Η μεθόδευση στην εύρεση συνάρτησης

Μέθοδοι – Παρατηρήσεις – Ιδέες - Εφαρμογές - Θέματα

Μπάμπης Στεργίου –Μαθηματικός

2η έκδοση , 15- 6 - 2015

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το σημαντικότερο κάθε χρόνο ερώτημα στις εξετάσεις, όχι αναγκαστικά και το πιο δύσκολο , αφορά κυρίως στην εύρεση συνάρτησης. Με σκοπό την πιο γρήγορη και αποτελεσματική ολοκλήρωση της επανάληψης στην ενότητα αυτή , θα ήθελα να επισημάνω , έστω με σύντομο τρόπο , τις πιο χαρακτηριστικές περιπτώσεις, όπου ζητούμενο είναι η εύρεση του τύπου μιας ή περισσότερων συναρτήσεων, αν δίνονται μία ή περισσότερες σχέσεις και πληροφορίες.

1η Περίπτωση

Βασιζόμαστε στις τεχνικές του γενικού μέρους των συναρτήσεων, όπως η ιδιότητα του $1-1$ κλπ. δυο μέρες και του πει " κύριε, δεν μας το είχατε τονίσει αυτό τελευταία !".

Εφαρμογή 1

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g\colon R \to R$ με $g(0) = 0$ και:

$$2f(x) + f(1-y) + g(x) - g(y) = 3(x+1)^2 - 6y \quad \text{για κάθε } x, y \in R$$

Να αποδειχθεί ότι:

α) $2f(x) + f(1-x) = 3x^2 + 3,\ x \in R$ **β)** $f(x) = x^2 + 2x,\ x \in R$

γ) $f = g$

Λύση

α) Είναι: $2f(x) + f(1-y) + g(x) - g(y) = 3(x+1)^2 - 6y$ για κάθε $x, y \in R$ (1)

Η σχέση (1) με $y = x$ δίνει:

$$2f(x) + f(1-x) = 3(x+1)^2 - 6x = 3x^2 + 3 \qquad (2)$$

β) Η σχέση (2) θέτοντας όπου x το $1 - x$ δίνει:

$$2f(1-x) + f(x) = 3(1-x)^2 + 3 = 3x^2 - 6x + 6 \qquad (3)$$

Πολλαπλασιάζουμε τη (2) με –2 και προσθέτουμε στην (3). Έτσι παίρνουμε:

$$-3f(x) = -6x^2 - 6 + 3x^2 - 6x + 6 \Leftrightarrow -3f(x) = -3x^2 - 6x \Leftrightarrow\Leftrightarrow f(x) = x^2 + 2x, \quad x \in R$$

γ) Με $y = 0$ η δοσμένη σχέση δίνει:

$$2f(x) + f(1) + g(x) - g(0) = 3(x+1)^2 \Leftrightarrow 2(x^2 + 2x) + 3 + g(x) = 3(x^2 + 2x + 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(x) = x^2 + 2x, \quad x \in R$$

Είναι επομένως $f(x) = x^2 + 2x$ και $g(x) = x^2 + 2x$ για κάθε $x \in R$, οπότε $f = g$.

Εφαρμογή 2

Μια συνάρτηση $f: R \to R$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$(f \circ f)(x) = x \quad \text{και} \quad f\big(f(x)f(y) - xy\big) = f(x) - x \quad \text{για κάθε } x, y \in R$$

α) Να αποδειχθεί ότι η f είναι αντιστρέψιμη .

β) Να βρεθεί το $f(0)$.

γ) Να αποδειχθεί ότι $f^{-1} = f$.

δ) Να βρεθεί ο τύπος της f.

Λύση

α) Για να είναι η f αντιστρέψιμη, αρκεί να είναι «1 – 1». Έστω $x_1, x_2 \in R$ με $f(x_1) = = f(x_2)$. Τότε:

$$f\big(f(x_1)\big) = f\big(f(x_2)\big) \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Επομένως η f είναι «1 – 1», άρα και αντιστρέψιμη.

β) Από την υπόθεση έχουμε:

$$f\big(f(x)f(y) - xy\big) = f(x) - x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

Η (1) για $x = y = 0$ δίνει:

$$f\left(f^2(0)\right)=f(0)\overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} f^2(0)=0 \Leftrightarrow f(0)=0$$

γ) Πρέπει να αποδείξουμε πρώτα ότι η f έχει σύνολο τιμών το R. Έστω λοιπόν $y_0 \in R$. Αν θέσουμε

$$x_0=f(y_0),\ \text{τότε}\quad f(x_0)=f\left(f(y_0)\right)=y_0$$

Άρα $f(R)=R$. Έτσι, αν στη σχέση $f\left(f(x)\right)=x$ θέσουμε όπου x το $f^{-1}(x)$, $x \in R$, παίρνουμε:

$$f\left(f\left(f^{-1}(x)\right)\right)=f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x)=f^{-1}(x) \Leftrightarrow f^{-1}(x)=f(x) \quad \text{για κάθε } x \in R$$

Άρα $f^{-1}=f$.

δ) Στην (1) θέτουμε $y=0$ και παίρνουμε:

$$f\left(f(x)f(0)-0\right)=f(x)-x \overset{(\beta)}{\Leftrightarrow} f(0)=f(x)-x \Leftrightarrow f(x)-x=0 \Leftrightarrow f(x)=x$$

Η συνάρτηση αυτή επαληθεύει και τις δύο από τις δοσμένες σχέσεις, οπότε είναι δεκτή.

Εφαρμογή 3

Δίνεται η συνάρτηση $f: R^* \to R$, η οποία είναι «1 – 1» και για κάθε $x \neq 0$ ικανοποιεί τη σχέση

$$(f \circ f)(x)\cdot f(x)=2$$

α) Να αποδειχθεί ότι $\mathbf{f\left(f(x)\right)=x}$, $x \neq 0$. **β)** Να βρεθεί ο τύπος της f.

Λύση

α) Σύμφωνα με την υπόθεση είναι:

$f(x)\cdot f\left(f(x)\right)=2 \qquad (1)$

για κάθε $x \neq 0$. Η σχέση (1) δίνει ότι:

$f(x)\neq 0$ για κάθε $x \neq 0 \qquad (2)$

Στην (1) θέτουμε όπου x το $f(x)$ και παίρνουμε:

$f\left(f(x)\right)\cdot f\left(f\left(f(x)\right)\right)=2 \qquad (3)$

Οι σχέσεις (1) και (3) δίνουν:

$$f(x)\cdot f\left(f(x)\right)=f\left(f(x)\right)\cdot f\left(f\left(f(x)\right)\right) \Leftrightarrow f(x)=f\left(f\left(f(x)\right)\right) \Leftrightarrow x=f\left(f(x)\right) \qquad (4)$$

β) Επειδή $f\left(f(x)\right)=x$, η δοσμένη σχέση (1) δίνει:

$$f(x)\cdot f\left(f(x)\right)=2 \Leftrightarrow f(x)\cdot x=2 \Leftrightarrow f(x)=\frac{2}{x},\quad x\neq 0$$

Η συνάρτηση αυτή επαληθεύει την (1), οπότε είναι η ζητούμενη.

Σχόλιο

Αν στην (1) θέσουμε όπου x το $f^{-1}(x)$, παίρνουμε:

$$f\left(f^{-1}(x)\right)\cdot f\left(f\left(f^{-1}(x)\right)\right)=2 \Leftrightarrow x\cdot f(x)=2 \Leftrightarrow f(x)=\frac{2}{x},\ x\neq 0$$

Ωστόσο, δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι αυτή είναι η ζητούμενη συνάρτηση, διότι ο τύπος αυτός ισχύει μόνο για εκείνες τις τιμές του x που βρίσκονται στο σύνολο τιμών της f.

Εφαρμογή 4

Αν η συνάρτηση $f\colon \mathrm{R}\to \mathrm{R}$ είναι γνησίως μονότονη και:

$$f(x+f(y))=f(x+y)+2 \ \ \text{για κάθε}\ x,y\in\mathbb{R}$$

να αποδειχθεί ότι:

α) $f(x)=x+f(0)$ για κάθε $x\in \mathrm{R}$,

β) $f(0)=2$ και $f(x)=x+2$, $x\in \mathrm{R}$.

Λύση

α) Είναι: $f(x+f(y))=f(x+y)+2$ (1)

♦ Η σχέση (1) για $y=0$ δίνει: $f(x+f(0))=f(x)+2$ (2)

♦ Η σχέση (1) για $x=0$ και $y=x$ δίνει: $f(f(x))=f(x)+2$ (3)

Τα δεύτερα μέλη των σχέσεων (2) και (3) είναι ίσα, οπότε έχουμε:

$$f(x+f(0))=f(f(x)) \Leftrightarrow x+f(0)=f(x) \Leftrightarrow f(x)=x+f(0) \qquad (4)$$

Σημειώνουμε ότι η f, ως γνησίως μονότονη, είναι και «1 – 1».

β) ♦ Η σχέση (1) για $x=y=0$ δίνει: $f(f(0))=f(0)+2$ (5)

♦ Η σχέση (4) για $x=2$ δίνει: $f(2)=2+f(0)$ (6)

Οι (5), (6) δίνουν $f(f(0))=f(2) \Leftrightarrow f(0)=2,$ διότι η f είναι «1 – 1». Από την (4) προ- κύπτει έτσι ότι $f(x)=x+2,\ x\in \mathrm{R},$ η οποία είναι δεκτή.

Εφαρμογή 5

Να βρεθεί η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ που ικανοποιεί την ιδιότητα:

$$xy\ln xy\leq yf(x)+xf(y)\leq f(xy)$$

για κάθε $x,\ y>0$.

Υπόδειξη

• Για $x=y=1$ βρίσκουμε $f(1)\geq 0$ και $f(1)\leq 0$, οπότε $f(1)=0$.

• Για $y=1$ βρίσκουμε $f(x)\geq x\ln x$ (1)

• Για $y=\frac{1}{x}$ παίρνουμε $f(x)=-x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)$ (2).

Η (1) για x το $\frac{1}{x}$ δίνει:

$$f\left(\frac{1}{x}\right)\geq -\frac{1}{x}\ln x \Leftrightarrow -x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)\leq x\ln x \Leftrightarrow$$

$$\overset{(2)}{=} f(x)\leq x\ln x$$

Άρα $f(x)=x\ln x$, η οποία επαληθεύει τη δοσμένη.

$2^{η}$ Περίπτωση

Έστω ότι στη δοσμένη σχέση έχουμε μια ή δύο συναρτήσεις ,με τις ίδιες και τις παραγώγους τους.

Αντιμετώπιση

Συγκέντρωση και ομαδοποίηση όρων ώστε να πάρουμε σχέση της μορφής : $G'(x)=H'(x)$ ή $G'(x)=G(x)$ ή $G'(x)=kG(x)$.

Συχνά, προσπαθούμε να δημιουργήσουμε ακόμα παράγωγο γινομένου, πηλίκου ή σύνθετης συνάρτησης και κυρίως μία από τις μορφές :

$$f^k(x)f'(x),\frac{f'(x}{f(x)},e^{f(x)}f'(x) \text{ κλπ.}$$

Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί και περισσότερες από μία φορές και μάλιστα στην κάθε περίπτωση να οδηγούμαστε σε άλλη μορφή.

Η πιο δύσκολη περίπτωση είναι εκείνη που πρέπει να πολλαπλασιάσουμε τη δοσμένη σχέση με κατάλληλη συνάρτηση - ή να προσθέσουμε και στα δύο μέλη μια νέα συνάρτηση - ώστε να πάρουμε παράγωγο σύνθετης συνάρτησης ή γινομένου κλπ. Ας ελπίσουμε ότι τέτοιες περιπτώσεις και ειδικά δύσκολες δεν θα παρουσιαστούν (με μεγάλη συχνότητα) σε εξετάσεις.

Να επισημάνω επίσης ότι κατά την αντιπαραγώγιση, όταν η δοσμένη σχέση ισχύει σε ένωση διαστημάτων και όχι σε διάστημα, τότε , αφήνοντας την παράγωγο, κάθε διάστημα θέλει και τη σταθερά του. Η χρήση της συνέχειας ή της παραγώγου στα επίμαχα σημεία συχνά επιτρέπει να αποδείξουμε ότι όλες οι σταθερές είναι ίσες.

Ως εφαρμογές αξίζει να μελετήσει ο μαθητής θέματα Πανελληνίων εξετάσεων προηγουμένων ετών , όπως πχ 2011, ΟΕΦΕ 2013 κλπ

Θα προτείνω πάνω σε αυτή την κατηγορία , εκτός από παλιά θέματα, 4-5 ακόμα βασικές ασκήσεις του ενός ερωτήματος(μία και έξω!) με ιδέες όχι τόσο γνωστές, ίσως όμως και μερικά θέματα. Στη δεύτερη περίπτωση που θα ακολουθήσει θα εστιάσω σε σχέσεις με ολοκληρώματα, που είναι η άλλη μεγάλη κατηγορία ασκήσεων και τις άλλες κατηγορίες θα τις συνεχίσω βαθμιαία . Ξεκινάω με την πρώτη άσκηση, για να γίνω και πιο κατανοητός.

Εφαρμογή 5

Να βρεθεί η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(0)=2$, η οποία ικανοποιεί την ιδιότητα

$$(f(x)+x)(f'(x)+1)=x \text{ για κάθε } x\in R$$

Λύση

Η δοσμένη γράφεται

$$(f(x)+x)(f'(x)+1)=x \Leftrightarrow 2(f(x)+x)(f(x)+x)'=2x \Leftrightarrow \left((f(x)+x)^2\right)'=(x^2)'$$

$$\Leftrightarrow (f(x)+x)^2=x^2+c$$

Επειδή $f(0)=2$, είναι $c=4$, οπότε παίρνουμε

$$(f(x)+x)^2=x^2+4 \Leftrightarrow |f(x)+x|=\sqrt{x^2+4} \qquad (1)$$

Είναι όμως $\sqrt{x^2+4}\neq 0$, οπότε από την τελευταία σχέση παίρνουμε ότι $f(x)+x\neq 0$, $x\in R$.
Επομένως η συνάρτηση $g(x)=f(x)+x$, $x\in R$ ως συνεχής και χωρίς ρίζες διατηρεί πρόσημο και μάλιστα αφού $g(0)=f(0)=2>0$, είναι θετική .
Από την σχέση (1) παίρνουμε λοιπόν :

$$|f(x)+x|=\sqrt{x^2+4} \Leftrightarrow f(x)+x=\sqrt{x^2+4} \Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x^2+4}-x, x\in R$$

Εφαρμογή 6

Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση f με την ιδιότητα $f(x)+lnf'(x)=x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1$

ΛΥΣΗ

Αρχικά πρέπει $f'(x)>0$.

$$f(x)+\ln f'(x)=x+1 \Leftrightarrow \ln e^{f(x)}+\ln f'(x)=x+1 \Leftrightarrow \ln(e^{f(x)}f'(x))=x+1 \Leftrightarrow e^{f(x)}f'(x)=e^{x+1} \Leftrightarrow (e^{f(x)})'=(e^{x+1})'$$

Άρα $e^{f(x)}=e^{x+1}+c, c\in R$. Όμως για $x=0$ είναι $c=0$.

Τελικά, $f(x)=x+1, x\in R$ αφού είναι $f'(x)=1>0$ για κάθε $x\in R$

Εφαρμογή 7

Για την δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ ισχύει ότι

$$f''(x)+f(-x)=0, \forall x\in R \text{ και είναι } f(0)=0, f'(0)=1.$$

Να βρεθεί ο τύπος της f

Λύση

Θέτουμε στη δοσμένη όπου x το $-x$ και παίρνουμε :

$$f''(-x)+f(x)=0.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη την αρχική και την παραπάνω σχέση, προκύπτει ότι :

$$f''(x)+f''(-x)+f(x)+f(-x)=0 \qquad (1)$$

Θεωρούμε λοιπόν τη συνάρτηση $g(x)=f(x)+f(-x), x\in\mathbb{R}$ και η σχέση (1) γίνεται:

$$g''(x)+g(x)=0 \qquad (2)$$

Αν θέσουμε $\mathrm{h(x)=g^2(x)+(g'(x))^2}$, τότε βρίσκουμε ότι $\mathrm{h'(x)=0}$ και τελικά $\mathrm{h(x)=0}$, διότι

$$\mathrm{h(0)=g^2(0)+(g'(0))^2=0+0=0}$$

Είναι επομένως :

$$g(x)=0, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow f(-x)=-f(x), \forall x\in\mathbb{R}$$

Επομένως η αρχική σχέση δίνει:

$$f''(x)=f(x)\Leftrightarrow f''(x)+f'(x)=f(x)+f'(x)\Rightarrow f'(x)e^x=f(x)e^x+c_1$$

Λόγω των συνθηκών έχουμε $c_1=1$,οπότε :

$$f'(x)e^x=f(x)e^x+1\Leftrightarrow f'(x)-f(x)=e^{-x}\Rightarrow f(x)e^{-x}=-\frac{e^{-2x}}{2}+c_2$$

Βρίσκουμε πάλι ότι $c_2=\frac{1}{2}$, οπότε :

$$f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}, x\in\mathbb{R}$$

Με επαλήθευση βλέπουμε ότι αυτή ικανοποιεί όλες τις δοσμένες συνθήκες , οπότε είναι δεκτή.

Εφαρμογή 8

Την επόμενη εφαρμογή τη δίνω ως θέμα για να δείτε πόσο εύκολο είναι στη συνέχεια να γίνει ένα θέμα και μάλιστα με τις δυσκολίες του. Να κρατήσω όμως μια επιφύλαξη μέχρι να την ξαναλύσω το πρωί , μήπως μου ξέφυγε κάτι, διότι την συνέταξα μόλις τώρα .Είναι πολύ εύκολο να ξεφύγει κάτι

Δίνονται οι δύο φορές παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f,g:R\to R$ με $f(0)=g(0)=1, f'(0)=g'(0)$ και οι οποίες για κάθε $x\in R$ ικανοποιούν τις ιδιότητες :

i) $f''(x)g(x)=f(x)g''(x)$ και $g(x)\neq 0$

ii) $g'(x)=2xf(x)$

α) Να αποδείξετε ότι $f=g$ και να βρείτε την f .

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα .

γ) Αν F είναι αρχική της f , να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$.

δ) Αν $0<a<b$, να αποδείξετε ότι $b(f(a)-1)<a(f(b)-1)$.

ε) Να αποδείξετε ότι $\int_1^x \frac{1}{f(t)}dt<\frac{1}{2e}$ για κάθε $x>1$

ΛΥΣΗ

Ξεκινώ με το α).Για κάθε $x\in R$ έχουμε: $f''(x)g(x)=f(x)g''(x)$ (1) *και* $g'(x)=2xf(x)$ (2)

$\forall x\in R$

$(1)\Leftrightarrow f''(x)g(x)+f'(x)g'(x)=f(x)g''(x)+f'(x)g'(x)\Leftrightarrow (f'(x)g(x)')'=(f(x)g'(x))'\Leftrightarrow f'(x)g(x)=f(x)g'(x)+c_1$

$$f'(0)g(0)=f(0)g'(0)+c_1\Rightarrow c_1=0 \ .$$

Άρα για κάθε $x\in R$ είναι :

$$f'(x)g(x)=f(x)g'(x)\Leftrightarrow f'(x)g(x)-f(x)g'(x)=0\Leftrightarrow \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=0\Leftrightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=c_2\Leftrightarrow f(x)=c_2g(x)$$

Είναι όμως $f(0)=c_2g(0)\Rightarrow c_2=1$, οπότε $\forall x\in R$ παίρνουμε $f(x)=g(x)$

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι η (2) δίνει :

$$g'(x)=2xg(x)\Leftrightarrow g'(x)-2xg(x)=0\Leftrightarrow e^{-x^2}g'(x)-2xe^{-x^2}g(x)=0\Leftrightarrow\left(e^{-x^2}g(x)\right)'=0$$
$$\Leftrightarrow e^{-x^2}g(x)=c\Leftrightarrow g(x)=ce^{x^2}\Leftrightarrow f(x)=ce^{x^2}$$

Είναι όμως $f(0)=c\Rightarrow c=1$, οπότε $f(x)=e^{x^2}$, $\forall x\in R$.

Άλλος τρόπος

a) Με την γνωστή κίνηση να προσθέσουμε και στα δύο μέλη της i) το $f'(x)g'(x)$ "ξεκλειδώνει" η συναρτησιακή. Όπως απέδειξε ο κ. Γιώργος ισχύει $f(x)=e^{x^2}$.

b) Εύκολα f γν. αύξουσα στο $[0,+\infty)$ και f γν. φθίνουσα στο $(-\infty,0]$. Επίσης προκύπτει ότι f κυρτή στο $\mathbb{R}$.

c) Θεωρώ $F(x)=\int_0^x e^{t^2}dt$. Ισχύει $x\ge t\ge 0\Rightarrow\ldots\Rightarrow\int_0^x e^{t^2}dt\ge\int_0^x 1dt=x$ και το ζητούμενο έπεται από το κριτήριο σύγκρισης.

d) Θεωρώ την $h(x)=a(f(x)-1)-x(f(a)-1)$. Ισχύει $h'(x)=af'(x)-f(a)+1$ και $h''(x)=af''(x)>0\Rightarrow h'$ γν. αύξουσα.

Ισχύει $h'(a)=2a^2e^{a^2}-e^{a^2}+1$. Θεωρώ την $t(x)=2x^2e^{x^2}-e^{x^2}+1$. Ισχύει $t'(x)=4x^3e^{x^2}+2xe^{x^2}\Rightarrow t$ γν. αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Επομένως $h'(a)=t(a)>t(0)=0$ και αφού h' γν. αύξουσα προκύπτει ότι η h είναι γν. αύξουσα στο $[a,+\infty)$. Συνεπώς $b>a\Rightarrow h(b)>h(a)$.

e) Εύκολα προκύπτει ότι $\int_1^x\frac{1}{f(t)}dt<\int_1^x\frac{t}{f(t)}dt=-\frac{1}{2}\left[e^{-t^2}\right]_1^x=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+\frac{1}{2e}<\frac{1}{2e}$.

Άλλος τρόπος

α) Από ην ισότητα έχουμε ότι ισχύει $f''(x)g(x)+f'(x)g'(x)=f'(x)g'(x)+f(x)g''(x)$ δηλαδή

$\left(f'(x)g(x)\right)'=\left(f(x)g'(x)\right)'$, $x\in R$ οπότε ισχύει ότι $f'(x)g(x)=f(x)g'(x)+c$ και επειδή

$f'(0)g(0)=f(0)g'(0)+c \Leftrightarrow f'(0)=g'(0)+c \Leftrightarrow c=0$

Άρα ισχύει ότι

$f'(x)g(x)=f(x)g'(x) \Leftrightarrow f'(x)g(x)-f(x)g'(x)=0$ και επειδή $g(x)\neq 0$ έχουμε ότι

$$\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}=0 \ .$$

Άρα $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=0$, οπότε :

$\dfrac{f(x)}{g(x)}=c$ και αφού $\dfrac{f(1)}{g(1)}=c \Leftrightarrow c=1$ θα ισχύει ότι $f(x)=g(x), x\in R$

Τώρα από $g'(x)=2xf(x)$ θα ισχύει $f'(x)=2xf(x) \Leftrightarrow f'(x)-2xf(x)=0$ άρα και

$e^{-x^2}f'(x)-e^{-x^2}2xf(x)=0$

δηλαδή $\left(e^{-x^2}f(x)\right)'=0$ οπότε ισχύει $e^{-x^2}f(x)=c \Leftrightarrow f(x)=ce^{x^2}$ και επειδή

$f(0)=c \Leftrightarrow c=1$ θα είναι $f(x)=e^{x^2}, x\in R$ που επαληθεύει τις αρχικές ισότητες

β) Είναι $f'(x)=2xf(x), x\in R$ και αφού $f(x)>0, x\in R$ ισχύει για $x<0$ ότι $f'(x)<0$ άρα η f είναι γνήσια φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και ισχύει για $x>0$ ότι $f'(x)>0$ άρα η f είναι γνήσια αύξουσα στο $[0,+\infty)$

Ακόμη είναι $f''(x)=2(f(x)+xf'(x))=2(f(x)+2x^2f(x))=2(1+2x^2)f(x)>0, x\in R$ άρα η f κυρτή στο R.

γ) Αφού η F είναι αρχική της $f(x)=e^{x^2}$ θα ισχύει ότι $F'(x)=f(x)$ και

$F'(x)=f'(x)=2xf(x)>0 \ x>0$ δηλαδή

η F είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$ και η εφαπτομένη της σε ένα σημείο $(x_0,F(x_0)),\ x_0\in(0,+\infty)$

θα είναι

$$y-F(x_0)=F'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y=f(x_0)x+F(x_0)-x_0f(x_0)$$

και λόγω της κυρτότητας από την θέση της εφαπτομένης και των σημείων της γραφικής παράστασης της F θα ισχύει

$$F(x)\geq g(x),\ \ x\in(0,\ +\infty) \text{ με } g(x)=f(x_0)x+F(x_0)-x_0f(x_0)$$

και επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x_0)x\right)=+\infty$ επειδή $f(x_0)>0$ από $F(x)\geq g(x)$ θα είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$ (με εξήγηση σχολική ότι από $F(x)\geq g(x)\Leftrightarrow 0<\dfrac{1}{F(x)}<\dfrac{1}{g(x)}$

θα είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}0=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{g(x)}=0$, κριτήριο παρεμβολής κλπ)

δ) Θέλουμε να αποδείξουμε ότι ισχύει $\dfrac{f(\alpha)-1}{\alpha}<\dfrac{f(b)-1}{b}$, $0<\alpha<b$

Θεωρώντας την συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)-1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$ είναι παραγωγίσιμη με

$$g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)+1}{x^2} \qquad (1)$$

Αν $h(x)=xf'(x)-f(x)+1$, $x\in[0,+\infty)$ αυτή είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με :

$$h'(x)=xf''(x)>0,\quad x\in(0,+\infty)$$

Άρα είναι γνήσια αύξουσα στο $[0,+\infty)$ επομένως για $x>0$ θα ισχύει ότι $h(x)>h(0)=0$

Έτσι από (1) ισχύει $g'(x)=\dfrac{h(x)}{x^2}>0,\ x>0$ Άρα g γνήσια αύξουσα στο $(0,+\infty)$ και αφού $\alpha<b$ θα είναι $g(\alpha)<g(b)$ δηλαδή αυτό που θέλαμε.

ε) Επειδή είναι $1\leq t\leq x$ θα είναι και $t\leq t^2\Leftrightarrow -t\geq -t^2$ Άρα παίρνουμε

$$e^{-t^2}\leq e^{-t}\Leftrightarrow\frac{1}{f(t)}\leq e^{-t} \text{ και με } x>1 \text{ θα ισχύει ότι}$$

$$\int_1^x\frac{1}{f(t)}dt\leq\int_1^x e^{-t}dt=-\left[e^{-t}\right]_1^x=-\frac{1}{e^x}+\frac{1}{e}<\frac{1}{e}+\frac{1}{e}=\frac{2}{e}$$

$3^η$ Περίπτωση

Απευθύνομαι σε έμπειρους συναδέλφους και είμαι κάπως συνοπτικός. Μακάρι αυτά τα σχόλια να βρω χρόνο να τα ντύσω με τις κατάλληλες εφαρμογές , κάτι που κάποια στιγμή πρέπει να κάνω, αλλά πότε !

Αυτή είναι η πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση. Υποθέτουμε λοιπόν ότι η δοσμένη σχέση περιέχει ολοκλήρωμα , με μία ή δύο συναρτήσεις , και ζητείται ο τύπος της συνεχούς συνάρτησης .Οι πιο συνηθισμένες περιπτώσεις είναι οι εξής :

- Το ολοκλήρωμα περιέχει ένα ή δύο μεταβλητά άκρα, οπότε αφού εξασφαλίσουμε τις αναγκαίες παραγωγισιμότητες στα δύο μέλη, παραγωγίζουμε ώστε να απαλλαχθούμε από τα ολοκληρώματα. Από κει και κάτω αναγόμαστε στην πρώτη περίπτωση.

Εδώ προσέχουμε ώστε η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση να μην περιέχει τη μεταβλητή παραγώγισης. Αν την περιέχει, τότε με αντικατάσταση μεταφέρουμε τη μεταβλητή παραγώγισης ή στα άκρα ή και έξω από το ολοκλήρωμα. Τονίζουμε επίσης ότι αν έχουμε γινόμενο ολοκληρωτικού παράγοντα με συνάρτηση, τότε καλύτερα είναι να απομονώσουμε τον ολοκληρωτικό παράγοντα. Με αυτή την παρατήρηση το περυσινό Δ1 γίνεται πολύ πιο απλό και δε χάνεται πολύτιμος χρόνος μέσα από σύνθετες και χρονοβόρες παραγωγίσεις.

Για τις παραπάνω περιπτώσεις μπορούμε να κάνουμε δυο θέματα(υπάρχουν σε όλες τα βοηθήματα και σε όλες τις σημειώσεις), στείλτε όποιο νομίζετε ότι είναι διδακτικό ή έχει κάτι απλό, καινούριο και έξυπνο.

- Το ολοκλήρωμα δεν περιέχει μεταβλητό άκρο αλλά έχει μέσα του τη μεταβλητή ολοκλήρωσης !

Σε αυτή την περίπτωση τονίζουμε στα παιδιά ότι το ολοκλήρωμα δεν είναι αριθμός για να έχει παράγωγο μηδέν ,αλλά μεταφέρουμε με όποιο τρόπο μπορούμε(συνήθως με αντικατάσταση) τη μεταβλητή παραγώγισης έξω από το ολοκλήρωμα ή στα άκρα και εργαζόμαστε όπως πριν.

- Το ολοκήρωμα που περιέχει τη ζητούμενη συνάρτηση έχει πραγματικά άκρα και είναι σταθερό ως προς τη μεταβλητή παραγώγισης.

Σε αυτή την περίπτωση θέτουμε το ολοκλήρωμα ίσο με c, εκφράζουμε τη δοσμένη συνάρτηση ως συνάρτηση του c, και είτε ολοκληρώνουμε εκ νέου, είτε τη συνάρτηση αυτή τη θέτουμε στη σχέση $\int_a^b f(x)dx = c$ και τελικά βρίσκουμε το c και την f.

Σχετικό θέμα έχει τεθεί και στις εξετάσεις, οπότε το θυμίζουμε σε πέντε λεπτά.

- Η εύρεση της συνάρτησης σε σχέση με ολοκλήρωμα που είναι σταθερά (πολύ ενδιαφέρουσα περίπτωση που δεν έχει μπει σε εξετάσεις) γίνεται αν με κατάλληλες ενέργειες(μέθοδοι ολοκλήρωσης κλπ) φέρουμε τη δοσμένη σχέση στη μορφή $\int_a^b G(x)dx = 0$, όπου G είναι μια συνεχής συνάρτηση που δεν αλλάζει πρόσημο. Αν τα άκρα είναι διαφορετικά, τότε θα είναι $G(x) = 0, x \in [a,b]$ και η σχέση αυτή μας οδηγεί στη ζητούμενη συνάρτηση.

- Στα μεταβλητά άκρα ολοκλήρωσης υπάρχει η ίδια η ζητούμενη συνάρτηση ή η αντίστροφή της κλπ !

Σε αυτή την περίπτωση συνδυάζουμε βασικές πάντα κινήσεις και προσπαθούμε να οδηγηθούμε σε εκμεταλλεύσιμη σχέση(θα δώσω άλλη στιγμούλα-ή δώστε και σεις- κατάλληλη εφαρμογή).

- **Υπάρχουν τα τελευταία χρόνια και ασκήσεις εύρεσης όπου η διερεύνηση γίνεται στα άκρα ολοκλήρωσης. Η ζητούμενη συνάρτηση είναι στα όρια ολοκλήρωσης. Τι κάνουμε σε αυτή την περίπτωση ;**

Με ένα ΘΜΤ για τα ολοκληρώματα(ο μαθητής θα κάνει έμμεσα τη σχετική απόδειξη) η δοσμένη σχέση οδηγεί σε γινόμενο που ο ένας παράγοντας δεν είναι ποτέ μηδέν. Ο άλλος παράγοντας οδηγεί σε μια νέα διαφορική, εύκολη ή δύσκολη και ...ο Θεός βοηθός. Η διερεύνηση μπορεί να γίνει μερικές φορές και στο ένα μέλος της δοσμένης σχέσης με τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο.
(Η διαδικασία με την έρευνα στα άκρα του ολοκληρώματος , φαίνεται καλά και στο φετινό θέμα προσομοίωσης που επιμελήθηκε με τους συνεργάτες του ο εκλεκτός συνάδελφος και Προϊστάμενος Παιδαγωγικής Καθοδήγησης στην περιφέρειά του Πρόδρομος Ελευθερίου).

Να το επαναλάβουμε :

Τα θέματα μπορεί να έχουν όγκο εργασίας, αλλά οι ιδέες που χρησιμοποιούνται είναι οι ΒΑΣΙΚΕΣ. Αυτό που χρειάζεται είναι καλή γνώση της θεωρίας, γερά πατήματα και καθαρό μυαλό, τουτέστιν ψυχραιμία και σωστή διαχείριση του χρόνου.

- Η δοσμένη σχέση είναι ανισοτική και ζητείται ο τύπος της συνάρτησης !

Και σε αυτή την περίπτωση προσπαθούμε κάτω από το ολοκλήρωμα να εμφανίζουμε μη αρνητική και συνεχή συνάρτηση και το ολοκλήρωμα να είναι μη θετικό. Αναγκαστικά η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση θα είναι μηδέν(προσέχουμε τα άκρα να έχουν τη σωστή διάταξη) κλπ.Το δύσκολο σε αυτές τις περιπτώσεις να αντιληφθεί ότι ο μαθητής ότι κάποιος αριθμός(σταθερά) γράφεται ως ολοκλήρωμα, οπότε να πάει στη σωστή σχέση. Αν είναι όμως έμπειρος και πάει με τη μέθοδο του " τι θα με συνέφερε να δώσει η δοσμένη σχέση; ", τότε θα το φτιάξει.

Επισημαίνω ότι πρόκειται για ερωτήματα που αφορούν το μαθητή που πάει για το 95-100 ! Αλλά ας γράψει πρώτα το 95 και βλέπουμε και το υπόλοιπο !

Ξεκινάω με μια έξυπνη περίπτωση που μπορεί να βάλει σε περιπέτειες ακόμα και τον πιο έμπειρο μαθητή !

Εφαρμογή 9

Να βρείτε τη θετική και παραγωγίσιμη συνάρτηση f με $f(0)=1$ που ικανοποιεί την ιδιότητα :

$$\int_{f'(x)}^{f(x)} f(t)dt = f'(x) - f(x) \text{ για κάθε } x \in R$$

ΛΥΣΗ

Έστω ότι υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ με $f(\xi) > f'(\xi)$. Η δοσμένη σχέση για $x = \xi$ δίνει άτοπο αφού το αριστερό μέλος είναι θετικό($LHS > 0$) ενώ το δεξιό είναι αρνητικό ($RHS < 0$).

Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο, αν υπάρχει $\xi' \in \mathbb{R}$ με $f(\xi') < f'(\xi')$. Συνεπώς

$$f(x) = f'(x) \Rightarrow f(x) = e^x, x \in \mathbb{R} \text{ αφού } f(0)=1.$$

Συμπληρωματικό ερώτημα

Να λυθεί ή ίδια άσκηση ,αν αντί της δοσμένης σχέσης έχουμε την :

$$\int_{f'(x)}^{f(x)} (f^2(t) - f(t))dt = f'(x) - f(x) \text{ για κάθε } x \in R$$

στην οποία δεν ξέρουμε αν η συνάρτηση κάτω από το ολοκλήρωμα είναι θετική.

Απάντηση

Η σχέση γράφεται $\int_{f'(x)}^{f(x)} \left(f^2(t) - f(t) + 1\right)dt = 0$ και συνεχίζουμε με διάκριση περιπτώσεων όπως πριν αφού $f^2(t) - f(t) + 1 > 0$.

Πάλι προκύπτει ότι $f(x)=f'(x)$, οπότε κατά τα γνωστά $\mathrm{f(x)=e^x}$.

Άλλος τρόπος

Και μία ιδέα με ΘΜΤ. Έστω F μια αρχική της f. Η σχέση γίνεται

$$F(f(x))-F(f'(x))=f'(x)-f(x).$$

Έστω ότι υπάρχει $\xi\in\mathbb{R}$ με $f(\xi)>f'(\xi)$. Τότε με ΘΜΤ για την F προκύπτει ότι υπάρχει $x_o\in\left(f'(\xi),f(\xi)\right)$, τέτοιο ώστε

$$f(x_0)=\frac{F(f(\xi))-F(f'(\xi))}{f(\xi)-f'(\xi)}\Rightarrow f(x_0)=-1 \text{ άτοπο.}$$

Πάνω στην εύρεση, ενδιαφέρον παρουσιάζει το επόμενο κλασικό θέμα που μας θύμισε ο συνάδελφος και καλός φίλος Γιώργος Τσαπακίδης με το άρθρο του στον Ευκλείδη Β (τελευταίο τεύχος). Ανάλογα παραδείγματα μπορούν να κατασκευαστούν εύκολα για συναρτήσεις με πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$.

Εφαρμογή 10

Να βρείτε τη θετική και παραγωγίσιμη συνάρτηση f με $f(0)=1$ που ικανοποιεί την ιδιότητα :

$$\int_{f'(x)}^{f(x)} f(t)dt=f'(x)-f(x) \text{ για κάθε } x\in R$$

Άλλος τρόπος

Έστω F μία αρχική της f.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=F(x)+x$, $x\in R$, τότε $g'(x)=F'(x)+1=f(x)+1>0$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο R και επομένως $1-1$.

Επίσης $\displaystyle\int_{f'(x)}^{f(x)} f(t)dt=f'(x)-f(x)\Leftrightarrow\left[F(t)\right]_{f'(x)}^{f(x)}=f'(x)-f(x)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow F(f(x))-F(f'(x))=f'(x)-f(x)\Leftrightarrow F(f(x))+f(x)=F(f'(x))+f'(x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(f(x))=g(f'(x))\overset{g\,1-1}{\Leftrightarrow} f(x)=f'(x)\Leftrightarrow f(x)=ce^x \text{ και από το } f(0)=1\ ,$$

έχουμε $f(x)=e^{x}$.

Πάνω στην εύρεση, ενδιαφέρον παρουσιάζει το επόμενο κλασικό θέμα που μας θύμισε ο συνάδελφος και καλός φίλος Γιώργος Τσαπακίδης με το άρθρο του στον Ευκλείδη Β (τελευταίο τεύχος). Ανάλογα παραδείγματα μπορούν να κατασκευαστούν εύκολα για συναρτήσεις με πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$.

Εφαρμογή 11

Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f στο $[0,1]$ με την ιδιότητα :

$$\int_0^1 f^2(x^2)dx=\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{3}$$

ΛΥΣΗ

Ας είναι $A=\int_0^1 f(x)dx$.

Θέτοντας $\sqrt{x}=y\geq 0\Leftrightarrow x=y^2$ παίρνουμε $dx=2ydy$ και νέα άκρα ολοκλήρωσης τα $y_1=0, y_2=1$.

Έτσι, $A=\int_0^1 2yf(y^2)dy=\int_0^1 2xf(x^2)dx$.

Από την αρχική σχέση έχουμε

$$\int_0^1 f^2(x^2)dx=\int_0^1 2xf(x^2)dx-\int_0^1 x^2dx\Rightarrow\ \Rightarrow\int_0^1\left[f^2(x^2)-2xf(x^2)-x^2\right]dx=0$$

$$\Rightarrow\int_0^1\left[f(x^2)-x\right]^2dx=0\quad\Rightarrow\forall x\in[0,1]: f(x^2)=x.$$

Στην τελευταία σχέση για $x\to\sqrt{x}\in[0,1]$ παίρνουμε

$$f(x)=\sqrt{x}, x\in[0,1]$$

Άλλος τρόπος

Για κάθε $x\in[0,1]$ ισχύει

$$(\mathrm{f}(\mathrm{x})-\sqrt{\mathrm{x}})^2\geq 0\Rightarrow \mathrm{f}^2(\mathrm{x})+\mathrm{x}\geq 2\sqrt{\mathrm{x}}\mathrm{f}(\mathrm{x})\Rightarrow\ \mathrm{f}^2(\mathrm{x}^2)+\mathrm{x}^2\geq 2\mathrm{x}\mathrm{f}(\mathrm{x}^2)$$

Όμως, η δοθείσα γράφεται

$$\int_0^1(f^2(x^2)+x^2)dx\leq\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 2xf(x^2)dx,$$

όπου στο τελευταίο βήμα έγινε η αλλαγή $x=u^2$.

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει ότι $f(x)=\sqrt{x}$, $\forall x\in[0,1]$.

5η Περίπτωση

Στην περίπτωση αυτή θα εντάξω ασκήσεις εύρεσης συνεχούς συνάρτησης. Στη δοσμένη σχέση δεν υπάρχουν παράγωγοι ή ολοκληρώματα.

Σε τέτοιες ασκήσεις, βασιζόμαστε κυρίως στις εξής παρατηρήσεις :

♦ Κάθε συνεχής συνάρτηση που δε μηδενίζεται σε ένα διάστημα, διατηρεί πρόσημο σε αυτό.

♦ Κάθε συνεχής συνάρτηση σε διάστημα που παίρνει μόνο ρητές ή μόνο άρρητες τιμές ή πεπερασμένο πλήθος τιμών είναι σταθερή.

♦ Αν το μέγιστο και το ελάχιστο και το μέγιστο μιας συνάρτησης συμπίπτουν , τότε αυτή είναι σταθερή. Η παρατήρηση αυτή, σε συνδυασμό όμως με το θεώρημα Fermat, δίνει λύση σε μια κατηγορία ασκήσεων και μάλιστα είναι ο μοναδικός τρόπος για τη λύση τους.

Νομίζω ότι είχαμε μια τέτοια άσκηση στο mathematica , αλλά δεν την έχω μπροστά μου. Ένδειξη για αυτή τη μέθοδο είναι ότι η συνάρτηση είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα, ώστε να έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο διάστημα αυτό.

Εφαρμογή 12

α) Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις f με την ιδιότητα $f^2(x)=1+2xf(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις f με την ιδιότητα $(f(x)-2013)(f(x)-1821)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Η περίπτωση β) έχει το μειονέκτημα ότι δεν προσφέρεται ευρέως για εξετάσεις, ωστόσο σε ένα θεωρητικό θέμα μπορεί κάπου να κολλήσει ως ανεξάρτητο ερώτημα.

γ) Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $(0,+\infty)$ με την ιδιότητα $(f(x)-\ln x)(f(x)+\ln x)=0$ για κάθε $x>0$.

Την περίπτωση γ) δεν την έχουμε δει στις εξετάσεις μέχρι τώρα, πάντα όμως είναι εύκολο να δημιουργηθεί ένα κατάλληλο θέμα που να στηρίζεται σε αυτή την ιδέα. Αν δεν φρεσκάρουμε τον τρόπο διατύπωσης της λύσης λίγο πριν τις εξετάσεις, ακόμα και ο απαιτητικός μαθητής θα έχει δυσκολίες.

ΛΥΣΗ

α) $f^2(x)=1+2xf(x) \Leftrightarrow f^2(x)-2xf(x)=1 \Leftrightarrow f^2(x)-2xf(x)+x^2=x^2+1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(f(x)-x\right)^2=x^2+1.$$

Έστω $g(x)=f(x)-x$, τότε $g^2(x)=x^2+1, x\in R$.

Είναι $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$ γιατί η εξίσωση $g(x)=0$ είναι ισοδύναμη με την $x^2+1=0$ που είναι αδύνατη.

Επίσης η g είναι συνεχής στο R (διαφορά συνεχών) . Άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο , επομένως $g(x)=\sqrt{x^2+1}$ για κάθε $x\in R$ ή $g(x)=-\sqrt{x^2+1}$ για κάθε $x\in R$.

Επομένως $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$ ή $f(x)=x-\sqrt{x^2+1}, x\in R$.

β) $(f(x)-2013)(f(x)-1821)=0 \Leftrightarrow f^2(x)-3834\cdot f(x)+3665673=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f^2(x)-2\cdot 1917\cdot f(x)+1917^2=1917^2-3665673=0 \Leftrightarrow$$

$(f(x)-1917)^2=9216$ και δουλεύουμε όπως στο (α).

Υπάρχει τρόπος και με Θ. ενδιαμέσων τιμών , αλλά νομίζω ότι ο παραπάνω είναι καλύτερος.

γ) Έχουμε

$$(f(x)-lnx)(f(x)+lnx)=0 \Leftrightarrow f^2(x)=ln^2x.$$

Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική λύση το $x=1$.

Σε καθένα από τα διαστήματα $(0,1)$ και $(1,+\infty)$ η f διατηρεί σταθερό πρόσημο (ως συνεχής και χωρίς ρίζες).

Άρα έχουμε τις εξής περιπτώσεις

- ♦ $f(x)=\begin{cases}|lnx|, 0<x<1\\ 0, x=1\\ |lnx|, x>1\end{cases}=|lnx|, x>0$.
- ♦ $f(x)=\begin{cases}|lnx|, 0<x<1\\ 0, x=1\\ -|lnx|, x>1\end{cases}=-lnx, x>0$.
- ♦ $f(x)=\begin{cases}-|lnx|, 0<x<1\\ 0, x=1\\ |lnx|, x>1\end{cases}=lnx, x>0$.
- ♦ $f(x)=\begin{cases}-|lnx|, 0<x<1\\ 0, x=1\\ -|lnx|, x>1\end{cases}=-|lnx|, x>0$

Εφαρμογή 13(επαναληπτική).

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών που έχει την ιδιότητα : $\mathrm{f}(\mathrm{x}\cdot\mathrm{y})=\mathrm{f}(\mathrm{x})+\mathrm{f}(\mathrm{y})$, για κάθε $\mathrm{x},\mathrm{y}>0$

Α. Να αποδείξετε ότι:

α) $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$ και $f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$ για κάθε $x,y>0$

β) Αν η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα, τότε η f αντιστρέφεται.

Β. Αν η f είναι συνεχής σε κάποιο $a>0$,να αποδειχθεί ότι είναι συνεχής και να βρεθεί το όριο $A=\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

Γ. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1)=1$, να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης αυτής.

5η Περίπτωση

Στην τελευταία περίπτωση αυτής της προσπάθειας μερικής συστηματοποίησης της πιο σημαντικής κατηγορίας ασκήσεων στα μαθηματικά κατεύθυνσης θα εντάξω τις εξής περιπτώσεις :

- Η συνάρτηση βρίσκεται από μια συναρτησιακή εξίσωση, με ή χωρίς παραγώγους , με μία ή δύο μεταβλητές.

Εδώ φρεσκάρουμε ότι αν η σχέση έχει δύο μεταβλητές και η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη, τότε μπορούμε να θεωρούμε τη μία μεταβλητή σταθερή και να παραγωγίζουμε ως προς την άλλη.Με επιλεγμένες στη συνέχεια τιμές για τη μία μεταβλητή, παίρνουμε μια σχετικά βατή διαφορική εξίσωση με μία μεταβλητή και βρίσκουμε τη ζητούμενη συνάρτηση. Σχετικές ασκήσεις έχουν όλα τα βοηθήματα και αν προλάβω, θα βάλω και μία εδώ.Α! Να μην ξεχάσω τη βασική τεχνική που τη συνάρτηση την βρίσκουμε από μια σχέση της μορφής $g(f(x))=g(h(x))$, όπου g είναι μια $1-1$ συνάρτηση. Πρόκειται για την πιο απλή και έξυπνη συγχρόνως περίπτωση.

Να τονίσουμε στους μαθητές μας ότι σε τέτοια θέματα και μάλιστα όταν το ερώτημα είναι " να βρεθεί η συνάρτηση .... ", είναι πιθανό να χρειάζεται επαλήθευση. Τέτοια ώρα- τέτοια λόγια θα μου πείτε και θα συμφωνήσω. Αλλά από την άλλη σε κανένα δε θα άρεσε να έρθει ο μαθητής μετά από δυο μέρες και του πει " κύριε, δεν μας το είχατε τονίσει αυτό τελευταία !".

Αυτός που ετοιμάζει μαθητές θέλει να έχει μια σχέση ευθύνης με τον εαυτό του και το μαθητή του και δικαιολογημένα στεναχωριέται όταν δεν τονίσει κάτι βασικό. Μόνο με αυτό το σκεπτικό αναφέρω ότι καλό είναι να έχουμε και την επαλήθευση στο μυαλό μας, όχι μόνο σε θέματα εύρεσης αλλά και σε μερικές άλλες αναγκαίες περιπτώσεις.

- Η συνάρτηση είναι πολυωνυμική και στη σχέση που δίνεται υπάρχουν δυνάμεις και παράγωγοι πρώτης ή δευτέρας τάξεως.

Η αντιμετώπιση, όπως καλά γνωρίζετε, γίνεται σε δύο βήματα :

α) Εντοπίζουμε το βαθμό κάθε όρου και καταλήγουμε σε μια απλή εξίσωση ως ν, όπου ν είναι ο βαθμός του ζητούμενου πολυωνύμου. Πιθανόν να χρειαστεί η σχετική διερεύνηση.

β) Με βάση το θεώρημα για την ισότητα πολυωνύμων προσδιορίζουμε τους συντελεστές του ζητούμενου πολυωνύμου.

- Η συναρτησιακή εξίσωση προκύπτει από μόνη της ή από σύστημα σχέσεων, δίνοντας πληροφορία για δυο συναρτήσεις (ή για μία) και τις αρχικές τους.

Εδώ ο μαθητής πρέπει να ξέρει να χρησιμοποιεί τον ορισμό της αρχικής και από κει πέρα να παίζει με άνεση τις βασικές περιπτώσεις αντιπαραγώγισης. Σημειώνω ότι οι ασκήσεις με αρχικές είναι ιδανικές για εξετάσεις και δεν έχουμε δει ακόμα τέτοιο θέμα.

Για φέτος θα σταματήσω σε αυτή μόνο την κατηγορία ,δηλαδή την εύρεση συνάρτησης , μια και οι εξετάσεις έφτασαν !

- Να μην ξεχάσουμε τέλος να υπενθυμίσουμε ότι από μια σχέση της μορφής

$$f(x)\cdot g(x)=0 \ \textbf{,} \ x\in A$$

δεν προκύπτει αναγκαστικά ότι

$$f(x)=0, x\in A \ \textbf{ή} \ \ g(x)=0, x\in A$$

Εφαρμογή 14

Να βρεθούν οι συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει

- $f(0)=0$

και

- $|f(x)-f(y)|=|x-y|$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

Λύση

Από την υπόθεση έχουμε

- $f(0)=0$
- $|f(x)-f(y)|=|x-y| \quad (1)$

Από την (1) για $y=0$ παίρνουμε

$$\left(|f(x)-f(0)|=|x-0|, \forall x \in R\right) \overset{(f(0)=0)}{\Leftrightarrow} \left(|f(x)|=|x|, \forall x \in R\right) \Leftrightarrow \left(\left(f(x)=x \vee f(x)=-x\right), \forall x \in R\right)$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in R-\{0\}$,ώστε $f(x_1)=x_1, f(x_2)=-x_2$.Λόγω της (1) προκύπτει ότι :

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|x_1-x_2| \Leftrightarrow |x_1+x_2|=|x_1-x_2| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=x_1-x_2 \\ \vee \\ x_1+x_2=-x_1+x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=0 \\ \vee \\ x_1=0 \end{cases} ,$$

που είναι άτοπο. Επομένως είναι:

$$\left(f(x)=x, \forall x \in R\right) \vee \left(f(x)=-x, \forall x \in R\right)$$

Οι συναρτήσεις αυτές ικανοποιούν τις υποθέσεις και έτσι είναι οι ζητούμενες.

Ας δώσω μια εφαρμογή για επανάληψη στα προηγούμενα ξαναερχόμαστε αργότερα στις παραπάνω περιπτώσεις για μερικές πολύ χαρακτηριστικές εφαρμογές .

Εφαρμογή για επανάληψη

Α. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: R \to R$ με $f(0)=2$, για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις :

$$f(x)g(x)=e^{2x} \quad \text{και} \quad f'(x)g'(x)=e^{2x}$$

για κάθε $x \in R$. Να βρείτε τους τύπους των f , g .

Β. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ με $f(1)=0$, $f'(1)=1$ και τέτοια , ώστε $f''(x) \cdot e^{2f(x)}=-1$ για κάθε $x>0$. Να βρείτε την f .

Εφαρμογή 15(γενική).

Δίνεται μια συνάρτηση f , δύο φορές παραγωγίσιμη , με την ιδιότητα :

$f(1)=1$ και $f'(x)=x(4-f''(x))$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Α. Να αποδείξετε ότι :

α) $xf'(x)=2x^2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

β) $f(x)=x^2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Β. Να βρείτε :

α) Τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f που διέρχονται από το σημείο $M(2,-5)$.

β) Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τις παραπάνω δύο εφαπτομένες

ΛΥΣΗ

α) $xf'(x)=2x^2 \Rightarrow (xf'(x))'=(2x^2)' \Rightarrow f'(x)+xf''(x)=4x \Rightarrow f'(x)=x(4-f''(x))$

β) $xf'(x)=2x^2 \Rightarrow \dfrac{xf'(x)}{x}=\dfrac{2x^2}{x} \Rightarrow f'(x)=2x \Rightarrow f(x)=x^2+c$

$$f(1)=1 \Leftrightarrow 1^2+c=1 \Leftrightarrow c=0$$

Άρα $f(x)=x^2$

Εφαρμογή 16

(Η εφαρμογή αυτή αναφέρεται κυρίως στην 4η περίπτωση και έχει το χαρακτήρα γενικού θέματος, μια και προσφέρεται για κάτι τέτοιο. Το ίδιο συμβαίνει και με την επόμενη εφαρμογή.)

Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση f με την ιδιότητα $4f(x)=\left(f'(x)\right)^2+x^2$ για κάθε $x\in R$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2$, $x\in R$.

β) Να αποδείξετε ότι από τα σημεία της ευθείας $\varepsilon: y=-\dfrac{1}{2}$ άγονται δύο κάθετες μεταξύ τους εφαπτομένες προς τη C_f .

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $A=\int_{-1}^{1}\dfrac{f(x)}{e^x+1}dx$.

δ) Ένα σημείο N της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με θετική τετμημένη απομακρύνεται από τον άξονα y'y με ρυθμό $2m/s$.Να βρείτε το ρυθμό που μεταβάλλεται η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο σημείο N με τον άξονα x'x , τη στιγμή που αυτή είναι ίση με 45^o .

Εφαρμογή 17 (γενική).

Δίνεται μια συνάρτηση f , δύο φορές παραγωγίσιμη , με την ιδιότητα :

$$f(1)=1 \quad \text{και} \quad f'(x)=x(4-f''(x)) \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}.$$

A. Να αποδείξετε ότι :

$$xf'(x)=2x^2 \quad \text{, για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}$$

β) $f(x)=x^2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

B. Να βρείτε :

α) Τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f που διέρχονται από το σημείο $M(2,-5)$.

β) Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τις παραπάνω δύο εφαπτομένες

ΛΥΣΗ

Η αρχική σχέση για $x=0$ δίνει $f'(0)=0$.

A.α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε

$$f'(x)=4x-xf''(x)\Leftrightarrow f'(x)+xf''(x)=4x\Leftrightarrow\left[xf'(x)\right]'=\left(2x^2\right)'\Leftrightarrow\exists c\in\mathbb{R}:xf'(x)=2x^2+c,x\in\mathbb{R}$$

Από την τελευταία σχέση για $x=0$ παίρνουμε $c=0$ και συνεπώς $xf'(x)=2x^2,x\in\mathbb{R}$

A.β) Για κάθε $x\neq 0$ είναι

$$xf'(x)=2x^2\Leftrightarrow f'(x)=2x$$

απ' όπου παίρνουμε ότι

$$f(x)=\begin{cases}x^2+c_1,x>0\\x^2+c_2,x<0\end{cases}$$

Από την συνέχεια της f στο $x=0$ λαμβάνουμε

$$f(0)=\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^-}f(x)(*).$$

Είναι,

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=c_1 \text{ και } \lim_{x\to0^-}f(x)=c_2\text{, οπότε } c_1\overset{(*)}{=}c_2$$

Τότε, $f(x)=x^2+c_1,x\neq0$ και $f(1)=1\Rightarrow1+c_1=1\Rightarrow c_1=0$.

Η σχέση $(*)$ τώρα δίνει $f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=0$.

Συνεπώς, $f(x)=x^2, x\in\mathbb{R}$.

Β.α) Η εξίσωση της εφαπτομένης σε τυχόν σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της C_f δίνεται από την σχέση

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow f'(x_0)\cdot x-y+f(x_0)-x_0\cdot f'(x_0)=0.$$

Αναζητούμε εκείνες, των οποίων η εξίσωση επαληθεύεται απο τις συντεταγμένες του σημείου $M(2,-5)$.

Δηλαδή, εκείνες που ικανοποιούν την σχέση $\{2f'(x_0)+5+f(x_0)-x_0\cdot f'(x_0)=0$.

Αντικαθιστώντας βρίσκουμε

$4x_0+5+x_0^2-2x_0^2=0\Leftrightarrow x_0^2-4x_0=5\Leftrightarrow (x_0-2)^2=9\Leftrightarrow (x_0-2=3\vee x_0-2=-3)\Leftrightarrow x_0=5\vee x_0=-1$.

Συνεπώς, τα σημεία είναι τα $A_1(5,25)$ και $A_2(-1,1)$ με αντίστοιχες εξισώσεις τις $(\epsilon_1): y=10x-25$ και $(\epsilon_2): y=-2x-1$.

Β.β) Έχοντας όλα τα παραπάνω και αν E είναι το ζητούμενο εμβαδό, τότε

$$E=\int_0^1\left(f(x)-(-2x-1)\right)dx-\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}(-2x-1)dx+\int_0^1\left(-2x-1-10x+25\right)dx+\int_0^5\left(f(x)-10x+25\right)dx=$$

$$=\int_{-1}^{0}(x+1)^2dx+\left[x^2+x\right]_{-1}^{-\frac{1}{2}}+\int_0^1\left(-12x+24\right)dx+\int_0^5\left(x-5\right)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^{0}+\left[x^2+x\right]_{-1}^{-\frac{1}{2}}+\left[-6x^2+24x\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}(x-5)^2\right]_0^5=\ldots$$

Εφαρμογή 18

Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ έχει την ιδιότητα $f(xy)+f\left(\frac{x}{y}\right)=2f(x)$, για κάθε x, $y>0$.

Αν $f(1)=0$ και $f'(1)=1$, να αποδείξετε ότι:

α) $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=0$, για κάθε $x>0$.

β) $f(x)+\frac{1}{x^2}f'(\frac{1}{x})=\frac{2}{x}$, για κάθε $x>0$.

γ) $f(x)=lnx, x>0$.

ΛΥΣΗ

α) Για $x=1$ θα ισχύει ότι $f(y)+f(\frac{1}{y})=2f(1)=0,\ y>0$ άρα ισχύει ότι $f(x)+f(\frac{1}{x})=0,\ x>0$

β) Για $y=c>0$ ισχύει ότι $f(xc)+f(\frac{x}{c})=2f(x),\ x>0$ και παραγωγίζοντας ως προς x προκύπτει ότι

$cf'(xc)+\frac{1}{c}f'(\frac{x}{c})=2f'(x),\ x>0$ οπότε και για $x=1$ θα ισχύει ότι $cf'(c)+\frac{1}{c}f'(\frac{1}{c})=2f'(1)=2$

Άρα ισχύει ότι $xf'(x)+\frac{1}{x}f'(\frac{1}{x})=2,\ x>0$ άρα και $x^2f'(x)+f'(\frac{1}{x})=2x,\ x>0$

και για όπου x το $\frac{1}{x}$ θα ισχύει ότι $\frac{1}{x^2}f'(\frac{1}{x})+f'(x)=2\frac{1}{x},\ x>0$

γ) Από $\frac{1}{x^2}f'(\frac{1}{x})+f'(x)=2\frac{1}{x},\ x>0$ έχουμε ότι

$\left(-f(\frac{1}{x})\right)'+f'(x)=(2\ln x)',\ x>0$ άρα και $-f(\frac{1}{x})+f(x)=2\ln x+c,\ x>0$

που λόγω του (α) θα έχουμε ότι $2f(x)=2\ln x+c,\ x>0$ και επειδή $f(1)=0$ προκύπτει $c=0$

Άρα $f(x)=\ln x,\ x>0$

Εφαρμογή 19

(Η εφαρμογή αυτή αναφέρεται κυρίως στην 4η περίπτωση και έχει το χαρακτήρα γενικού θέματος, μια και προσφέρεται για κάτι τέτοιο. Το ίδιο συμβαίνει και με την επόμενη εφαρμογή.)

Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση f με την ιδιότητα $4f(x)=\left(f'(x)\right)^2+x^2$ για κάθε $x\in R$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\frac{1}{2}x^2\ ,x\in R$.

β) Να αποδείξετε ότι από τα σημεία της ευθείας $\varepsilon: y=-\frac{1}{2}$ άγονται δύο κάθετες μεταξύ τους εφαπτομένες προς τη C_f .

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $A=\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{e^x+1}dx$.

δ) Ένα σημείο N της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με θετική τετμημένη απομακρύνεται από τον άξονα y'y με ρυθμό $2m/s$.Να βρείτε το ρυθμό που

μεταβάλλεται η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο σημείο N με τον άξονα x'x , τη στιγμή που αυτή είναι ίση με 45^o .

ΛΥΣΗ

α) Προφανώς το σταθερό πολυώνυμο δεν επαληθεύει την ισότητα για κάθε $x \in R$ άρα η f είναι πολυωνυμική ν-στού βαθμού με $\nu \geq 1$

Αν $\nu = 1$ τότε $f(x) = \alpha x + \beta,\ \alpha \neq 0$ και η $f'(x) = \alpha,\ x \in R$ και η δοθείσα θα είναι

$4\alpha x + 4\beta = \alpha^2 + x^2$ που είναι αδύνατο για κάθε $x \in R$

Έτσι η f θα είναι αναγκαία πολυωνυμική βαθμού $\nu \geq 2$ οπότε η f' θα είναι πολυωνυμική $\nu - 1$ βαθμού .

Άρα η $\left(f'(x)\right)^2$ πολυωνυμική $2(\nu-1) \geq 2$ βαθμού και λόγω της ισότητας $4f(x) = (f'(x))^2 + x^2$ θα ισχύει από την ισότητα των βαθμών των πολυωνύμων ότι $\nu = 2(\nu - 1) \Leftrightarrow \nu = 2$ οπότε

$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,\ \alpha \neq 0$ και επειδή $f'(x) = 2\alpha x + \beta$ στην δοθείσα σχέση θα έχουμε

$$4\alpha x^2 + 4\beta x + 4\gamma = (2\alpha x + \beta)^2 + x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\alpha x^2 + 4\beta x + 4\gamma = (4\alpha^2 + 1)x^2 + 4\alpha\beta x + \beta^2$$

και λόγω της ισότητας θα ισχύουν

$$4\alpha = 4\alpha^2 + 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2} \text{ και } 4\beta = 4\alpha\beta \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{2}\beta \Leftrightarrow \beta = 0$$

και $4\gamma = \beta^2 = 0$ επομένως $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2,\ x \in R$

β) Είναι $f'(x) = x$ και από σημείο της $M(x_0, \dfrac{1}{2}x_0^2)$ η εφαπτομένη έχει εξίσωση

$$y - \frac{1}{2}x_0^2 = x_0(x - x_0) \Leftrightarrow y = x_0 x - \frac{1}{2}x_0^2$$

\ και αν περνάει από σημείο $(\kappa, -\dfrac{1}{2})$ της $y = -\dfrac{1}{2}$ θα ισχύει ότι

$$-\frac{1}{2} = x_0\kappa - \frac{1}{2}x_0^2 \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0\kappa - 1 = 0$$

Επειδή η εξίσωση

$x^2-2\kappa x-1=0$ έχει διακρίνουσα $\Delta=4\kappa^2+4>0$ θ έχει πάντα δύο ρίζες , έστω x_1,x_2

που λόγω Vieta θα έχουν γινόμενο $x_1x_2=-1$ δηλαδή θα ισχύει ότι $f'(x_1)f'(x_2)=-1$

που σημαίνει ότι οι εφαπτόμενες στα σημεία με τετμημένες x_1,x_2 είναι κάθετες.

γ) Με $u=-x$ είναι $du=-dx$ και για $x=-1\to u=1,\ x=1\to u=-1$ και το

$$A=\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{e^x+1}dx=\int_{1}^{-1}\frac{f(-x)}{e^{-x}+1}(-du)=\int_{-1}^{1}\frac{f(x)e^x}{e^x+1}dx=B$$

Έτσι έχουμε $A+B=\int_{-1}^{1}\frac{f(x)(e^x+1)}{e^x+1}dx\Leftrightarrow 2A=\int_{-1}^{1}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x^2dx\Leftrightarrow ....\Leftrightarrow A=\frac{1}{6}$

δ) Γνωρίζουμε ότι $x'(t)=2$ και έστω ω η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη στο σημείο N τότε θα ισχύει ότι

$\varepsilon\varphi\omega=f'(x)=x>0$ και τότε για κάθε χρονική στιγμή θα ισχύει ότι $\varepsilon\varphi(\omega(t))=x(t)$

Άρα, παραγωγίζοντας, θα ισχύει ότι $(1+\varepsilon\varphi^2(\omega(t)))\omega'(t)=x'(t)$ και την χρονική στιγμή που

$\omega(t_0)=\frac{\pi}{4}$ θα είναι $(1+1)\omega'(t_0)=2\Leftrightarrow\omega'(t_0)=1$

Εφαρμογή 20 (για επανάληψη)

Α. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f,g:R\to R$ με $f(0)=2$, για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις :

$$f(x)g(x)=e^{2x} \quad \text{και} \quad f'(x)g'(x)=e^{2x}$$

για κάθε $x\in R$. Να βρείτε τους τύπους των f , g .

Λύση

Είναι $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{g(x)}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{2e^{2x}\cdot g(x)-e^{2x}\cdot g'(x)}{g^2(x)}$.Άρα η $f'(x)g'(x)=e^{2x}$ γίνεται

$$\frac{2e^{2x}\cdot g(x)-e^{2x}\cdot g'(x)}{g^2(x)}g'(x)=e^{2x}\Leftrightarrow\left(2g(x)-g'(x)\right)\cdot g'(x)=g^2(x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2g(x)\cdot g'(x)-\left(g'(x)\right)^2=g^2(x)\Leftrightarrow g^2(x)-2g(x)\cdot g'(x)+\left(g'(x)\right)^2=0\Leftrightarrow\left(g(x)-g'(x)\right)^2=0\Leftrightarrow g(x)=g'(x)\Leftrightarrow g(x)=ce^x$$

Άρα η σχέση $f(x)g(x)=e^{2x}$ γίνεται :

$f(x)\cdot c\cdot e^x=e^{2x}$ και για $x=0$ έχουμε $c=\dfrac{1}{2}$.Επομένως $f(x)=2e^x$ και $g(x)=\dfrac{e^x}{2}$

που επαληθεύουν τις αρχικές σχέσεις .

Β. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to R$ με $f(0)=0$, $f'(0)=1$ και τέτοια , ώστε $f''(x)\cdot e^{2f(x)}=-1 \quad (1)$ για κάθε $x\ge 0$. Να βρείτε την f .

Λύση

Είναι

$$f''(x)\cdot e^{2f(x)}=-1\Leftrightarrow \quad f''(x)=-e^{-2f(x)} \quad \overset{\varepsilon\pi\iota\ f'(x)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 2f''(x)\cdot f'(x)=-e^{-2f(x)}\cdot 2f'(x)\Leftrightarrow \quad \left[\left(f'(x)\right)^2\right]'=\left(e^{-2f(x)}\right)'\Leftrightarrow \quad \left(f'(x)\right)^2=e^{-2f(x)}+c_1$$

Για $x=0$ έχουμε $c_1=0$.Άρα

$$\left(f'(x)\right)^2=e^{-2f(x)}\Leftrightarrow 2f'(x)\cdot f'(x)\cdot e^{2f(x)}=2\Leftrightarrow f'(x)\cdot\left(e^{2f(x)}\right)'=2\ (2)$$

Από (1) ,(2) έχουμε

$$f''(x)\cdot e^{2f(x)}+f'(x)\cdot\left(e^{2f(x)}\right)'=1\Leftrightarrow\left(f'(x)\cdot e^{2f(x)}\right)'=(x)'\Leftrightarrow f'(x)\cdot e^{2f(x)}=x+c_2$$

Για $x=0$ έχουμε $c_2=1$

$$f'(x)\cdot e^{2f(x)}=x+1 \Leftrightarrow 2f'(x)\cdot e^{2f(x)}=2x+2 \Leftrightarrow \left(e^{2f(x)}\right)'=\left(x^2+2x\right)' \Leftrightarrow e^{2f(x)}=x^2+2x+c_3$$

Για $x=0$ έχουμε $c_3=1$

$$e^{2f(x)}=x^2+2x+1 \Leftrightarrow \ln e^{2f(x)}=\ln\left(x+1\right)^2 \Leftrightarrow 2f(x)=2\ln\left|x+1\right| \overset{x>0}{\Leftrightarrow} f(x)=\ln\left(x+1\right)$$

που επαληθεύει την αρχική σχέση .

Εφαρμογή 21

(Για την 4η περίπτωση : Είναι η πιο εύκολη περίπτωση να ξεκινήσει κάποιος να στήνει ένα θέμα.)

Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ με την ιδιότητα $2f(x) + f(1-x) = 3x^2 - 2x + 4$ για κάθε πραγματικό αριθμό x .

A. Να αποδειχθεί ότι :

α) $2f(1-x) + f(x) = 3x^2 - 4x + 5$

β) ο τύπος της f δίνεται από τη σχέση $f(x) = x^2 + 1$

B. Δύο εφαπτόμενες της C_f διέρχονται από το σημείο $M(3,9)$. Να βρείτε :

α) τα σημεία επαφής της C_f με τις εφαπτόμενες αυτές.

β) τις εξισώσεις των εφαπτόμενων αυτών και το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα σε αυτές και τη γραφική παράσταση.

Εφαρμογή 22

Μια νεοσύστατη ..."ανθρώπινη" άσκηση με βασικές γνώσεις και ωραία βήματα στην εύρεση, μάλλον για Θέμα Δ. Τη συνέθεσα μόλις χθες με αφορμή ένα πρόβλημα από το G.M.

Δίνονται οι γνησίως μονότονες και παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f: R \to R$ με τις ιδιότητες :

$$2\int_0^x f(t)dt = g^2(x) \text{ και } 2\int_0^x g(t)dt = f^2(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f = g$

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

γ) Να υπολογίσετε τα όρια:

$$A = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x^2)}{f(x^2)+\eta\mu x+1} \quad , \quad B = \lim_{x\to+\infty}\left(x^2(\sigma\upsilon\nu\frac{1}{f(x)}-1)\right) \quad , \quad \Gamma = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-f(x)}{f(x)-\eta\mu x}\right)^2$$

δ) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{3f^2(x)}{e^x+1}dx \text{ και } J=\int_{-1}^{1}f^{2013}(x)\ln(1+e^x)dx$$

Λύση

α) Καταρχάς εύκολα $f(0)=g(0)=0$. Παραγωγίζοντας προκύπτει:

$$f(x)=g(x)\cdot g'(x)\Rightarrow f(x)\cdot g(x)=g^2(x)\cdot g'(x)$$

και

$$g(x)=f'(x)\cdot f(x)\Rightarrow f(x)\cdot g(x)=f^2(x)\cdot f'(x).$$

Επομένως ισχύει

$$3g^2(x)\cdot g'(x)=3f^2(x)f'(x)\Rightarrow\left(g^3(x)\right)'=\left(f^3(x)\right)'\Rightarrow$$

$\Rightarrow g^3(x)=f^3(x)+c$ και αφού $g(0)=f(0)$ προκύπτει ότι $g^3(x)=f^3(x)\Rightarrow g(x)=f(x)$.

β) Ισχύει $f(x)=f(x)\cdot f'(x)$. Επειδή f γνησίως μονότονη και $f(0)=0$, το $x_0=0$ είναι η μοναδική της ρίζα. Επομένως είναι $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $f'(x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$, δηλαδή ότι $f(x)=x+c_1$ για $x>0$ και $f(x)=x+c_2$ για $x<0$, ενώ $f(0)=0$.

Λόγω της συνέχειας της f προκύπτει ότι $c_1=c_2=0$.Άρα $f(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) Ισχύει $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{\sin x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}}=1$. Επίσης βρίσκουμε με τις γνωστές τεχνικές ότι

$$B=\lim_{u\to 0}\frac{\cos u-1}{u^2}=-\frac{1}{2} \qquad \text{και} \qquad \Gamma=+\infty.$$

δ) Είναι $I=\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{3x^2}{e^x+1}dx$ και κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $u=-x$ προκύπτει ότι $I=\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{3u^2e^u}{e^u+1}du$.

Επομένως :

$$2I=\int_{-1}^{1}3x^2dx=2\Rightarrow I=1.$$

Το ολοκλήρωμα J υπολογίζεται με την ίδια λογική, αφού μετά την αντικατάσταση και τις σχετικές πράξεις, το ολοκλήρωμα επανεμφανίζεται..