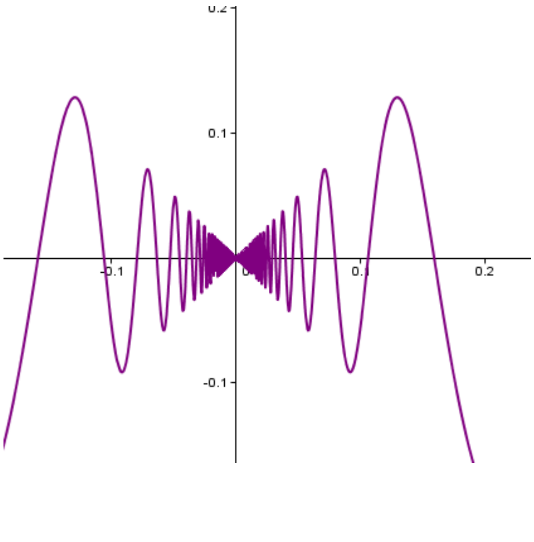
Μπάμπης Στεργίου



Η Αρχική Συνάρτηση

- Προτάσεις
- Παραδείγματα
- Ασκήσεις

2016

*** Αφιερωμένο στους συναδέλφους που μοχθούν για μια καλύτερη παιδεία .

Προτάσεις και ασκήσεις στην αρχική συνάρτηση

Μπάμπης Στεργίου – Ιανουάριος 2016

Α. Η έννοια της αρχικής - Τα πρώτα θεωρήματα

Στην έννοια της αρχικής υπάρχουν αξιόλογες προτάσεις, ορισμένες από τις οποίες θα προσπαθήσουμε να συγκεντρώσουμε στις σελίδες που ακολουθούν.

Ορισμός

Έστω Δ ένα διάστημα και f μια συνάρτηση ορισμένη στο Δ. Θα λέμε ότι η συνάρτηση F είναι μια **αρχική**(ή παράγουσα ή αντιπαράγωγος) της f στο Δ, αν και μόνο αν η F είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και ισχύει :

$$F'(x)=f(x)\ \text{, για κάθε } x\in\Delta$$

Ξεκινάμε με τρεις βασικές διαπιστώσεις που τις συναντάμε σε όλη την έκταση της παρούσας προσπάθειας.

- ♦ **Όλες οι συνεχείς συναρτήσεις σε διάστημα έχουν αρχική.**
- ♦ **Υπάρχουν μη συνεχείς συναρτήσεις ,ορισμένες σε διάστημα Δ που έχουν αρχική.**
- ♦ **Υπάρχουν συναρτήσεις που δεν είναι συνεχείς και δεν έχουν αρχική.**

Στη συνέχεια παρουσιάζονται μερικές χρήσιμες προτάσεις που αφορούν την αρχική συνάρτηση καθώς και κριτήρια για την ύπαρξή της ή τη μη ύπαρξή της.

Πρόταση 1.

Αν F, G είναι αρχικές της συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ, τότε οι αρχικές αυτές διαφέρουν κατά μία σταθερά, δηλαδή :

$$F(x)=G(x)+c \quad \text{για κάθε } x\in\Delta .$$

Πρόταση 2.

Αν μια συνάρτηση f έχει αρχική σε ένα διάστημα Δ, τότε αυτή έχει την ιδιότητα Darboux .

Επομένως, άμεσα προκύπτει ότι :

Πρόταση 3.

Αν μια συνάρτηση f δεν έχει την ιδιότητα Darboux σε ένα διάστημα Δ, τότε δεν έχει αρχική .

Από την πρόταση αυτή συμπεραίνουμε ότι :

Πρόταση 4.

- ♦ Αν για τη συνάρτηση f στο διάστημα Δ , η εικόνα $f(\Delta)$ δεν είναι διάστημα, τότε αυτή δεν έχει αρχική .
- ♦ Αν για τη συνάρτηση f στο διάστημα Δ υπάρχει υποδιάστημα I , ώστε το $f(I)$ δεν είναι διάστημα, τότε η f δεν έχει αρχική.

Εφαρμογή 1.

Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 1\ , & x<0 \\ -1\ , & x\geq 0 \end{cases}$ δεν έχει αρχική.

Απόδειξη

Η συνάρτηση f έχει προφανώς σύνολο τιμών το $\{-1,+1\}$ που δεν είναι διάστημα. Επομένως η συνάρτηση αυτή δεν έχει αρχική.

Μπορούμε όμως να κάνουμε απόδειξη και με άτοπο. Υποθέτουμε λοιπόν ότι η f έχει αρχική , οπότε τελικά καταλήγουμε σε άτοπο, διότι η αρχική είναι παραγωγίσιμη ■ .

Για τις συνεχείς συναρτήσεις ισχύει η επόμενη θεμελιώδης πρόταση :

Πρόταση 5.

Κάθε συνεχής συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ έχει αρχική.

Έτσι, αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο Δ, τότε η αρχική F της f με $F(a)=b$ είναι η

$$F(x)=b+\int_a^x f(t)dt\ ,\ x\in\Delta \quad \text{με} \quad a\in\Delta \quad (1)$$

Βασική επισήμανση

Τονίζουμε στο σημείο αυτό ότι ακόμα και αν η f είναι συνεχής στο διάστημα Δ, η τυχαία αρχική F της f δεν είναι υποχρεωτικά της μορφής $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ για κάποιο $a\in\Delta$.

Με άλλα λόγια ο γενικός τύπος $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ δεν δίνει όλες τις αρχικές της f στο Δ.

Για παράδειγμα, αν $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$, τότε η $F(x)=2+\eta\mu x$ είναι αρχική της f στο $\mathbb{R}$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει a, ώστε

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

Θα ισχύει τότε ότι :

$$2+\eta\mu x=\int_a^x f(t)dt \Leftrightarrow 2+\eta\mu x=\int_a^x \sigma\upsilon\nu t dt \Leftrightarrow 2+\eta\mu x=[\eta\mu t]_a^x \Leftrightarrow 2+\eta\mu x=\eta\mu x-\eta\mu a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu a=-2$$

Η τελευταία όμως εξίσωση είναι αδύνατη, κάτι που αποδεικνύει τον παραπάνω ισχυρισμό.

Ας παρατηρήσουμε ότι επειδή $F(0)=2$, η F μπορεί να πάρει τη μορφή :

$$F(x)=2+\int_0^x \eta\mu t dt$$

κάτι που το συμπεραίνουμε αμέσως από την απλή αλλά βασική σχέση (1).

Εφαρμογή 2.

Να βρείτε όλες τις αρχικές της συνάρτησης $f(x)=\begin{cases} 2x+1, & x<0 \\ \sigma\upsilon\nu x, & x\geq 0 \end{cases}$

Λύση

- Στο διάστημα $(-\infty,0)$ μια αρχική της f είναι η x^2+x.
- Στο διάστημα $[0,+\infty)$ μια αρχική της f είναι η $\eta\mu x$.

Αν λοιπόν F είναι μια αρχική της f στο $D_f=R$, θα ισχύει ότι :

$$F(x)=\begin{cases} x^2+x+c_1, & x<0 \\ \eta\mu x+c_2, & x\geq 0 \end{cases}$$

Όμως η F πρέπει να είναι συνεχής και στο 0, ως παραγωγίσιμη, οπότε βρίσκουμε :

$$\lim_{x\to 0^-} F(x)=\lim_{x\to 0^+} F(x)=F(0) \Leftrightarrow c_1=c_2$$

Άρα οι αρχικές της f είναι οι συναρτήσεις της μορφής :

$$F(x)=\begin{cases} x^2+x+c, & x<0 \\ \eta\mu x+c, & x\geq 0 \end{cases}, \text{ με } c\in\mathbb{R}$$

αφού εύκολα διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση αυτή είναι παραγωγίσιμη και στο 0.

Σχόλιο:

Ο έλεγχος για την παραγωγισιμότητα της f στο 0 μπορεί και να παραληφθεί στην περίπτωσή μας , διότι η f είναι συνεχής .Σε σχολικό επίπεδο είναι καλύτερα ο μαθητής να επαληθεύει την παραγωγισιμότητα, μια και αυτός δεν διαθέτει ως θεωρία το σχετικό θεώρημα που εξασφαλίζει την ύπαρξη της παραγώγου στο σημείο αλλαγής (τονίζουμε : για συνεχείς συναρτήσεις!) ■

Όλες λοιπόν οι συνεχείς συναρτήσεις έχουν αρχική. Αλλά μόνο οι συνεχείς συναρτήσεις έχουν αρχική ; Η απάντηση είναι αρνητική: Υπάρχουν και μη συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα που έχουν αρχική. Δυο τέτοιες συναρτήσεις είναι οι παρακάτω :

$$f(x)=\begin{cases} ημ\dfrac{1}{x} \ , \ x\neq 0 \\ 0 \ , \ x=0 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x)=\begin{cases} συν\dfrac{1}{x} \ , \ x\neq 0 \\ 0 \ , \ x=0 \end{cases}$$

Οι συναρτήσεις αυτές δεν είναι συνεχείς , αποδεικνύεται όμως ότι έχουν αρχική. Ας αναφέρουμε ακόμα ότι συναρτήσεις :

$$f(x)=\begin{cases} ημ\dfrac{k}{x} \ , \ x\neq 0 \\ a \ , \ x=0 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x)=\begin{cases} συν\dfrac{k}{x} \ , \ x\neq 0 \\ a \ , \ x=0 \end{cases}$$

με $a\in[-1,1]$ και $k\neq 0$ έχουν την ιδιότητα Darboux , όμως έχουν αρχική μόνο για $a=0$.

Εφαρμογή 3.

Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} συν\dfrac{1}{x} \ , \ x\neq 0 \\ 0 \ , \ x=0 \end{cases}$ έχει αρχική.

Λύση

Ξεκινάμε με τη συνάρτηση, η οποία όπως θα φανεί δεν επιλέγεται αυθαίρετα.

$$G(x)=\begin{cases} x^2ημ\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0 \ , \ x=0 \end{cases}$$

Η παράγωγος της G είναι η συνάρτηση :

$$g(x)=\begin{cases} 2xημ\dfrac{1}{x}-συν\dfrac{1}{x}, \ x\neq 0 \\ 0 \quad , \ x=0 \end{cases}$$

Ο λόγος λοιπόν που επιλέξαμε την G είναι διότι η παράγωγός της g εμφανίζει ως όρο την f.

Παρατηρούμε ότι $f = h - g$. Η συνάρτηση $h(x)=\begin{cases} 2x\eta\mu\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0 \quad\quad , x=0 \end{cases}$ είναι όμως συνεχής , οπότε η συνάρτηση :

$$f(x)=h(x)-g(x)=\begin{cases} \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0 , x=0 \end{cases}$$

έχει αρχική ,διότι τόσο η h όσο και η g έχουν αρχική(αφού η πρώτη είναι συνεχής και η δεύτερη έχει αρχική την G). Η συνάρτηση λοιπόν f έχει αρχική, χωρίς να είναι συνεχής ■

Ένα **πολύ σημαντικό** και απλό συγχρόνως κριτήριο για να διαπιστώσουμε ότι μια συνάρτηση δεν έχει αρχική, είναι το παρακάτω:

Πρόταση 6 (Βασική).

♦ Αν για μια συνάρτηση f που δεν είναι συνεχής στο $x_0 \in \Delta$, ένα τουλάχιστον από τα πλευρικά της όρια στο x_0 (εφόσον ορίζονται) , άπειρο ή πεπερασμένο , υπάρχει και είναι διάφορο του $f(x_0)$, τότε η συνάρτηση αυτή δεν έχει αρχική στο διάστημα Δ.

♦ Αν για τη συνάρτηση f το ένα από τα πλευρικά όρια στο $x_0 \in \Delta$ είναι πεπερασμένο και το άλλο είναι ίσο με $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η συνάρτηση αυτή δεν έχει αρχική στο Δ.

♦ Αν για τη συνάρτηση f το ένα τουλάχιστον από τα πλευρικά όρια στο $x_0 \in \Delta$ είναι ίσο με $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η συνάρτηση αυτή δεν έχει αρχική στο Δ.

Οι παραπάνω ιδιότητες πηγάζουν από το γεγονός ότι μια τέτοια συνάρτηση δεν έχει την ιδιότητα Darboux. Στην πραγματικότητα η πρόταση αυτή αποτελεί ένα ισχυρό εργαλείο για το διδάσκοντα, ώστε με γρήγορο και σχολικό τρόπο να αποφαίνεται αν μια συνάρτηση δεν έχει αρχική.

Εφαρμογή 4.

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x+e^{x^2} & , x<0 \\ x^2+2 & , x\geq 0 \end{cases}$ έχει αρχική.

Λύση

Η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x+e^{x^2} & , x<0 \\ x^2+2 & , x\geq 0 \end{cases}$$

δεν έχει αρχική, διότι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1\neq f(0)=2$ ■

Γίνεται λοιπόν φανερό ότι για τη σχολική τάξη και τον καθηγητή το παραπάνω κριτήριο είναι πρακτικό και αποτελεσματικό, διότι μπορεί με μία ματιά να καταλάβει αν μια συνάρτηση δεν έχει αρχική.

Ορισμός

Αν τα πλευρικά όρια της f στο x_0 είναι και τα δύο πεπερασμένα και ένα τουλάχιστον από αυτά είναι διαφορετικό από το $f(x_0)$, τότε το x_0 λέγεται σημείο ασυνέχειας **πρώτου είδους**.

Αν λοιπόν η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο $x_0\in\Delta$, τότε για να έχει αρχική πρέπει ή τα πλευρικά όρια στο x_0 να μην υπάρχουν ή το ένα τουλάχιστον από αυτά να είναι άπειρο. Θα δούμε πιο κάτω τι μπορεί να συμβεί αν ένα πλευρικό όριο είναι άπειρο.
Προφανώς οι παραπάνω συνθήκες είναι αναγκαίες , όχι όμως και ικανές. Τέτοια σημεία ασυνέχειας λέγονται **δευτέρου είδους**. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι :

Πρόταση 7.

Τα σημεία ασυνέχειας μιας μη συνεχούς συνάρτησης που έχει αρχική σε ένα διάστημα Δ είναι δευτέρου είδους.
Αυτό σημαίνει ότι αν η συνάρτηση f έχει αρχική , τότε ή τα πλευρικά όρια στο x_0 δεν υπάρχουν ή ότι το ένα τουλάχιστον από αυτά είναι άπειρο .

Β. Η αρχική αθροίσματος συναρτήσεων

Πρόταση 8.

Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν αρχική σε ένα διάστημα Δ, τότε :

- Η συνάρτηση $f+g$ έχει αρχική στο Δ.
- Η συνάρτηση $f-g$ έχει αρχική στο Δ.
- Η συνάρτηση λf έχει αρχική για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Αν η συνάρτηση f έχει αρχική και η g δεν έχει αρχική, τότε οι συναρτήσεις $f+g, f-g$ δεν έχουν αρχική στο Δ.

Εφαρμογή 5.

Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$ δεν έχει αρχική.

Λύση

Παρατηρούμε ότι :

$$f(x)=\underbrace{\begin{cases} \sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}}_{\text{Έχει αρχική}}+\underbrace{\begin{cases} 0, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}}_{\text{Δεν έχει αρχική}}$$

Επομένως, σύμφωνα με την **πρόταση 8**, η f δεν έχει αρχική. Είναι φανερό ότι το ίδιο ισχύει και στην περίπτωση που $f(x)=\begin{cases} \sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ \alpha, & x=0 \end{cases}$ με $\alpha\neq 0$, αν και μια τέτοια συνάρτηση με $\alpha\in[-1,1]$ έχει την ιδιότητα Darboux ■

Εφαρμογή 6.

Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \sigma\upsilon\nu^2\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ δεν έχει αρχική.

Λύση

Παρατηρούμε ότι :

$$f(x)=\begin{cases}συν^2\frac{1}{x}, x\neq 0\\ 0,\ \ x=0\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2}(1+συν\frac{2}{x}), x\neq 0\\ 0,\ \ x=0\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}, x\neq 0\\ 0,\ \ x=0\end{cases}+\frac{1}{2}\begin{cases}συν\frac{2}{x}, x\neq 0\\ 0,\ \ x=0\end{cases}$$

Στο άθροισμα αυτό , η πρώτη συνάρτηση δεν έχει αρχική διότι το σύνολο τιμών της δεν είναι διάστημα , ενώ η δεύτερη έχει αρχική. Άρα, σύμφωνα με την πρόταση 8 η f δεν έχει αρχική.

Για τους μαθητές μας υπενθυμίζουμε ότι στη λύση χρησιμοποιήσαμε τον τύπο αποτετραγωνισμού :

$$συν^2α=\frac{1+συν2α}{2}$$

Με αφορμή της παραπάνω εφαρμογή, αξίζει να τονίσουμε ότι :

Αν δύο συναρτήσεις έχουν αρχική, τότε το γινόμενό τους δεν έχει υποχρεωτικά αρχική.

Εφαρμογή 7.

Αν η συνάρτηση f έχει αρχική στα διαστήματα $(α,β]$, $[β,γ)$ τότε έχει αρχική στο $(α,β)$

Λύση

Αν G είναι αρχική της f στο $(α,β]$ και H είναι αρχική της f στο $[β,γ)$, τότε βασιζόμενοι στη συνέχεια της αρχικής F της f στο σημείο $β$ καταλήγουμε στη συνάρτηση :

$$F(x)=\begin{cases}G(x), x\in(α,β)\\ G(β)\quad ,\ \ x=β\\ H(x)+G(β)-H(β), x\in(β,γ)\end{cases}$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η F έχει παράγωγο την f , αφού :

- $\lim\limits_{x\to β^-}\frac{F(x)-F(β)}{x-β}=\lim\limits_{x\to β^-}\frac{G(x)-G(β)}{x-β}=G'(β)=f(β)$
- $\lim\limits_{x\to β^+}\frac{F(x)-F(β)}{x-β}=\lim\limits_{x\to β^+}\frac{H(x)-H(β)}{x-β}=H'(β)=f(β)$

Επομένως είναι και $F'(β)=f(β)$ και η απόδειξη ολοκληρώνεται.

Γ. Πράξεις με συναρτήσεις και ύπαρξη αρχικής

Μερικές ακόμα προτάσεις που αφορούν την ύπαρξη ή μη παράγουσας μιας συνάρτησης σε ένα διάστημα , είναι οι παρακάτω :

Πρόταση 9.

Έστω f, g δυο συναρτήσεις ορισμένες σε ένα διάστημα Δ που ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες :

α) Η συνάρτηση f έχει αρχική στο Δ,

β) Η συνάρτηση g διαφέρει από την f στα σημεία ενός πεπερασμένου συνόλου A, δηλαδή

$$f(x) \neq g(x), x \in A,$$

ενώ είναι ίση με την f στα υπόλοιπα σημεία , δηλαδή $f(x) = g(x), x \in \Delta - A$.

Τότε η συνάρτηση g δεν έχει αρχική στο Δ.

Η παραπάνω πρόταση είναι πολύ χρήσιμη στις εφαρμογές, δηλαδή αποτελεί ένα σπουδαίο εργαλείο για να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση δεν έχει αρχική.

Πρόταση 10.

Έστω f, g δυο συναρτήσεις ορισμένες σε ένα διάστημα Δ .Αν η f έχει αρχική και η g έχει συνεχή παράγωγο στο Δ, τότε η συνάρτηση $f \cdot g$ έχει αρχική στο Δ.

Πρόταση 11.

α) Αν μια συνάρτηση f έχει αρχική στο διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό ενώ η συνάρτηση g είναι συνεχής στο Δ, τότε το γινόμενο $f \cdot g$ των συναρτήσεων αυτών έχει αρχική στο Δ.

β) Αν μια συνάρτηση f έχει αρχική στο διάστημα Δ και είναι φραγμένη ενώ η συνάρτηση g είναι συνεχής στο Δ, τότε το γινόμενο $f \cdot g$ των συναρτήσεων αυτών έχει αρχική στο Δ.

γ) Αν δύο συναρτήσεις έχουν αρχική και ορίζεται η σύνθεσή τους , τότε η σύνθεσή τους δεν είναι απαραίτητο να έχει αρχική.

Στην πρόταση γ) αναφέρουμε για παράδειγμα ότι , οι συναρτήσεις

$$f(x)=x^2 \quad \text{και} \quad g(x)=\begin{cases} \text{συν}\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$$

έχουν αρχική , ενώ η σύνθεσή τους :

$$(f\circ g)(x)=\begin{cases} \text{συν}^2\dfrac{1}{\chi}, x\neq 0 \\ 0\ ,\ x=0 \end{cases},$$

δεν έχει αρχική (Βλέπε εφαρμογή 5).

Ισχύει όμως το επόμενο θεώρημα , που εξασφαλίζει ικανές συνθήκες , ώστε η σύνθεση να έχει αρχική .

Πρόταση 12.

Αν η συνάρτηση $f: IR \to IR$ έχει αρχική ενώ η συνάρτηση g έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο διάστημα Δ με $g'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Delta$, τότε η συνάρτηση $f\circ g$ έχει αρχική στο Δ.

Απόδειξη

Έστω F μια αρχική της f ..Η συνάρτηση $F\circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ , με

$$(F\circ g)'(x)=F'(g(x))\cdot g'(x)=f(g(x))\cdot g'(x)=(f\circ g)(x))\cdot g'(x)$$

Επομένως παίρνουμε :

$$(f\circ g)(x)=\frac{1}{g'(x)}\cdot(F\circ g)'(x).$$

Επειδή λοιπόν η $(F\circ g)'$ έχει αρχική και η $\dfrac{1}{g'(x)}$ έχει συνεχή παράγωγο, από την πρόταση 10 προκύπτει ότι και η συνάρτηση $f\circ g$ έχει αρχική στο Δ.

Σχόλιο

Η πρόταση δεν ισχύει ,αν δεν ικανοποιούνται όλες οι συνθήκες. Για παράδειγμα :

Αν $f(x)=x^2$ και $g(x)=\begin{cases} \text{ημ}\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$, τότε η συνάρτηση $(f\circ g)=\begin{cases} \text{ημ}^2\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$

δεν έχει αρχική, αφού δεν ικανοποιούνται όλες οι προϋποθέσεις του θεωρήματος.

Αρχική γινομένου και σύνθεσης συναρτήσεων Συγκεντρωτικός πίνακας

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται συστηματοποιημένα μερικές πολύ ενδιαφέρουσες προτάσεις για την ύπαρξη αρχικής του γινομένου και της σύνθεσης δύο συναρτήσεων.

Στη δεύτερη και Τρίτη στήλη δίνονται οι προϋποθέσεις και στην τελευταία το συμπέρασμα.

Πίνακας

<table>
<tr><th></th><th>Η συνάρτηση f</th><th>Η συνάρτηση g</th><th>Συμπέρασμα</th></tr>
<tr><td rowspan="6">Αν</td><td>Έχει αρχική .</td><td>Είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο.</td><td rowspan="5">Η συνάρτηση $f \cdot g$ έχει αρχική</td></tr>
<tr><td>Έχει αρχική και δε μηδενίζεται.</td><td>Είναι συνεχής.</td></tr>
<tr><td>Έχει αρχική και είναι φραγμένη.</td><td>Είναι συνεχής.</td></tr>
<tr><td>Έχει αρχική</td><td>Είναι παραγωγίσιμη και γνησίως μονότονη.</td></tr>
<tr><td>Έχει αρχική.</td><td>Είναι συνεχής και γνησίως μονότονη.</td></tr>
<tr><td>Είναι δυο φορές παραγωγίσιμη με $f'(x) \neq 0$ και έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο.</td><td>Έχει αρχική.</td><td>Η συνάρτηση $g \circ f$ έχει αρχική</td></tr>
</table>

Δ. Το θεώρημα Darboux και η ύπαρξη αρχικής

Ορισμός :

Θα λέμε ότι μια συνάρτηση f που είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ έχει την **ιδιότητα Darboux**, αν για κάθε $\alpha, \beta \in \Delta$ με $\alpha<\beta$ και για κάθε γ ανάμεσα στα $f(\alpha), f(\beta)$, υπάρχει $\delta \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\delta)=\gamma$.

Οι σταθερές συναρτήσεις έχουν όλες την ιδιότητα Darboux , διότι ικανοποιείται προφανώς (από τυπικής - λογικής πλευράς) ο παραπάνω ορισμός.

Προτάσεις στις συναρτήσεις Darboux

Πρόταση 13.

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση αυτή έχει την ιδιότητα Darboux στο διάστημα Δ.

Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα. Υπάρχουν δηλαδή συναρτήσεις που έχουν την ιδιότητα Darboux, αλλά δεν είναι συνεχείς.
Στη συνέχεια αναφέρουμε ορισμένα θεμελιώδη συμπεράσματα, το πρώτο από τα οποία διατυπώνεται στο παρακάτω θεώρημα.

Πρόταση 14.

Μια συνάρτηση f έχει σε ένα διάστημα Δ την ιδιότητα Darboux αν και μόνο , αν το σύνολο $f(I)$ είναι διάστημα , για κάθε υποδιάστημα I του Δ.

Εδώ να σημειώσουμε ότι στην έκταση αυτού του κειμένου , τα μονοσύνολα τα θεωρούμε και ως διαστήματα, προκειμένου να αποφύγουμε το διαχωρισμό περιπτώσεων.
Ισχύουν επίσης τα εξής θεωρήματα :

Πρόταση 15.

♦ Αν μια συνάρτηση f έχει την ιδιότητα Darboux στο διάστημα (α,β) και $f(\alpha)f(\beta)<0$, τότε η f μηδενίζεται σε ένα τουλάχιστον σημείο του (α,β) .

♦ Αν μια συνάρτηση f έχει την ιδιότητα Darboux στο διάστημα Δ και δε μηδενίζεται στο διάστημα αυτό, τότε αυτή διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ.

Αυτό σημαίνει ότι :

$$f(x)>0 \text{ για κάθε } x\in\Delta \quad ή \quad f(x)<0 \text{ για κάθε } x\in\Delta .$$

Πρόταση 16.

♦ Αν μια συνάρτηση f έχει την ιδιότητα Darboux στο διάστημα Δ και είναι γνησίως μονότονη είναι συνεχής στο διάστημα Δ

♦ Αν μια συνάρτηση f έχει την ιδιότητα Darboux στο διάστημα Δ και είναι $1-1$, τότε είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα Δ .

♦ Αν μια συνάρτηση f έχει την ιδιότητα Darboux στο διάστημα Δ και είναι $1-1$, τότε είναι συνεχής στο διάστημα Δ.

♦ Αν μια συνάρτηση f έχει την ιδιότητα Darboux στο διάστημα Δ και υπάρχει κάποιο από τα πλευρικά όρια της f στο $x_0\in\Delta$, τότε αυτό είναι ίσο με $f(x_0)$.

Ε. Το θεώρημα Darboux και η αρχική συνάρτηση

Ας έρθουμε τώρα να δούμε τι σχέση έχει η ύπαρξη αρχικής με το θεώρημα Darboux. Για να απαντήσουμε το ερώτημα αυτό, θα αναφέρουμε το εξής σπουδαίο θεώρημα που αφορά την παράγωγο μιας συνάρτησης :

Πρόταση 17.

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα , τότε η παράγωγός της έχει την ιδιότητα Darboux στο διάστημα αυτό .

Θεώρημα - Darboux

Σύμφωνα λοιπόν με το θεώρημα του Darboux η παράγωγος μιας συνάρτησης είναι μια ιδιόμορφη συνάρτηση, πιο πλούσια ορισμένες φορές από την ίδια τη συνάρτηση. Βλέπουμε δηλαδή ότι αν η παράγωγος μια συνάρτησης ορισμένη σε διάστημα παίρνει δύο τιμές, τότε παίρνει και όλες τις ενδιάμεσες. Τονίζουμε ότι αναφερόμαστε πάντα σε διαστήματα .Εξαίρεση αποτελεί όμως το γεγονός ότι ενώ η συνάρτηση f , ως παραγωγίσιμη είναι συνεχής, η παράγωγος συνάρτηση δεν είναι υποχρεωτικά συνεχής . Γενικότερα ισχύει η εξής πρόταση:

Πρόταση 18.

Μια συνάρτηση μπορεί να έχει την ιδιότητα Darboux σε ένα διάστημα Δ , χωρίς να είναι συνεχής στο διάστημα Δ.

Έστω ότι η συνάρτηση f έχει αρχική την F στο διάστημα Δ. Αφού η f είναι η παράγωγος της F , δηλαδή $f = F'$ και η F' έχει την ιδιότητα Darboux, συμπεραίνουμε ότι και η f έχει την ιδιότητα Darboux. Προκύπτει λοιπόν η εξής πρόταση :

Πρόταση 19.

Αν μια συνάρτηση f δεν έχει την ιδιότητα Darboux σε ένα διάστημα Δ, τότε η f δεν έχει αρχική στο διάστημα αυτό .

Για παράδειγμα η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases},$$

δεν έχει αρχική , διότι δεν έχει την ιδιότητα Darboux, μια και το σύνολο τιμών της είναι σύνολο με δύο στοιχεία, δηλαδή $f(IR) = \{0,1\}$ που δεν είναι διάστημα.

Πόρισμα :

Αν για μια συνάρτηση f που είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ το $f(\Delta)$ δεν είναι διάστημα, τότε η συνάρτηση f δεν έχει αρχική στο Δ.

Επομένως , αν με μια ματιά διαπιστώσουμε ότι η εικόνα $f(\Delta)$ του Δ δεν είναι διάστημα, τότε με βεβαιότητα λέμε ότι η συνάρτηση f δεν έχει αρχική.

Χρήσιμα Σχόλια

α) Υπάρχουν συναρτήσεις που έχουν την ιδιότητα Darboux, αλλά δεν έχουν αρχική. Μια τέτοια συνάρτηση είναι η εξής :

$$f(x)=\begin{cases} \eta\mu\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$$

Το γεγονός ότι η συνάρτηση αυτή δεν έχει αρχική , το έχουμε αναφέρει σε προηγούμενη εφαρμογή. Επομένως :

Η ιδιότητα Darboux αποτελεί αναγκαία συνθήκη για να έχει μια συνάρτηση αρχική , δεν αποτελεί όμως και ικανή συνθήκη για να έχει η συνάρτηση αυτή αρχική .

Με άλλα λόγια , η ιδιότητα Darboux αποτελεί αναγκαία αλλά όχι ικανή συνθήκη για να έχει μια συνάρτηση αρχική. Υπάρχουν επομένως συναρτήσεις που έχουν την ιδιότητα Darboux, αλλά δεν έχουν αρχική. Κάθε όμως συνάρτηση που έχει αρχική, έχει και την ιδιότητα Darboux.

β) Ενώ το άθροισμα δύο συναρτήσεων που έχουν αρχική έχει επίσης αρχική, η ιδιότητα αυτή δεν μεταφέρεται και σε συναρτήσεις που έχουν την ιδιότητα Darboux. Έτσι :

Πρόταση 20.

Αν δύο συναρτήσεις f,g έχουν την ιδιότητα Darboux στο διάστημα Δ , το άθροισμα $f+g$ και η διαφορά $f-g$ δεν έχουν υποχρεωτικά την ιδιότητα Darboux .

Για παράδειγμα , για τις συναρτήσεις :

$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases} \quad \textit{και} \quad g(x)=\begin{cases}-\sin\frac{1}{x}, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}$$

είναι $(f+g)(x)=\begin{cases}0, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}$, η οποία ως γνωστόν δεν έχει την ιδιότητα Darboux.

Πρόταση 21.

♦ Αν μια συνάρτηση f έχει την ιδιότητα Darboux, τότε και η συνάρτηση $f+k$ έχει την ιδιότητα Darboux, για κάθε πραγματική σταθερά k.

♦ Αν μια συνάρτηση f έχει την ιδιότητα Darboux, τότε και η συνάρτηση λf έχει την ιδιότητα Darboux, για κάθε πραγματική σταθερά $\lambda\neq 0$.

Σημειώνουμε επίσης ότι :

* Αν η f είναι συνεχής και η g έχει την ιδιότητα Darboux, τότε η συνάρτηση $f+g$ δεν έχει απαραίτητα την ιδιότητα Darboux.

* Αν δυο συναρτήσεις έχουν την ιδιότητα Darboux , το γινόμενό τους μπορεί να μην έχει την ιδιότητα Darboux.

* Αν η συνάρτηση h είναι συνεχής και η συνάρτηση $h\circ f$ έχει την ιδιότητα Darboux για κάθε συνάρτηση f που έχει την ιδιότητα Darboux, τότε η h είναι γραμμική, δηλαδή είναι της μορφής $h(x)=\alpha x+\beta$.

* Αν δυο συναρτήσεις δεν έχουν την ιδιότητα Darboux , το γινόμενό τους ή η σύνθεσή τους μπορεί να έχουν την ιδιότητα Darboux.

* Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ και η $f\circ f$ έχει την ιδιότητα Darboux, τότε και η f έχει την ιδιότητα Darboux.

Πρόταση 22.

♦ Αν μια συνάρτηση f έχει αρχική και δεν μηδενίζεται σε ένα διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση $\frac{1}{f}$ δεν έχει υποχρεωτικά αρχική στο Δ. Ισχύει όμως το εξής :

♦ Αν μια συνάρτηση f δεν μηδενίζεται σε ένα διάστημα Δ και έχει την ιδιότητα Darboux στο διάστημα αυτό , τότε η συνάρτηση $\frac{1}{f}$ έχει την ιδιότητα Darboux στο Δ .

Τα ερωτήματα αυτά σχετίζονται με την πρόταση Jarnik που θα διατυπώσουμε παρακάτω.■

Πρόταση 23.

Αν δύο συναρτήσεις έχουν την ιδιότητα Darboux, τότε και η σύνθεσή τους έχει την ιδιότητα Darboux.

Ένα χρήσιμο συμπέρασμα

Έχουμε δει μέχρι τώρα ότι :

α) Οι συνεχείς συναρτήσεις σε διάστημα έχουν αρχική.

β) Οι συναρτήσεις που έχουν αρχική έχουν την ιδιότητα Darboux.

γ) Υπάρχουν συναρτήσεις που έχουν την ιδιότητα Darboux, αλλά δεν έχουν αρχική.

δ) Υπάρχουν μη συνεχείς συναρτήσεις που έχουν αρχική, άρα έχουν και την ιδιότητα Darboux .

Μια τέτοια συνάρτηση είναι και η

$$f(x)=\begin{cases} \eta\mu\frac{1}{x} & ,\chi\neq 0 \\ 0 & ,\ \chi=0 \end{cases}$$

κάτι που έχουμε ήδη αποδείξει με ανάλογο παράδειγμα.

Τα παραπάνω μας επιτρέπουν να κάνουμε ένα σχέδιο για το πώς συμπεριφέρονται ορισμένα είδη συναρτήσεων σχετικά με την ύπαρξη αρχικής :

Συμπέρασμα

Αν συμβολίσουμε αντίστοιχα με F_Δ το σύνολο των συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το Δ, με C_Δ το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων στο Δ, με D_Δ το σύνολο των συναρτήσεων που έχουν την ιδιότητα Darboux στο Δ και με A_Δ το σύνολο των συναρτήσεων που έχουν αρχική στο Δ, τότε ισχύει ότι :

$$C_\Delta \subseteq A_\Delta \subseteq D_\Delta \subseteq F_\Delta$$

Με άλλα λόγια μπορούμε να πούμε ότι :

Οι **συνεχείς** συναρτήσεις σε ένα διάστημα Δ αποτελούν υποσύνολο στο σύνολο των συναρτήσεων που έχουν **αρχική**, αυτές είναι υποσύνολο στο σύνολο των συναρτήσεων που έχουν την ιδιότητα Darboux και αυτές με τη σειρά τους υποσύνολο στο σύνολο των συναρτήσεων που είναι ορισμένες στο διάστημα Δ.

Συγκριτικός πίνακας
Συναρτήσεις Darboux –Συναρτήσεις με Αρχική

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει με εποπτικό τρόπο βασικές ομοιότητες και διαφορές ανάμεσα σε συναρτήσεις με την ιδιότητα Darboux και συναρτήσεις που έχουν Αρχική. Με ??? σημειώνουμε τις περιπτώσεις που η απάντηση δεν είναι υποχρεωτικά καταφατική.

	f	g	$f+g$	$f\cdot g$	$\frac{1}{f}$	$\frac{f}{g}$	$f\circ g$
Darboux	**+**	**+**	**???**	**???**	**+**	**+**	**+**
Αρχική	**+**	**+**	**+**	**???**	**???**	**???**	**???**

ΣΤ. Ισχυρά θεωρήματα και επίλογος στην αρχική συνάρτηση

Αναφέρουμε χωρίς απόδειξη ορισμένα σχόλια ή προτάσεις που θα συμβάλλουν ώστε να σχηματίσουμε μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα για την αρχική συνάρτηση.

Πρόταση 24.

Έστω $f:\Delta\to IR$ και $g:\Delta\to IR^*$ δύο συναρτήσεις που έχουν αρχική στο διάστημα Δ. Τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ έχει την ιδιότητα Darboux στο Δ.

(Πρόταση Jarnik)

Εφαρμογή

Έστω συνάρτηση $f: R\to(0,+\infty)$, η οποία έχει αρχική. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$g(x)=\begin{cases} f(x), x<0 \\ 2f(x), x\geq 0\end{cases}$$

δεν έχει αρχική.

Λύση

Έστω ότι η συνάρτηση g έχει αρχική. Επειδή και η συνάρτηση f έχει αρχική και δεν μηδενίζεται, σύμφωνα με την πρόταση Jarnik, η συνάρτηση $\frac{g}{f}$ έχει αρχική. Όμως

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x)=\begin{cases} 1, x<0 \\ 2, x\geq 0\end{cases}$$

Αυτή όμως η συνάρτηση δεν έχει αρχική, αφού δεν έχει την ιδιότητα Darboux, και έτσι καταλήξαμε σε άτοπο.

Πρόταση 25.

Έστω $f:I\to J$, $g:J\to IR$ δύο συναρτήσεις που έχουν την ιδιότητα Darboux στα διαστήματα I, J. Τότε η συνάρτηση $g\circ f$ έχει την ιδιότητα Darboux στο διάστημα I.

Ορισμός

Έστω x_o ένα εσωτερικό σημείο ενός διαστήματος Δ. Αν τα πλευρικά όρια της συνάρτησης f στο x_o υπάρχουν, είναι πραγματικοί αριθμοί αλλά διαφορετικά μεταξύ τους, τότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει στο x_o **ασυνέχεια πρώτου είδους**. Διαφορετικά η ασυνέχεια λέγεται **δευτέρου είδους**.

Ασυνέχεια λοιπόν δευτέρου είδους θα παρουσιάζει μια συνάρτηση στο x_o όταν ένα τουλάχιστον από τα πλευρικά όρια δεν υπάρχει ή όταν κάποιο από αυτά υπάρχει μεν αλλά δεν είναι πραγματικός αριθμός.

Πρόταση 26.

Έστω f μια συνάρτηση που είναι μονότονη στο διάστημα Δ. Τότε τα ενδεχόμενα σημεία ασυνέχειας της f είναι πρώτου είδους και το σύνολο αυτών των σημείων είναι το πολύ αριθμήσιμο.

Πρόταση 27.

Έστω f μια συνάρτηση που έχει την ιδιότητα Darboux στο διάστημα Δ. Τότε τα ενδεχόμενα σημεία ασυνέχειας της f είναι δευτέρου είδους.

Πρόταση 28.

Αν μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ δεν είναι συνεχής σε κάποιο εσωτερικό σημείο του Δ και παρουσιάζει ασυνέχεια πρώτου είδους σε αυτό το σημείο, τότε η συνάρτηση αυτή δεν έχει αρχική στο Δ.

Εφαρμογή 8.

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln x}{x-1}, & \chi\in(0,1)\cup(1,+\infty) \\ 2, & \chi=1 \end{cases}$$

Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f δεν έχει αρχική.

Λύση

Η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο 1, μια και $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=1\neq 2=f(1)$.

Επομένως, αφού η f παρουσιάζει ασυνέχεια πρώτου είδους στο $x_0=1$, η συνάρτηση αυτή δεν έχει αρχική.

Πρόταση 29.

Έστω f μια συνάρτηση που έχει την ιδιότητα Darboux στο διάστημα Δ και είναι μονότονη στο διάστημα Δ .Τότε η f είναι συνεχής στο Δ.

Επειδή μια συνάρτηση που έχει αρχική έχει υποχρεωτικά την ιδιότητα Darboux, συμπεραίνουμε ότι αν μια συνάρτηση έχει αρχική και υπάρχουν σημεία ασυνέχειας, τότε αυτά είναι σημεία ασυνέχειας δευτέρου είδους.

Πρόταση 30.

Αν μια συνάρτηση είναι μονότονη σε ένα διάστημα Δ και έχει σημεία ασυνέχειας , τότε αυτή δεν έχει αρχική .

Πραγματικά, αυτό συμβαίνει διότι μια μονότονη συνάρτηση σε ένα διάστημα δεν μπορεί να έχει ασυνέχεια δευτέρου είδους σε κανένα εσωτερικό σημείο. Και επειδή οι ασυνεχείς συναρτήσεις που έχουν αρχική έχουν ασυνέχεια μόνο δευτέρου είδους , η συνάρτηση αυτή δεν έχει αρχική.

Παράδειγμα :

Οι συναρτήσεις

$$f(x)=\begin{cases} \chi^2 & ,\chi\in[0,1] \\ \chi+1, & \chi>1 \end{cases} \qquad , \ g(x)=\begin{cases} e^x, & \chi\le 0 \\ \chi+2 & ,\chi>0 \end{cases}$$

δεν έχουν αρχική , διότι είναι μονότονες και είναι ασυνεχείς με ασυνέχεια πρώτου είδους.
(Το ότι δεν έχουν αρχική προκύπτει επίσης από το γεγονός ότι το σύνολο τιμών τους δεν είναι διάστημα)

Βασικό Συμπέρασμα

Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και σε κάποιο σημείο x_0 του Δ ένα τουλάχιστον από τα πλευρικά όρια της f στο x_0 , πεπερασμένο ή άπειρο , υπάρχει και είναι διαφορετικό από το $f(x_0)$, τότε η συνάρτηση αυτή δεν έχει αρχική στο Δ .

Η παραπάνω πρόταση είναι πρακτικά πολύ χρήσιμη , διότι ο υπολογισμός των πλευρικών ορίων σε μια συνάρτηση είναι σχετικά εύκολη υπόθεση, οπότε εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι μια συνάρτηση δεν έχει αρχική.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} \chi\ ,\chi\le 0 \\ \dfrac{1}{x}\text{συν}x,\ \ \chi>0 \end{cases}$$

δεν έχει αρχική , αφού το δεξιό όριο της f στο 0 είναι $+\infty$.

Δύο ακόμα προτάσεις με θεωρητικό χαρακτήρα είναι οι επόμενες:

Πρόταση 31.

Υπάρχει τουλάχιστον μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το IR που είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο x και έχει την ιδιότητα Darboux .

Θεώρημα Lebesgue

Πρόταση 32.

Για κάθε συνάρτηση $f:\mathrm{IR}\to\mathrm{IR}$ υπάρχουν δύο ασυνεχείς συναρτήσεις $f_1, f_2:\mathrm{IR}\to\mathrm{IR}$ που έχουν την ιδιότητα Darboux , ώστε να ισχύει :

$$f = f_1+f_2$$

Θεώρημα Sierpinski

Επίλογος

Στο σημείο αυτό τελειώνει το εγχείρημα να πλαισιώσω την έννοια της αρχικής συνάρτησης ή της *αντιπαραγώγου*, όπως αλλιώς λέγεται , με ορισμένα ενδιαφέροντα στοιχεία που αφορούν την ύπαρξη και τις ιδιότητές της. Το θέμα είναι βέβαια ανεξάντλητο, αλλά για τη σχολική τάξη τα παραπάνω στοιχεία είναι ήδη αρκετά .

Θέλουμε να πιστεύουμε ότι μετά από την μελέτη του κειμένου αυτού ο αναγνώστης και κυρίως οι συνάδελφοι που διδάσκουν την παρούσα ενότητα θα αισθάνονται πιο δυνατοί και σίγουροι .Χρήσιμες τέλος θα είναι για το μαθητή οι ασκήσεις που ακολουθούν.

Τέλος, αναφέρουμε ότι για να είναι μια συνάρτηση ολοκληρώσιμη σε ένα κλειστό διάστημα υπάρχουν άλλες αναγκαίες ή ικανές συνθήκες που διαφέρουν σημαντικά από τις προτάσεις που αφορούν την ύπαρξη αρχικής. Αλλά για το ορισμένο ολοκλήρωμα , αν το νέο επόμενο σχολικό βιβλίο το επιτρέπει, θα ασχοληθούμε σε άλλο άρθρο.

Ευχαριστίες :

Στην προσπάθεια αυτή πολύτιμη ήταν η συμβολή του εξαίρετου συναδέλφου και φίλου **Αχιλλέα Συννεφακόπουλου**, που με τις παρατηρήσεις του έκανε το περιεχόμενο πιο αυστηρό και πιο πλούσιο.

Ευχαριστώ ακόμα τον εκλεκτό συνάδελφο **Νίκο Μαυρογιάννη** που δημοσίευσε την πρώτη έκδοση της παρούσας εργασίας στο αξιόλογο περιοδικό "Εκθέτης" που φιλοξενείται στην ιστοσελίδα του, καθώς και τη συνάδελφο **Φωτεινή Καλδή** για τις εύστοχες παρατηρήσεις της.

Ευχαριστώ επίσης τον εκλεκτό συνάδελφο **Σωτήρη Λοϊζιά** για την φιλοξενία αυτού του άρθρου στις σελίδες της Κυπριακής Μαθηματικής Εταιρείας.

Ασκήσεις στην αρχική συνάρτηση

Για τους αναγνώστες και κυρίως για τους μαθητές της Γ' Λυκείου παραθέτουμε στη συνέχεια μερικές βασικές ασκήσεις ή θέματα πάνω στην αρχική συνάρτηση.

1. Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f: R \to R^*$, της οποίας μια αρχική συνάρτηση F να ικανοποιεί τη σχέση $F(x)F(1-x) = F(x^2)$ για κάθε $x \in R$.

2. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$ με $f(3) = 7$, η οποία για κάθε $x \in R^*$ ικανοποιεί τη σχέση $f'(x) = \frac{2+f(x)}{x}$.

α) Να υπολογιστεί μια αρχική της συνάρτησης $g(x) = \frac{2}{x^2}$.

β) Να βρεθεί η συνάρτηση f.

3. Δίνεται μια συνάρτηση $f: R \to R$, η οποία έχει την ιδιότητα:

$f'(x) + f(x) = 1 + e^{-x}$ για κάθε $x \in R$ και η κλίση της στο $x_0 = 0$ είναι 2.

α) Να βρεθεί η συνάρτηση f. β) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να βρεθούν τα όρια $A = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ και $B = \lim_{x\to-\infty} f(x)$.

δ) Να βρεθεί μια αρχική της συνάρτησης $f(x)$

ε) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$.

4. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: R \to R$, με $f(0) = 1$ και F μία αρχική της f με την ιδιότητα: $F(x)f(-x) = -1$ για κάθε $x \in R$

α) Να βρεθεί το $F(0)$.

β) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $g(x) = F(x)F(-x)$ είναι σταθερή στο R.

γ) Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f.

5. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$ με $f(0) = 0$ και $2f'(x) = e^{x-f(x)}$ για κάθε $x \in R$

α) Να αποδειχθεί ότι $f(x)=\ln\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)$.

β) Αν G είναι αρχική της συνάρτησης $g(x) = x^{2005}f(x)$, να βρεθεί:

i) η παράγωγος της συνάρτησης $h(x) = G(x) - G(-x)$, $x \in R$, **ii)** ο τύπος της συνάρτησης $h(x)$.

6. Να βρείτε τη συνάρτηση f στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $x^2 f'(x) + 2xf(x) = 1 - f'(x)$ για κάθε $x \in R$ και $f(1)=\dfrac{1}{2}$

β) $f'(x)ημx = ημ^2x + f(x)συνx$ για κάθε $x \in (0, π)$ και $f\left(\dfrac{π}{2}\right)=\dfrac{π}{2}$

γ) $\dfrac{f'(x)}{f(x)+2}=-\dfrac{ημx}{2+συνx}$, $f(x) \geq -1$ για κάθε $x \in R$ και $f(0) = 1$

δ) $f'(x)=\dfrac{2f^2(x)}{x^3}$, $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$ και $f(1) = 1$

ε) $f'(x)=\dfrac{1}{e^x+1}f(x)$ για κάθε $x \in R$ και $f(0)=\dfrac{1}{2}$

στ) $f'(x)=2xe^{x^2-f(x)}$ για κάθε $x \in R$ και $f(0) = 0$

7. Η F είναι αρχική της συνάρτησης $f\colon R \to R$ και ισχύει: $F(2-x) + F(x^2-4) = 6x - 2$ για κάθε $x \in R$

α) Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f(2)$.

β) Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα x'x τουλάχιστον σ' ένα σημείο.

8. Έστω η συνάρτηση $f\colon R \to R$, της οποίας μια αρχική συνάρτηση F έχει την ιδιότητα:

$$F(1-x) + F(x^2-1) = x \quad \text{για κάθε } x \in R$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 1$ και $f(1) = -1$.

β) Αν η f είναι παραγωγίσιμη, να αποδείξετε ότι υπάρχει $ξ \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f'(ξ) = -2$.

9. Η F είναι αρχική της συνάρτησης $f: R \to R$ και ισχύει: $F(2-x) + F(x^2-4) = 6x - 2$ για κάθε $x \in R$

α) Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f(2)$.

β) Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ τουλάχιστον σ' ένα σημείο.

10. Έστω η συνάρτηση $f: R \to R$, της οποίας μια αρχική συνάρτηση F έχει την ιδιότητα: $F(1-x) + F(x^2-1) = x$ για κάθε $x \in R$

α) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 1$ και $f(1) = -1$.

β) Αν η f είναι παραγωγίσιμη, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = -2$.

11. Έστω $f: R \to R$ συνεχής συνάρτηση με $f(1) = 2$ και F αρχική της με την ιδιότητα $f(x) = 2xe^{x^2 - F(x)}$ για κάθε $x \in R$. Να βρείτε τον τύπο της f.

12. Δίνεται συνάρτηση $f: R \to R$ και F μια αρχική της με την ιδιότητα $f(x)F(x) = -e^{-2x}$ για κάθε $x \in R$. Αν $f(0) = 1$, να αποδείξετε ότι:

α) υπάρχει σταθερά c, ώστε $F^2(x) = e^{-2x} + c$, **β)** $F(x) = -e^{-x}$, $x \in R$, $f(x) = e^{-x}$, $x \in R$.

13. Έστω $f: R \to R$ μια συνεχής συνάρτηση και F μια αρχική της με την ιδιότητα $2\alpha F(x^2) \geq \alpha^2 + F^2(x)$ για κάθε $x \in R$, όπου $\alpha \in R^*$. Να αποδείξετε ότι:

α) $F(0) = \alpha$ και $F(1) = \alpha$, **β)** η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο R.

14. Έστω F μια παράγουσα της συνάρτησης $f: R \to R$ με την ιδιότητα

$$f(x) = F(x) - F(-x) \quad \text{για κάθε } x \in R$$

α) Να αποδείξετε ότι η C_f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή.

γ) Να βρείτε τον τύπο της f.

15. Έστω $f: R \to R$ συνεχής συνάρτηση και F μια αρχική της. Αν $f(1) = 1$ και για κάθε $x \in R$ είναι $f(x) = e^{x-F(x)}$, να βρείτε την f.

16. Έστω $f: (-1, +\infty) \to R$ συνεχής συνάρτηση και F μια παράγουσα της f.

Αν $F(0) = 0$ και $f(x) = e^{-F(x)}$ για κάθε $x \geq 0$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $f'(x) = -f^2(x)$ για κάθε $x > -1$,

β) να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

17. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει θετική συνάρτηση $f: R \to R$, της οποίας μια αρχική συνάρτηση F να ικανοποιεί τη σχέση $F^2(x) \leq F(x)F(\alpha - x)$ για κάθε $x \in R$, όπου $\alpha \in R^*$.

18. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: R \to R$ με $f(1) = 1$ και F μία αρχική της f με την ιδιότητα $f(x)F(2-x) = 1$ για κάθε $x \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(2-x)F(x) = 1$ για κάθε $x \in R$.

β) Να αποδείξετε ότι $F(x)F(2-x) = 1$ για κάθε $x \in R$.

γ) Να βρείτε τον τύπο της f.

19. Αν F είναι αρχική της συνεχούς συνάρτησης $f: R \to R$, για την οποία ισχύει

$$f(x)F(-x) = 1 \text{ για κάθε } x \in R \text{ και } f(0) = 1, \text{ τότε:}$$

α) να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x$, $x \in R$,

β) να βρείτε την εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

20. Έστω μία συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to R$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(1) = e$ και $f'(1) = 0$. Αν για κάθε $x > 0$ ισχύει ότι $x^3 f''(x) = e^{\frac{1}{x}}$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$,

β) να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα,

γ) να αποδείξετε ότι $\left(\frac{x}{e}\right)^x \geq \frac{1}{e}$ για κάθε $x > 0$,

δ) να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

21. Έστω η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f, με $f(2016)=2016$ και η συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση g, με $g(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν ισχύει $g(x)f'(x)=g(f(x))$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $f(x)=x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Υπόδειξη

Έστω G αρχική της $\dfrac{1}{g(x)}$.Τότε η δοσμένη γράφεται :

$$\frac{1}{g(x)}=\frac{f'(x)}{g(f(x))}\Leftrightarrow G'(x)=(G(f(x))'\Leftrightarrow G(x)=G(f(x))+c$$

Για $x=2016$ παίρνουμε :

$$G(2016)=G(f(2016))+c\Leftrightarrow G(2016)=G(2016)+c\Leftrightarrow c=0$$

Άρα $G(x)=G(f(x))$. Όμως η παράγωγός της G διατηρεί πρόσημο , ως συνεχής και χωρίς ρίζες και έτσι η G είναι $1-1$. Επομένως :

$$G(x)=G(f(x))\Leftrightarrow f(x)=x, x\in R$$