z^2+9z-10 = 0$ αν έχει ρίζα τον $z_1=1+2i$

Απάντηση: $z_2=1-2i$, $(z-z_1)\cdot(z-z_2)=z^2-2z+5$, $z^3-4z^2+9z-10=(z^2-2z+5)(\alpha z+\beta)$
$\Rightarrow \alpha=1, \beta=-2, z_3=2$ **ή** $(z^3-4z^2+9z-10):(z^2-2z+5)=z-2$

14. Να λυθεί η εξίσωση: $z^3-(5-2i)z^2+(11-6i)z-7+4i = 0$ αν μία ρίζα της είναι πραγματικός αριθμός.

Απάντηση: Έστω ρ∈R η πραγματική ρίζα της εξίσωσης.
$\rho^3-(5-2i)\rho^2+(11-6i)\rho-7+4i=0 \Rightarrow \rho=1$, $z^3-(5-2i)z^2+(11-6i)z-7+4i =$
$(z-1)(\alpha z^2+\beta z+\gamma) \Rightarrow \alpha=1, \beta=-4+2i, \gamma=7-4i$, $z^2-(4-2i)z+7-4i = 0 \Rightarrow z=2+i, z=2-3i$

15. Να λυθεί η εξίσωση: $z^3-(5+2i)z^2+(3+9i)z-4i+4=0$, αν μια ρίζα της είναι φανταστικός αριθμός.

Απάντηση: Έστω βi∈I μια φανταστική ρίζα της εξίσωσης,
$(\beta i)^3-(5+2i)(\beta i)^2+(3+9i)(\beta i)-4i+4=0 \Rightarrow \beta=1$, άρα z=i,
$z^3-(5+2i)z^2+(3+9i)z-4i+4=(z-i)(\alpha z^2+\beta z+\gamma) \Rightarrow \alpha=1, \beta=-5-I, \gamma=4+4i$,z=4, z=1+i

16. Δείξτε ότι το πολυώνυμο:
$f(z)=z^{8\nu}+z^{8\nu+1}+z^{8\nu+2}+z^{8\nu+3}$, $\nu \in Z$ διαιρείται με z^3+z^2+z+1

Απάντηση: $z^3+z^2+z+1=(z+1)(z+i)(z-i)$, $f(-1)=0$, $f(-i)=0$, $f(i)=0 \Rightarrow z+1/f(z)$, $z-i/f(z)$, $z+i/f(z)$, άρα $(z+1)(z-i)(z+i)/f(z) \Leftrightarrow z^3+z^2+z+1$ διαιρεί $f(z)$

17. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2+2x+2$. Υπάρχουν μιγαδικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $f(x) < 0$;

Απάντηση: Έστω ότι ο μιγαδικός αριθμός $z=\alpha+\beta i$, $\beta \neq 0$ είναι τέτοιος ώστε: $f(z)<0 \Rightarrow (\alpha+\beta i)^2+2(\alpha+\beta i)+2 < 0 \Leftrightarrow (\alpha^2-\beta^2+2\alpha+2)+2(\alpha\beta+\beta)i < 0$ (1)
Από (1) έχουμε: $\alpha\beta+\beta=0$ (2) , $\alpha^2-\beta^2+2\alpha+2 < 0$ (3)
Από (2) $\Rightarrow \alpha=-1$ (4) ($\beta \neq 0$ από υπόθεση). Από (3) , (4) $\Rightarrow \beta^2-1 > 0 \Rightarrow$ $\beta < -1$ ή $\beta > 1$. Έτσι υπάρχουν μιγαδικοί που κάνουν το f(x) αρνητικό και είναι οι: $z = -1+\beta i$ όπου $\beta<-1$ ή $\beta>1$

18. Αν $z \in C$ με $|z|=1$, δείξτε ότι η εξίσωση: $\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^{\nu} = z$, $\nu \in N^*$ (1), δεν έχει μιγαδικές ρίζες (της μορφής $\alpha+\beta i$, $\beta \neq 0$).

Απάντηση: Έστω ότι η εξίσωση, έχει ρίζα το μιγαδικό $\alpha+\beta i$ με $\alpha \in R$ και $\beta \in R^*$, $\alpha+\beta i$ στην (1), παίρνω μέτρα, πράξεις και καταλήγω σε $\beta=0$ άτοπο, γιατί από υπόθεση $\beta \neq 0$. Άρα η εξισωση δεν έχει ρίζες της μορφής $\alpha+\beta i$.

19. Δίνεται η εξίσωση: $\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}+\frac{1}{x-\gamma}=\frac{1}{\alpha+\beta}+\frac{1}{\beta+\gamma}+\frac{1}{\gamma+\alpha}$ (1)
με ρίζα την $\alpha+\beta+\gamma$. Δείξτε ότι οι άλλες δύο ρίζες της είναι πραγματικές.

Απάντηση: Έστω ότι η εξίσωση έχει ρίζες μιγαδικές, τις $z_1=\lambda+\mu i$, $z_2=\lambda-\mu i$ με $\mu \neq 0$. Αντικαθιστώ τις ρίζες αυτές στην (1), τις προκύπτουσες ισότητες τις αφαιρώ κατά μέλη, πράξεις, και καταλήγω στην
$-2\mu i \cdot \left[\frac{1}{(\lambda-\alpha)^2+\mu^2}+\frac{1}{(\lambda-\beta)^2+\mu^2}+\frac{1}{(\lambda-\gamma)^2+\mu^2} \right] = 0 \Rightarrow \mu=0$ ΑΤΟΠΟ, γιατί από υπόθεση έχουμε $\mu \neq 0$. Άρα η εξίσωση δεν έχει μιγαδικές ρίζες .

20. Να βρεθεί το άθροισμα:
$S = (1+i)+(2+3i)+(3+9i)+(4+27i)+\dots\dots.+(\nu+3^{\nu-1}i)$, $\nu \in N^*$

Απάντηση: $S = \frac{\nu(\nu+1)}{2} + \frac{3^{\nu}-1}{2} \cdot i$

21. Να βρεθεί η μορφή του $\nu \in N$, ώστε το πολυώνυμο:
$f(x)=x^{3\nu}-x^{2\nu}+x^{\nu}-1$, να είναι διαιρετό με $(x-1)(x^2+1)$.

Απάντηση: $(x-1)(x^2+1)/f(x) \Rightarrow (x-1)/f(x)$ και $(x^2+1)/f(x)$, $f(1)=0 \Rightarrow (x-1)/f(x)$
Ο $\nu \in N$ ορίζεται από το $(x^2+1)/f(x) \Leftrightarrow (x+i)(x-i)/f(x) \Leftrightarrow (f(i) = 0$ και $f(-i)=0)$
$f(i)=0 \Rightarrow i^{3\nu}-i^{2\nu}+i^{\nu}-1=0 \Rightarrow \nu=4\kappa$ ή $\nu=4\kappa+1$ ή $\nu=4\kappa+3$, $\kappa \in Z$
το $f(-i) =0$ είναι προφανές αφού το $-i$ είναι το συζυγές του i

22. Να βρεθούν στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, όταν ισχύουν $|z+i|= 4$ και $z+\bar{z} = 1$

Απάντηση: Οι εικόνες του z ικανοποιούν τις παραπάνω σχέσεις είναι τα σημεία τομής της $x = \frac{1}{2}$ και του κύκλου $\chi^2+(\psi+1)^2=4^2$

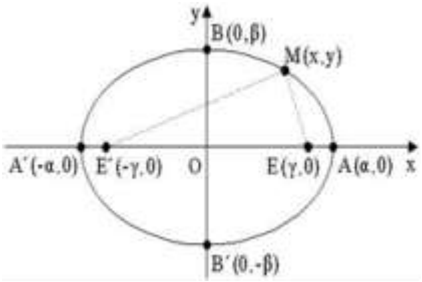
23. Δίνεται η εξίσωση $(z+2)^{\nu} - z^{\nu} = 0$ με $z \in C$, $\nu \in N^*$.
Αν z_1 είναι μία ρίζα της εξίσωσης , δείξτε ότι: $Re(z_1) = -1$

Απάντηση: $(z_1+2)^{\nu} - z_1^{\nu} = 0 \Leftrightarrow (z_1+2)^{\nu} = z_1^{\nu} \Leftrightarrow |(z_1+2)^{\nu}| = |z_1^{\nu}| \Leftrightarrow |z_1+2|^{\nu} = |z_1|^{\nu} \Leftrightarrow |z_1+2| = |z_1| \Leftrightarrow |z_1+2|^2 = |z_1|^2 \Leftrightarrow \dots\dots \frac{z_1+\bar{z}_1}{2} = -1 \Rightarrow Re(z_1) = -1$

ΕΛΛΕΙΨΗ

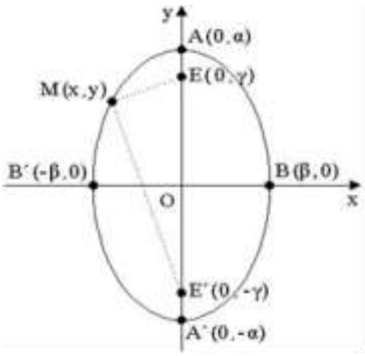
Ονομάζεται έλλειψη με εστίες τα σημεία Ε' και Ε ο γ.τ. των σημείων Μ του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων τους από τα Ε' και Ε είναι σταθερό ίσο 2α και μεγαλύτερο του (Ε'Ε) = 2γ, δηλαδή ισχύει (ΜΕ')+(ΜΕ) = 2α

Έστω z_1 , z_2 δύο συγκεκριμένοι μιγαδικοί αριθμοί που οι εικόνες τους Ε'(z_1) και Ε (z_2) απέχουν κατά **$|z_1-z_2|= 2γ$**, τότε η εξίσωση **$|z-z_1|+|z-z_2|=2α$** με **$2α > 2γ$** παριστάνει έλλειψη με εστίες τα σημεία Ε'(z_1) και Ε (z_2)



$z_1 = -γ+0i$, $z_2 = γ+0i$, Ε'(-γ,0) , Ε (γ,0)

$$\frac{x^2}{α^2} + \frac{y^2}{β^2} = 1 \qquad α^2=β^2+γ^2$$



$z_1 = 0 + (-γ)i$, $z_2 = 0+γi$, Ε'(0,-γ) , Ε(0,γ)

$$\frac{x^2}{β^2} + \frac{y^2}{α^2} = 1$$

24. Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z+4|+|z-4|= 10$ τότε:

α) Να βρείτε το γ. τ. των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z.

β) Να αποδείξετε ότι : $3 \le |z| \le 5$. Πότε ισχύουν οι ισότητες;

γ) Αν z_1 , z_2 είναι δύο μιγαδικοί του προηγούμενου γ. τ. , που οι εικόνες τους είναι σημεία συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων O(0,0) , να αποδείξετε ότι: $6 \le |z_1-z_2| \le 10$.

δ) Να αποδείξετε ότι: $|z-\overline{z}|= 15$

Απάντηση: α) $|z-(-4+0i)|+|z-(4+0i)|=10 \Rightarrow$ Ο γ.τ. των εικόνων του z είναι έλλειψη με εστίες Ε'(-4,0) και Ε(4,0) σταθερό άθροισμα $2α=10 > 8=2γ$ $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$. β) Αν ΜΜ' διάμετρος της έλλειψης τότε: $2β \le (ΜΜ') \le 2α$ $\Leftrightarrow β \le (ΟΜ) \le α \Rightarrow 3 \le |z| \le 5$. Οι ισότητες ισχύουν όταν η εικόνα του z συμπίπτει με τα σημεία Β, Β', Α, Α'. γ) Αν M_1, M_2 οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 , το ευθύγραμμο τμήμα M_1M_2 είναι μια διάμετρος της παραπάνω έλλειψης οπότε $2β \leq M_1M_2 \leq 2α \Rightarrow 6 \leq |z_1-z_2| \leq 10$. δ) 15

25. Δίνεται ο μιγαδικός z_0 , $|Im(z_0)|< 999$ και το σύνολο Α των μιγαδικών αριθμών z με $z \neq z_0$ και $z \neq \bar{z}_0$ που ικανοποιούν τη σχέση:

$$\frac{1}{|z-z_0|}+\frac{1}{|z-\bar{z}_0|}=\frac{1998}{|z-\bar{z}_0|\cdot|z-z_0|} \quad (1)$$

Ποιος είναι ο τόπος αυτών των μιγαδικών; Να βρείτε τη μεγαλύτερη δυνατή απόσταση που μπορούν να απέχουν μεταξύ τους οι εικόνες δυο μιγαδικών αριθμών του συνόλου Α. Τι συμβαίνει αν $z_0 = \bar{z}_0$;

(Πανελλήνιες 1998)

Απάντηση: (1) $\Rightarrow |z - z_0|+|z - \bar{z}_0| = 1998$ (2), δηλαδή το άθροισμα των αποστάσεων της εικόνας Μ(z) από τις σταθερές εικόνες $E_1(z_0)$ και $E_2(\bar{z}_0)$ είναι σταθερό και ίσο με 1998.
$(E_1E_2)=|z_0 - \bar{z}_0|=|2iIm(z_0)| < 1998$, Άρα το σύνολο των σημείων είναι τα σημεία μιας έλλειψης με εστίες τα E_1 , E_2 και μήκος μεγάλου άξονα 1998. Η μεγαλύτερη δυνατή απόσταση όταν αυτά βρεθούν στα άκρα του μεγάλου άξονα και είναι ίση με 1998. Αν $z_0= \bar{z}_0 \Leftrightarrow z_0 \in R$, από (2) $\Rightarrow |z - z_0| = 999$. Το σύνολο των σημείων Α βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο τον πραγματικό z_0 και ακτίνα 999. Η μέγιστη απόσταση ανάμεσα σε δύο σημεία του κύκλου όταν αυτά είναι αντιδιαμετρικά και είναι ίση με 1998.

26. Πάνω στο μιγαδικό επίπεδο θεωρούμε τους γεωμετρικούς τόπους των μιγαδικών z, w, φ, m που ικανοποιούν τις εξισώσεις:
$|z|=3$, $|w-i|+|w+i|= 4$, $|φ-4-4i|= 1$, $|m-4-4i|=|m-10+2i|$
Να υπολογίσετε:
i. το ελάχιστο των $|m|$, $|z-m|$, $|z-φ|$
ii.το μέγιστο και το ελάχιστο των $|φ|$, $|w|$, $|z-φ|$
Απάντηση: i. $\min|m|= 3\sqrt{2}$, $\min|z-m|= 3(\sqrt{2}-1)$, $\min|φ-m|= 3\sqrt{2} -1$
ii. $\max|φ|= 4\sqrt{2} +1$, $\min|φ|= 4\sqrt{2} - 1$, $\max|w|=2$, $\min|w|= \sqrt{3}$,
$\min|z- φ|= 4(\sqrt{2} -1)$, $\max|z- φ|= 4(\sqrt{2} +1)$
Σημείωση: Η απεικόνιση στο μιγαδικό επίπεδο των γ.τ. βοηθά στη λύση.

ΥΠΕΡΒΟΛΗ

Ονομάζεται υπερβολή με εστίες τα σημεία Ε' και Ε ο γ.τ. των σημείων Μ του επιπέδου των οποίων η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων τους από τα Ε' και Ε είναι σταθερή ίση με 2α και μικρότερη του (Ε'Ε), δηλαδή ισχύει |(ΜΕ')-(ΜΕ)|= 2α.

Έστω z_1 , z_2 δύο συγκεκριμένοι μιγαδικοί αριθμοί που οι εικόνες τους Ε'(z_1) και Ε (z_2) απέχουν κατά **$|z_1$-$z_2|$= 2γ > 0**, τότε η εξίσωση **$||z-z_1|-|z-z_2||$= 2α** με **α > 0 και 2α < 2γ** παριστάνει υπερβολή με εστίες τα σημεία Ε'(z_1) και Ε (z_2).

27. Να βρείτε το γ.τ. των μιγαδικών z που ικανοποιούν την εξίσωση.
|z|(|z+5|- |z – 5i|) = 2(|z|+1) - |z + 5| + |z – 5i|
Απάντηση: με παραγοντοποίηση προκύπτει (|z+5|-|z-5i|-2)·(|z|+1) = 0 ⇒ |z-(-5)|-|z-5i|= 2 (1) [η εξίσωση ||z-(-5)|-|z-5i||= 2 παριστάνει υπερβολή με εστίες τα σημεία E_1(-5) , E_2(5i) και εστιακή απόσταση 2γ=|-5-5i|= $5\sqrt{2}$ > 2α = 2]. **Η (1) παριστάνει τον έναν από τους δύο κλάδους αυτής της υπερβολής και μάλιστα τον δεξιό.**

ΠΑΡΑΒΟΛΗ

Ονομάζεται παραβολή, με διευθετούσα την ευθεία (δ) και εστία το σημείο Ε, ο γ.τ. των σημείων Μ του επιπέδου που ισαπέχουν από το σημείο Ε και την ευθεία (δ), δηλαδή ικανοποιούν την εξίσωση d(M, E) = d(M, δ).

Έστω μια ευθεία (δ) με εξίσωση Αx + Βy + Γ = 0 όπου Α ≠ 0 ή Β ≠ 0 και z_0 συγκεκριμένος μιγαδικός αριθμός που η εικόνα του Ε(z_0) βρίσκεται εκτός της ευθείας (δ). Από (1) ⇔ $|z - z_0| = \frac{|Ax + By + \Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}$, αν το σημείο Μ είναι η εικόνα του μιγαδικού z.

28. Να βρείτε το γ.τ. των μιγαδικών z = x + yi που ικανοποιούν την εξίσωση $\sqrt{2}$·|z-3-i|=|x-y+i|.

Απάντηση: $\sqrt{2}\cdot|z-3-i|=|x-y+i| \Leftrightarrow |z-(3+i)|=\frac{|x-y+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$. Έστω M(x,y) η εικόνα του μιγαδικού z=x+yi. Το $|z-(3+i)|$ εκφράζει την απόσταση του σημείου M(z) από τηντην εικόνα E του μιγαδικού $z_0 = 3+I$, δηλαδή $d(M,E) = |z-(3+i)|$. Το πηλίκο $\frac{|x-y+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$ εκφράζει την απόσταση του σημείου M(x,y) από την ευθεία (δ) με εξίσωση x-y+1=0, δηλαδή $\frac{|x-y+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = d(M,\delta)$. Άρα η εξίσωση $|z-(3+i)|=\frac{|x-y+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} \Leftrightarrow$ $d(M,E) = d(M,\delta)$, παριστάνει παραβολή με διευθετούσα την ευθεία (δ) και εστία το σημείο $E(z_0)$.

29. Δίνονται οι μιγαδικοί z=x+yi και $w = -\bar{z} -2+Re(z)$.
i. Να βρείτε τον γ.τ. των εικόνων του μιγαδικού z, αν $|z-w|=|z-3|$
ii. Να υπολογίσετε την ελάχιστη τιμή του $|z|$ και του $|z-w|$.

Απάντηση: i. Ο γ.τ. είναι παραβολή με εξίσωση: $y^2=10(x-\frac{1}{2})$

ii. $\min|z|=\frac{1}{2}$ και $\min|z-w|=\frac{5}{2}$

30. Να προσδιορίσετε το σύνολο των σημείων του μιγαδικού που ορίζουν οι εικόνες των μιγαδικών z για τους οποίους συναληθεύουν οι $|z-2i|< 2$ και $|z-1|= 1+Re(z)$.
Απάντηση: Είναι τα σημεία της παραβολής $y^2 = 4x$ που βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου με κέντρο Κ(0,2) και ακτίνα ρ = 2.

31. Αν για το μιγαδικό z ισχύει $(2z-1)^{2014} = (z+1)^{2014}$ να αποδείξετε ότι η εικόνα του ανήκει σε κύκλο του οποίου να υπολογίσετε το κέντρο Κ και την ακτίνα ρ.
Απάντηση: $(x-1)^2+y^2=1$

32. Αν $z\in C$ και $|\bar{z} + 1-2i| = 6$, να αποδείξετε ότι $4 \le |z+9-4i| \le 16$

33. Αν $z, w\in C$, $|z+2i|\le 3$ και $|w-4+5i| \le 1$ να αποδείξετε ότι $|z-w|\le 9$

34. i. Να βρείτε το γ.τ. των εικόνων του μιγαδικού $z\neq 0$ για τον οποίο ισχύει: $\left|z+\frac{1}{z}+2\right|+\left|z+\frac{1}{z}-2\right|=4$

ii. Να αποδείξετε ότι κάθε μιγαδικός w = $\frac{1+ki}{1-ki}$, έχει εικόνα που βρίσκεται πάνω στον τόπο αυτό.

iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(\frac{1+iz}{1-iz})^{\nu} = \frac{1+ki}{1-ki}$, $\nu \in N^*$, $k \in R$ έχει μόνο πραγματικές ρίζες.

Απάντηση: i. $|z| = 1$, ii. Δείχνω ότι $|w| = 1$, iii.Παίρνω τα μέτρα .....
$2iz - 2i\bar{z} = 0 \Leftrightarrow 2i(z-\bar{z})=0$ (1) , αν $z=\alpha+\beta i$, από (1) $\Rightarrow -4\beta=0 \Leftrightarrow \beta = 0$

35. Δίνεται ο μιγαδικός $z=x+yi \neq 0$ και οι πραγματικές σταθερές α, β με $\alpha>1$ και $\beta> -1$.

i. Να βρείτε το γ.τ. των εικόνων του z , αν $Re(z+\frac{1}{z}) = \alpha Re(z)$

ii. Να βρείτε τον γ.τ. των εικόνων του z , αν $Im(z+\frac{1}{z}) = -\beta Im(z)$

iii. Ποια σχέση πρέπει να συνδέει τους α, β, ώστε, στην περίπτωση που είναι $x \neq 0$ και $y \neq 0$, οι δύο γεωμετρικοί τόποι να συμπίπτουν ;

Απάντηση: i. $x=0$ ή $x^2+y^2 = \frac{1}{\alpha-1}$ και $z\neq0$ ii. $y=0$ ή $x^2+y^2 = \frac{1}{\beta+1}$ και $z\neq0$
iii. $\alpha-\beta=2$

36. Αν ο μιγαδικός z κινείται στον γ.τ. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, να αποδείξετε ότι ισχύει $|z^2|+|z^2-9|=41$.

Απάντηση: Η εξίσωση $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ παριστάνει έλλειψη με α=5, β=4, και γ=3. Οι εστίες της είναι τα σημεία $E_1(z_1)$ και $E_2(z_2)$ με $z_1=-3$ και $z_2=3$. Για κάθε μιγαδικό z που η εικόνα του βρίσκεται πάνω στην έλλειψη αυτή ισχύει: $|z-z_1|+|z-z_2|=2\alpha \Rightarrow |z+3|+|z-3|=10$ (1). Υψώνουμε την στο τετράγωνο , μετά την εκτέλεση των πράξεων προκύπτει το ζητούμενο.
ή με χρήση του κανόνα του παραλληλογράμμου
$|z+w|^2+|z-w|^2=2(|z|^2+|w|^2)$, αφού προηγούμενα υψώσουμε την (1) στο τετράγωνο

37. Πάνω στο μιγαδικό επίπεδο θεωρούμε τους γεωμετρικούς τόπους των μιγαδικών z, w, φ που ικανοποιούν τις εξισώσεις |z|=3, |w-4-4i|=2 και |φ-i|=|φ-2-5i|. Καθώς ο μιγαδικός φ διαγράφει τον τόπο του, να εξετάσετε αν διέρχεται πλησιέστερα των εικόνων του z ή τοw.

Απάντηση: Ο μιγαδικός φ διέρχεται πλησιέστερα των εικόνων του z, αφού: $\min|\phi-z|=\frac{7\sqrt{5}}{5}-3\simeq 0{,}13<\min|\phi-w|=\sqrt{5}-2\simeq 0{,}23$

Σημείωση: Η κατασκευή του αντίστοιχου σχήματος διευκολύνει.

Παρατηρήσεις

i. Η μέγιστη και η ελάχιστη απόσταση μεταξύ των σημείων δύο κύκλων $(Κ,\rho_1)$ και $(Λ,\rho_2)$, παρατηρείται ανάμεσα στα σημεία που η ευθεία ΚΛ τους τέμνει.

ii. Αν οι κύκλοι δεν τέμνονται, τότε η ελάχιστη και η μέγιστη απόσταση των σημείων τους υπολογίζεται από: $\mathbf{d(Κ,Λ)\mp(\rho_1+\rho_2)}$ αντίστοιχα.

iii. Η απόσταση ανάμεσα σε δύο σημεία μιας έλλειψης γίνεται μέγιστη όταν αυτά βρίσκονται στα άκρα του μεγάλου άξονα. Η απόσταση ανάμεσα σε δύο **αντιδιαμετρικά** σημεία μιας έλλειψης γίνεται ελάχιστη όταν αυτά βρίσκονται στα άκρα του μικρού άξονα.

iv. Η απόσταση ανάμεσα σε δύο σημεία μιας υπερβολής γίνεται όσο μεγάλη θέλουμε , δηλαδή δεν έχει μέγιστη τιμή.

Αν δύο σημεία βρίσκονται σε διαφορετικούς κλάδους μιας υπερβολής, τότε έχουν την ελάχιστη μεταξύ τους απόσταση όταν βρίσκοντια στις κορυφές της.

38. Να αποδείξετε ότι κάθε εξίσωση της μορφής $\frac{1}{z-a_1}+\frac{1}{z-a_2}+\cdots+\frac{1}{z-a_\nu}=\beta$ με $\beta, \alpha_1, \alpha_2,\ldots,\alpha_\nu \in R$ (1) έχει όλες τις ρίζες της πραγματικές.

Απάντηση: Αν είχε ρίζα $z_0=x+yi$ με $y\neq 0$, αντικατάσταση στην (1) και πράξεις, τότε θα ήταν: $\frac{y}{(x-a_1)^2+y^2}+\cdots+\frac{y}{(x-a_\nu)^2+y^2}=0$, πράγμα άτοπο.

39. Αν z^5=συνθ+iημθ και α∈R, να αποδείξετε ότι:
$|(1-\alpha z)\cdot(1-\alpha z^2)\cdot(1-\alpha z^3)| = |(\alpha-z)\cdot(\alpha-z^2)\cdot(\alpha-z^3)|$ (1)

Απάντηση: $|z^5|=|$συνθ+iημθ$|$ ⇒ $|z|^5=1 \Leftrightarrow |z|=1 \Leftrightarrow z=\frac{1}{\bar{z}}$,
αντικατάσταση στο 1^{o} μέλος της (1) και πράξεις.

40. Δίνονται οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν:

$$5(7z+1)^{13}-(3+4i)\cdot(z+7)^{13}=0 \text{ και } w=\frac{i}{5}\left(\frac{4}{z}-z\right)$$

α. Να αποδείξετε ότι $|z|=1$

β. Να βρείτε την απόσταση των εικόνων Α, Β των μιγαδικών z και 5iw αντίστοιχα στο μιγαδικό επίπεδο.

γ. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων Μ(x,y) των μιγαδικών w είναι σημεία έλλειψης της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

δ. Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή του $|\phi|$, αν φ είναι οποιοσδήποτε μιγαδικός που έχει την εικόνα του στην παραπάνω έλλειψη.

Απάντηση: α. Παίρνουμε τα μέτρα των μελών της:
$5(7z+1)^{13}=(3+4i)\cdot(z+7)^{13}$ και εφαρμογή ιδιοτήτων του μέτρου.

β. $|z-5iw|=\left|z-5i\cdot\frac{i}{5}\left(\frac{4}{z}-z\right)\right| \Leftrightarrow \ldots\ldots \Leftrightarrow |z-5iw|=4$

γ. Έστω w = x+yi και z=α+βi με $|z|=1$. Αντικαθιστώ στην $w=\frac{i}{5}\left(\frac{4}{z}-z\right)$

$\Rightarrow \ldots . \Rightarrow \frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{3}{5}\right)^2}=1$

δ. $\min|\phi|=\frac{3}{5}$ και $\max|\phi|=1$