Η ΜΕΘΟΔΕΥΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Μπάμπης Στεργίου – 2017

Εισαγωγή

Οι εξισώσεις , η λύση τους, η εύρεση του πλήθους ριζών τους ή τα ερωτήματα που αφορούν στην ύπαρξη ριζών , αποτελούν ένα σημαντικό μέρος της εξεταστέας ύλης. Στο άρθρο αυτό προσπαθούμε να επισημάνουμε και να περιγράψουμε τις πιο χαρακτηριστικές εξισώσεις που μπορεί να συναντήσει ο μαθητής στα Μαθηματικά Προσανατολισμού της Γ΄ Λυκείου . Για την κάθε περίπτωση δίνουμε μερικά βασικά θεωρητικά στοιχεία που δηλώνουν τη μορφή και υποδεικνύουν στην ουσία τον τρόπο λύσης των ασκήσεων αυτών. Ακολουθούν μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα για την κάθε περίπτωση, ώστε να φανεί πιο συγκεκριμένα ο τρόπος ή οι τρόποι επίλυσης των εξισώσεων αυτών.

Γενικά Σχόλια

Εισαγωγικά μπορούμε ότι για τη λύση εξισώσεων πρέπει να έχουμε κατά νου τα παρακάτω βασικά θεωρητικά αλλά και πρακτικά εργαλεία :

α) Φέρνουμε την εξίσωση στη μορφή $f(x)=0$ (συνάρτηση της διαφοράς) , αφού πρώτα κάνουμε - αν χρειαστεί - κάποιες πράξεις ή απλοποιήσεις ή λογαριθμίσεις και στη συνέχεια :

- Εντοπίζουμε μια ρίζα με παρατήρηση.
- Εξετάζουμε αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα που μας ενδιαφέρει.
- Μελετάμε την f ως προς τα ακρότατα και διαπιστώνουμε ότι η ρίζα είναι η μοναδική θέση ολικού ακροτάτου.

Τονίζουμε ότι αν η συνάρτηση f δεν μελετάται εύκολα ως προς τη μονοτονία, τότε αλλάζουμε τη μορφή της εξίσωσης, άρα και τη μορφή της f .

β) Αν η εξίσωση έχει σχετικά πολύπλοκη μορφή, θέτουμε τις ποσότητες που επαναλαμβάνονται μέσα στην εξίσωση με $g(x)$, $h(x)$ και γράφουμε την εξίσωση στη μορφή $f(g(x))=f(h(x))$. Σε περίπτωση που η f είναι γνησίως μονότονη(άρα και $1-1$), γράφουμε

$$f(g(x))=f(h(x))\Leftrightarrow g(x)=h(x)$$

Η νέα εξίσωση λύνεται είτε αλγεβρικά, είτε με τον τρόπο που περιγράψαμε στην περίπτωση α) , είτε επαναλαμβάνοντας τον παρόντα τρόπο.

γ) Αν η εξίσωση περιέχει τη μεταβλητή x σε άκρο ολοκληρώματος, τότε θεωρούμε μια αρχική F της f , γράφουμε όλα τα ολοκληρώματα στη μορφή $F(\beta)-F(\alpha)$, όπου α,β είναι τα άκρα του κάθε ολοκληρώματος , θεωρούμε κατάλληλη συνάρτηση της μορφής Η και φέρνουμε την εξίσωση στη μορφή

$$H(g(x)) = H(h(x)).$$

Στη συνέχεια βρίσκουμε τη μονοτονία της H (ή γενικότερα μελετάμε τη συνάρτηση H ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, βρίσκοντας ίσως πρώτα τη μονοτονία της f ή της F) , εξασφαλίζουμε το $1-1$ της συνάρτησης H στο αντίστοιχο διάστημα και έτσι η προσπάθεια ανάγεται στην λύση της απλούστερης εξίσωσης $g(x) = h(x)$

δ) Σε περίπτωση κυρτών ή κοίλων συναρτήσεων , προσπαθούμε να φέρουμε την εξίσωση σε μορφή ισοδύναμη με την εξίσωση $f(x) = f'(\alpha)(x-\alpha) + f(\alpha)$, οπότε μοναδική ρίζα της εξίσωσης είναι η $x = \alpha$.

Πραγματικά, λόγω της κυρτής ή κοίλης συνάρτησης και της ιδιότητας της εφαπτομένης στο τυχαίο σημείο της $A(\alpha, f(\alpha))$, θα είναι αντίστοιχα :

- $f(x) \geq f'(\alpha)(x-\alpha) + f(\alpha)$, για την κυρτή συνάρτηση, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = \alpha$
- $f(x) \leq f'(\alpha)(x-\alpha) + f(\alpha)$, για την κοίλη συνάρτηση, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = \alpha$

Μέθοδος 1η

Κάθε εξίσωση, μετά από πιθανή εκτέλεση πράξεων ή κατάλληλους αλγεβρικούς μετασχηματισμούς (πχ αφού λογαριθμίσουμε ή πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη με κατάλληλη μη μηδενιζόμενη παράσταση) έχει ή παίρνει τη μορφή $f(x) = 0$, όπου f είναι κατάλληλη συνάρτηση, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , που είναι και το πεδίο ορισμού της εξίσωσης. Υποθέτουμε ότι η εξίσωση αυτή δεν μπορεί να λυθεί με αλγεβρικές μεθόδους.

Α. Έστω ότι για τη συνάρτηση f γνωρίζουμε ή μπορούμε να αποδείξουμε ότι είναι $1-1$. Προσπαθούμε τότε να βρούμε με παρατήρηση έναν αριθμό $\alpha \in A$, ώστε $f(\alpha) = 0$. Φέρνουμε λοιπόν την εξίσωση στη μορφή $f(x) = f(\alpha)$, οπότε λόγω του $1-1$ παίρνουμε :

$$f(x) = f(\alpha) \Leftrightarrow x = \alpha$$

Επομένως η μοναδική ρίζα της εξίσωσης είναι η $x = \alpha$.

Β. Είναι συνήθως πιο εύκολο να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη. Στη συνέχεια προσπαθούμε να εντοπίσουμε με παρατήρηση μια ρίζα της εξίσωσης, δηλαδή αριθμό $\alpha \in A$, ώστε $f(\alpha) = 0$.

Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, η ρίζα αυτή είναι και η μοναδική

Γ. Εντοπίζουμε με παρατήρηση μια ρίζα και με απαγωγή σε άτοπο αποδεικνύουμε ότι η εξίσωση δεν έχει άλλη ρίζα,

Εφαρμογή 1η

Να λύσετε την εξίσωση :

$$(2^x+3^x)^{2017}=(2^{2017}+3^{2017})^x$$

Λύση

Διαιρούμε και τα δύο μέλη της δοσμένης εξίσωσης με 3^{2017x} και ισοδύναμα παίρνουμε την εξίσωση:

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^x+1\right]^{2017}=\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2017}+1\right]^x$$

Προφανής ρίζα είναι η τιμή $x=2017$. Διακρίνουμε στη συνέχεια τις περιπτώσεις

$x<2017$, $x>2017$.

Στην πρώτη πχ περίπτωση, όπου $x<2017$, λόγω του γεγονότος ότι η συνάρτηση $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ είναι γνησίως φθίνουσα, ενώ η συνάρτηση $g(x)=\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{2017}+1\right)^x$ είναι γνησίως αύξουσα παίρνουμε :

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^x+1\right]^{2017}>\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2017}+1\right]^{2017}>\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2017}+1\right]^x$$

που σημαίνει ότι δεν υπάρχουν ρίζες μικρότερες του 2017 .Όμοια εργαζόμαστε και για $x>2017$.

Άρα η μοναδική ρίζα της δοσμένης εξίσωσης είναι η $x=2017$.

Εφαρμογή 2η

Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(x)=-f(2-x) \quad \text{και} \quad f'(x)\neq 0 \quad \text{για κάθε } x\in R .$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη .

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$, με τα δεδομένα ότι η f είναι παραγωγίσιμη , ικανοποιεί τη σχέση $f(x)=-f(2-x)$ και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$.

(Εξετάσεις 2003)

Λύση

α) Παρατηρούμε ότι επειδή η συνάρτηση f' είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται, αυτή θα διατηρεί πρόσημο. Έτσι, η f είναι γνησίως μονότονη και συγκεκριμένα :

- ♦ είναι γνησίως αύξουσα , αν η f' είναι θετική.

- είναι γνησίως φθίνουσα , αν η f' είναι αρνητική.

β) Παρατηρούμε ότι για $x=1$ η δοσμένη σχέση δίνει :

$$f(1)=-f(2-1) \Leftrightarrow f(1)+f(1)=0 \Leftrightarrow 2f(1)=0 \Leftrightarrow f(1)=0$$

Επομένως η τιμή $x=1$ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη, η ρίζα αυτή είναι μοναδική .

γ) Με τις νέες προϋποθέσεις δεν έχουμε εξασφαλισμένη τη μονοτονία της f , αφού δεν γνωρίζουμε τη συνέχεια της f' . Μας αρκεί όμως η f να είναι $1-1$ και αυτό το πετυχαίνουμε με απαγωγή σε άτοπο.

Έστω λοιπόν ότι η f δεν είναι $1-1$.Υπάρχουν τότε $a,b \in R$ με $a<b$, ώστε $f(a)=f(b)$.

Για την f πληρούνται στο $[a,b]$ οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle, οπότε υπάρχει $x_0 \in (a,b)$, τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$, άτοπο. Έτσι η f είναι $1-1$, οπότε

$$f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=f(1) \Leftrightarrow x=1 \blacksquare$$

Εφαρμογή 3η

Να λύσετε την εξίσωση $e^{-x}=x^2+1$

Λύση

Σύμφωνα με τα σχόλια και την ανάλυση της μεθόδου, πρώτα εξετάζουμε αν μπορούμε να εντοπίσουμε ρίζα. Πράγματι, η τιμή $x=0$ είναι λύση της εξίσωσης.

Φέρνουμε όλους τους όρους στο α΄ μέλος και θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=e^{-x}-x^2-1$. Είναι

$$f'(x)=(e^{-x}-x^2-1)'=-e^{-x}-2x \quad \text{και} \quad f''(x)=(-e^{-x}-2x)'=e^{-x}-2.$$

Φαίνεται όμως με την πρώτη ματιά ότι αφού η πρώτη παράγωγος δεν δίνει αμέσως ρίζα και πρόσημο, ενώ η δεύτερη παράγωγος δεν διατηρεί πρόσημο, δεν είναι κακή σκέψη να αλλάξουμε τη μορφή της εξίσωσης και αν χρειαστεί , επανερχόμαστε . Είναι λοιπόν :

$$e^{-x}=x^2+1 \Leftrightarrow (x^2+1)e^x=1 \Leftrightarrow (x^2+1)e^x-1=0$$

Ας θεωρήσουμε λοιπόν τη συνάρτηση $f(x)=(x^2+1)e^x-1, x\in R$.Είναι

- $f(0)=0$
- $f'(x)=((x^2+1)e^x-1)'=e^x(x+1)^2>0, x\neq -1$

Η συνάρτηση λοιπόν f είναι γνησίως μονότονη, αφού είναι συνεχής και η παράγωγος μηδενίζεται μόνο σε ένα σημείο, χωρίς να αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν αυτού. Έτσι η τιμή $x=0$ είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$, συνεπώς και της αρχικής εξίσωσης $\blacksquare$

Να σημειώσουμε ότι θα μπορούσαμε να συνεχίσουμε την πρώτη μας προσπάθεια , η διαδικασία όμως θα ήταν πιο πολύπλοκη διότι θα έπρεπε να βρούμε το πρόσημο της f'' , τη μονοτονία και το πρόσημο της f' και τελικά τη μονοτονία της $f(x)=e^{-x}-x^2-1$. Ας το επιχειρήσει μόνος του ο απαιτητικός μαθητής. Ωστόσο, μια πολύ εύκολη ενέργεια κατέστησε την λύση της άσκησης πολύ πιο απλή. Υπάρχουν περιπτώσεις που χωρίς τον κατάλληλο μετασχηματισμό της εξίσωσης η επίλυσή της είναι δυσχερής ή αδύνατη.

Μέθοδος $2^η$

Α. Φέρνουμε την εξίσωση στη μορφή $f(x)=f(\alpha)$ και αποδεικνύουμε ότι το α είναι το μοναδικό σημείο, στο οποίο η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό ακρότατο . Αυτό συνήθως το πετυχαίνουμε με το να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f αλλάζει μονοτονία μόνο στο $x=\alpha$.Για το λόγο αυτό μελετάμε αρχικά την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. Στη συνέχεια, αν το α είναι το μοναδικό σημείο, στο οποίο η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό ακρότατο , τότε με τη βοήθεια του ορισμού της μονοτονίας προκύπτει ότι $f(x)\neq f(\alpha)$ για κάθε $x\neq\alpha$.Έτσι το $x=\alpha$ είναι η μοναδική ρίζα.

Β. Σε εξισώσεις που έχουν ή παίρνουν την μορφή $f(x)=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$, όπου f είναι μια κυρτή ή κοίλη συνάρτηση μπορούμε , εκτός από τη μέθοδο της διαφοράς , εργαστούμε και ως εξής :

- Παρατηρούμε το $x=\alpha$ είναι ρίζα της εξίσωσης.
- Βλέπουμε ότι το β΄ μέλος είναι το y στην ευθεία της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(\alpha,f(\alpha))$.
- Από την ιδιότητα της εφαπτομένης σε κυρτή ή κοίλη συνάρτηση συμπεραίνουμε ότι η τιμή $x=\alpha$ είναι η μοναδική.

Εφαρμογή $4^η$

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+\dfrac{x+1}{x}$.

α) Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=2$

γ) Να λυθεί η εξίσωση $f(x^2+1)+f(x^4+1)=4$

Λύση

α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $D_f=(0,+\infty)$. Είναι :

$$f'(x)=\left(\ln x+\frac{x+1}{x}\right)'=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$$

Από το πρόσημο της f' προκύπτει ότι η f είναι :

♦ Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,1]$

♦ Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$

β) Από τη μονοτονία της f προκύπτει ότι το $f(1)=2$ είναι ολικό ελάχιστο της f και μάλιστα αυτό παρουσιάζεται μόνο στη θέση $x_0=1$.Αυτό σημαίνει ότι είναι $f(x)>2$ για κάθε $x\neq 1$.
Άρα η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=2$ είναι η $x=1$.

Σχόλιο

Μπορούμε να εργαστούμε πιο αναλυτικά ως εξής :

♦ Αν $x<1$, τότε $f(x)>f(1)=2$, δηλαδή $f(x)>2$.Αυτό σημαίνει ότι $f(x)\neq 2$ για $x<1$.

♦ Αν $x>1$, τότε $f(x)>f(1)=2$, δηλαδή $f(x)>2$.Αυτό σημαίνει ότι $f(x)\neq 2$ για $x>1$.

Επομένως η μοναδική ρίζα της εξίσωσης είναι η $x=1$

γ) Παρατηρούμε ότι η εξίσωση $f(x^2+1)+f(x^4+1)=4$ αληθεύει για $x=0$.Αυτή η ρίζα είναι η μοναδική, αφού για κάθε άλλη τιμή του x είναι $x^2+1\neq 1$ και $x^4+1\neq 1$, οπότε $f(x^2+1)>2$ και $f(x^4+1)>2$, δηλαδή $f(x^2+1)+f(x^4+1)>2+2=4$. Άρα

$$f(x^2+1)+f(x^4+1)=4\Leftrightarrow x=4 \ \blacksquare$$

Εφαρμογή 5η

Να λύσετε την εξίσωση $x^3+3x+6x\ln x+2=6x^2$

Υπόδειξη

Αν $f(x)=x^3+3x+6x\ln x+2-6x^2$, με $x>0$, τότε :

$$f'(x)=3x^2+6\ln x+9-12x \ \text{ και } \ f''(x)=6x+\frac{6}{x}-12=\frac{6(x-1)^2}{x}$$

Η f' είναι γνησίως αύξουσα με $f'(1)=0$. Επομένως , κάνοντας τον σχετικό πίνακα , βρίσκουμε τη μονοτονία της f .Από αυτόν προκύπτει ότι :

♦ Για $x>1$ είναι $f(x)>f(1)=0$

♦ Για $0<x<1$ είναι $f(x)>f(1)=0$

Επομένως είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\neq 1$. Συνεπώς μοναδική ρίζα της f είναι η $x=1$ ■

Μέθοδος $3^{η}$

Αν η εξίσωση έχει σχετικά πολύπλοκη μορφή , προσπαθούμε να τη φέρουμε στη μορφή $f((g(x))=f(h(x))$, όπου f είναι μια κατάλληλη $1-1$ συνάρτηση.

Επομένως θα είναι :

$$f((g(x))=f(h(x))\Leftrightarrow g(x)=h(x)$$

Η νέα εξίσωση είτε λύνεται αλγεβρικά, είτε λύνεται όπως στις μεθόδους που περιγράψαμε παραπάνω.

Εφαρμογή $6^{η}$

Να λύσετε την εξίσωση:

$$2\left(x^2-3x+2\right)=\ln\left[\frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right]$$

Εξετάσεις 2010

Λύση

Βλέπουμε αρχικά ότι η εξίσωση έχει νόημα(ορίζεται) σε όλο το R .

Είναι φανερό ότι μάλλον πρέπει να εξετάσουμε μήπως η εξίσωση παίρνει μια πιο καλή μορφή και όχι να θεωρήσουμε για μελέτη τη συνάρτηση της διαφοράς. Παρατηρούμε λοιπόν ότι :

$$2\left(x^2-3x+2\right)=\ln\left[\frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right]\Leftrightarrow \ln\left((3x-2)^2+1\right)+2(3x-2)=\ln(x^4+1)+2x^2$$

$$\Leftrightarrow \ln\left((3x-2)^2+1\right)+2(3x-2)=\ln((x^2)^2+1)+2x^2$$

Αν λοιπόν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x)=\ln(x^2+1)+2x$, τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή :

$$\ln\left((3x-2)^2+1\right)+2(3x-2)=\ln((x^2)^2+1)+2x^2 \Leftrightarrow f(3x-2)=f(x^2)$$

Θα μελετήσουμε επομένως την f ως προς τη μονοτονία .Είναι

$$f'(x)=\left(\ln(x^2+1)+2x\right)'=\frac{2x}{x^2+1}+2=2\frac{x^2+x+1}{x^2+1}>0$$

Αφού λοιπόν η παράγωγος της f είναι θετική σε όλο το R , η f είναι γνησίως αύξουσα. Είναι επομένως και $1-1$, οπότε η εξίσωση γίνεται :

$$f(3x-2)=f(x^2)\Leftrightarrow 3x-2=x^2 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow (x=2 \text{ ή } x=1)$$

Και οι δύο αυτές τιμές είναι δεκτές, μια και δεν έχουμε περιορισμούς ■

Εφαρμογή 7η

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-\ln(xe^x)$.Να λυθεί η εξίσωση :

$$f(x^4+3)+f(x^2+1)=f(x^4+1)+f(x^2+3)$$

Λύση

Η εξίσωση, αλλάζοντας τη θέση των όρων, παίρνει τη μορφή:

$$f(x^4+3)-f(x^4+1)=f(x^2+3)-f(x^2+1)$$

Είναι

- $f(x)=e^x-\ln(xe^x)=e^x-x-\ln x$, με $x>0$
- $f'(x)=(e^x-x-\ln x)'=e^x-\frac{1}{x}-1$ και $f''(x)=\left(e^x-\frac{1}{x}-1\right)'=e^x+\frac{1}{x^2}>0, x>0$

Επομένως η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Η μορφή της εξίσωσης μας οδηγεί να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x+2)-f(x)$, αφού έτσι η εξίσωση παίρνει τη μορφή $g(x^4+1)=g(x^2+1)$, με $x\in R$.Είναι όμως :

$g'(x)=f'(x+2)-f'(x)>0$ διότι η f' είναι γνησίως αύξουσα και $x+2>x$.Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα, συνεπώς είναι και $1-1$.Έτσι, τελικά παίρνουμε :

$$g(x^4+1)=g(x^2+1)\Leftrightarrow x^4+1=x^2+1\Leftrightarrow x^4-x^2=0\Leftrightarrow x^2(x^2-1)=0\Leftrightarrow (x=0 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=-1)$$

Σχόλιο

Η δοσμένη εξίσωση παραπέμπει προφανώς και στο ΘΜΤ.

Προφανείς ρίζες είναι οι $x=0$ ή $x=1$ ή $x=-1$.Θα αποδείξουμε ότι δεν έχει άλλες. Όμως για την εφαρμογή του ΘΜΤ είναι απαραίτητη η διάταξη των αριθμών x^2+1, x^2+3, x^4+1 , x^4+3 .Είναι προφανώς

$$x^2+1<x^2+3 \text{ και } x^4+1<x^4+3$$

Έτσι ξεκινάμε με τη διάταξη των x^2+3, x^4+1 και βλέπουμε τελικά ότι :

- Αν $|x|\ge\sqrt{2}$, τότε $x^2+1<x^2+3<x^4+1<x^4+3$
- Αν $1<|x|<\sqrt{2}$, τότε $x^2+1<x^4+1<x^2+3<x^4+3$
- Αν $0<|x|<1$, τότε $x^4+1<x^2+1<x^4+3<x^2+3$

Αν λοιπόν εφαρμόσουμε ΘΜΤ στην πρώτη περίπτωση στα διαστήματα

$$[x^2+1,\ x^2+3] \text{ και } [\ x^4+1\ ,\ x^4+3]\ ,$$

τότε η εξίσωση γίνεται :

$$f(x^2+3)-f(x^2+1)=f(x^4+3)-f(x^4+1) \Leftrightarrow 2f'(x_1)=2f'(x_2) \Leftrightarrow x_1=x_2\ ,$$

με $x_1 \in (x^2+1,\ x^2+3)$ και $x_2 \in (\ x^4+1\ ,\ x^4+3)$. Αλλά η σχέση $x_1=x_2$ οδηγεί σε άτοπο.

Όμοια, σε άτοπο οδηγούμαστε και στις άλλες περιπτώσεις ■

Μέθοδος 4η

Σε ορισμένες , πιο σπάνιες περιπτώσεις, πιθανόν να χρειαστεί να εντοπίσουμε με παρατήρηση δύο ή περισσότερες ρίζες και να αποδείξουμε ότι οι ρίζες αυτές είναι οι μοναδικές. Αυτό μπορεί να γίνει και ως εξής: Υποθέτουμε ότι η εξίσωση (που παίρνει ή έχει τη μορφή $f(x)=0$) έχει π.χ τουλάχιστον τρεις ρίζες , οπότε με διαδοχικές εφαρμογές του θεωρήματος Rolle για τις f, f', f'' προσπαθούμε να καταλήξουμε σε άτοπο. Επίσης, αν f είναι κυρτή ή κοίλη συνάρτηση, τότε η εξίσωση $f(x)=\alpha x+\beta$ έχει δύο το πολύ ρίζες. Αν εντοπίσουμε δύο ρίζες τότε αποδεικνύουμε με απαγωγή σε άτοπο ότι δεν υπάρχουν άλλες ρίζες.

Εφαρμογή 8η

Να λύσετε την εξίσωση $2^x+3^{2x}=9x+2$

Λύση

Παρατηρούμε ότι οι αριθμοί $x=0, x=1$ επαληθεύουν την εξίσωση , οπότε είναι ρίζες. Θα αποδείξουμε με τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο ότι αυτές οι λύσεις είναι οι μοναδικές. Έστω λοιπόν ότι υπάρχει και άλλη λύση και ας ονομάσουμε α, β, γ τις τρεις (τουλάχιστον) από τις ρίζες της εξίσωσης, με $\alpha<\beta<\gamma$. Είναι προφανές ότι δύο από τους αριθμούς α, β, γ είναι οι 0 και 1 .

Η εξίσωση μάς οδηγεί στη συνάρτηση $f(x)=2^x+3^{2x}-9x-2$.Είναι τότε $f(\alpha)=f(\beta)=f(\gamma)=0$. Από το θεώρημα Rolle για την f υπάρχουν $x_1 \in (\alpha,\beta)$ και $x_2 \in (\beta,\gamma)$ τέτοια, ώστε :

$$f'(x_1)=0 \text{ και } f'(x_2)=0$$

Επίσης, πάλι από το θεώρημα του , Rolle αλλά για την f' , υπάρχει $\xi \in (x_1,x_2)$, με $f''(\xi)=0$. Είναι όμως:

$$f'(x)=2^x\ln 2+2\cdot 3^{2x}\ln 3-9 \quad \text{και} \quad f''(x)=2^x\ln^2 3+4\cdot 3^{2x}\ln^2 3>0$$

Αλλά η τελευταία σχέση με την $f''(\xi)=0$ οδηγούν σε άτοπο. Η εξίσωση λοιπόν δεν μπορεί να έχει τρεις ή περισσότερες ρίζες, οπότε οι λύσεις της είναι αναγκαστικά οι $x=0, x=1$ ■

Εφαρμογή 9η

Να λύσετε την εξίσωση $2^x + 3^x + 6^x = 3x^2 + 5x + 3$

Υπόδειξη

Προφανείς ρίζες είναι οι $x = 0, x = 1, x = -1$. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τέσσερις τουλάχιστον ρίζες, τις α, β, γ, δ με $\alpha < \beta < \gamma < \delta$. Όπως στην προηγούμενη εφαρμογή , πάλι με διαδοχικές εφαρμογές του θεωρήματος Rolle για τη συνάρτηση $f(x) = 2^x + 3^x + 6^x - 3x^2 - 5x - 3$, θα πρέπει να υπάρχει ξ με $f^{(3)}(x) = 0$. Αυτό όμως είναι άτοπο , διότι :

$$f^{(3)}(x) = 2^x \ln^3 2 + 3^x \ln^3 3 + 6^x \ln^3 6 > 0$$

Εφαρμογή 10η

Έστω $f : R \to R$ κυρτή συνάρτηση και $\alpha \in R$. Να λύσετε την εξίσωση :

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha)$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι προφανής ρίζα της εξίσωσης είναι η $x = \alpha$. Έστω ότι υπάρχει και άλλη ρίζα x της εξίσωσης με $x \neq \alpha$, πχ $x > \alpha$. Σύμφωνα με το ΘΜΤ, υπάρχει $\xi \in (x, \alpha)$, τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \Leftrightarrow f(x) = f(\alpha) + f'(\xi)(x - \alpha)$$

Επομένως η εξίσωση παίρνει τη μορφή :

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha) \Leftrightarrow f(\alpha) + f'(\xi)(x - \alpha) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(\xi)(x - \alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) \Leftrightarrow f'(\xi) = f'(\alpha) \Leftrightarrow \xi = \alpha$$

διότι η f είναι κυρτή , οπότε η f' , ως γνησίως αύξουσα , είναι $1-1$. Αλλά η σχέση $\xi = \alpha$ οδηγεί σε άτοπο, διότι $\xi \in (x, \alpha)$ που σημαίνει ότι $\xi \neq \alpha$.

Όμοια καταλήγουμε σε άτοπο , αν δεχθούμε ότι υπάρχει ρίζα x της εξίσωσης με $x < \alpha$. Άρα η μοναδική ρίζα της δοσμένης εξίσωσης είναι η $x = \alpha$.

Άλλος τρόπος

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(\alpha, f(\alpha))$ είναι η εξής :

$$(\varepsilon):\ y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) \Leftrightarrow y = f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha)$$

Αλλά η f είναι κυρτή, οπότε η γραφική της παράσταση είναι πάνω από την εφαπτομένη (ε) , με εξαίρεση το σημείο επαφής $M(\alpha, f(\alpha))$. Έτσι , για $x \neq \alpha$ ισχύει ότι :

$$f(x) > y \Leftrightarrow f(x) > f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha)$$

Αφού το $x = \alpha$ είναι ρίζα της δοσμένης εξίσωσης, από την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε ότι αυτή είναι και η μοναδική ■

Το ΘΜΤ στη λύση εξισώσεων - Μια αξιοσημείωτη περίπτωση

Εφαρμογή 11η

Να λυθεί η εξίσωση $3^x+5^x=2^x+6^x$.

Λύση

Έστω x ρίζα της εξίσωσης, δηλαδή $3^x+5^x=2^x+6^x$ ή ισοδύναμα $3^x-2^x=6^x-5^x$ (1).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t)=t^x, t>0$. Με εφαρμογή του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στα διαστήματα $[2,3]$, $[5,6]$ προκύπτει ότι υπάρχουν $\alpha\in(2,3)$ και $\beta\in(5,6)$, τέτοια, ώστε:

$$f'(\alpha)=3^x\text{-}2^x \quad , \quad f'(\beta)=6^x\text{-}5^x$$

Επομένως, λόγω της σχέσης (1) είναι: $f'(\alpha)=f'(\beta)$.

Επειδή $f'(t)=xt^{x-1}$ προκύπτει ότι:

$$x\alpha^{x-1}=x\beta^{x-1}\Leftrightarrow x\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{x-1}=0\Leftrightarrow(x=0 \text{ ή } x=1).$$

Οι τιμές $0,1$ ικανοποιούν την εξίσωση, οπότε αυτές είναι και οι μοναδικές ρίζες της. Τονίζουμε ότι είναι απαραίτητο να κάνουμε επαλήθευση, διότι στις τιμές αυτές φτάσαμε με την υπόθεση ότι η εξίσωση έχει λύση, κάτι όμως που δεν είναι απαραίτητο να συμβαίνει ■

Εφαρμογή 12η

Αν η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ είναι παραγωγίσιμη και η f' είναι γνησίως μονότονη, να λυθεί η εξίσωση:

$$f(1+x-x^2)+f(x^2)=f(1)+f(x)$$

Λύση

Η εξίσωση γράφεται:

$$f(1)+f(x)=f(1+x-x^2)+f(x^2)\Leftrightarrow f(1)-f(1+x-x^2)=f(x^2)-f(x)$$

Παρατηρούμε ότι προφανής ρίζα της εξίσωσης είναι η $x=1$. Θα αποδείξουμε ότι αυτή είναι και η μοναδική. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις.

- Αν $x>1$, τότε $1+x-x^2<1<x<x^2$. Από το ΘΜΤ υπάρχουν:
  - $\xi_1\in(1+x-x^2,1)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(1)-f(1+x-x^2)}{1-(1+x-x^2)}=\frac{f(1)-f(1+x-x^2)}{x^2-x}$$

- $\xi_2\in(x,x^2)$ τέτοιο , ώστε

$$f'(\xi_2)=\frac{f(x^2)-f(x)}{x^2-x}$$

Επειδή η f' είναι γνησίως μονότονη και $\xi_1<\xi_2$, είναι $f'(\xi_1)\neq f'(\xi_2)$, οπότε

$$\frac{f(1)-f(1+x-x^2)}{x^2-x}\neq\frac{f(x^2)-f(x)}{x^2-x}\Leftrightarrow f(1)-f(1+x-x^2)\neq f(x^2)-f(x)$$

Άρα δεν υπάρχει λύση της εξίσωσης στο διάστημα $(1,+\infty)$.

♦ Αν $0<x<1$, τότε $x^2<x<1<1+x-x^2$, τότε εργαζόμαστε τελείως ανάλογα στα διαστήματα $[x^2,x]$, $[1,1+x-x^2]$ και καταλήγουμε ότι δεν μπορεί να έχουμε ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Μοναδική λοιπόν ρίζα της εξίσωσης είναι η $x=1$ ■

Μέθοδος 5η

Υπάρχει μια ειδική κατηγορία εξισώσεων, που έχουν τη γενική μορφή :

$$f(\alpha(x))+f(\beta(x))=f(\gamma(x))+f(\delta(x))$$

Στις εξισώσεις αυτές προσπαθούμε αρχικά να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη. Στη συνέχεια, αφού εντοπίσουμε μια ρίζα ρ της δοσμένης εξίσωσης, προσπαθούμε με τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο να αποδείξουμε ότι η εξίσωση δεν έχει άλλη ρίζα. Αυτό το πετυχαίνουμε διακρίνοντας τις περιπτώσεις $x<\rho$ ή $x>\rho$, συγκρίνοντας τις ποσότητες $\alpha(x),\beta(x),\gamma(x),\delta(x)$ κατάλληλα ανά δύο και χρησιμοποιώντας το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης f .

Εφαρμογή 13η

Να λυθεί η εξίσωση

$$2^x\ln(2^x+1)+4^x\ln(4^x+1)=3^x\ln(3^x+1)+5^x\ln(5^x+1)$$

Λύση

Μια προφανής ρίζα είναι η $x=0$. Παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x)=x\ln(x+1)$,με $x>-1$, τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή :

$$f(2^x)+f(4^x)=f(3^x)+f(5^x)$$

Είναι όμως :

$$f'(x)=\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}=\ln(x+1)+1-\frac{1}{x+1} \quad \text{και} \quad f''(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}>0\,.$$

Είναι $f'(0)=0$ και η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα. Άρα η f' είναι αρνητική στο διάστημα $(-1,0)$ και θετική στο $(0,+\infty)$

Η συνάρτηση f είναι λοιπόν γνησίως φθίνουσα στο $(-1,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

♦ Για $x<0$ είναι $2^x>3^x$ και $4^x>5^x$, οπότε $f(2^x)>f(4^x)$ και $f(4^x)>f(5^x)$, διότι οι αριθμοί $2^x,3^x,4^x,5^x$ ανήκουν στο διάστημα $(0,+\infty)$.Αυτές με πρόσθεση κατά μέλη δίνουν :

$$f(2^x)+f(4^x)>f(3^x)+f(5^x)$$

♦ Για $x>0$ είναι $2^x<3^x$ και $4^x<5^x$, οπότε $f(2^x)<f(4^x)$ και $f(4^x)<f(5^x)$, διότι οι αριθμοί $2^x,3^x,4^x,5^x$ ανήκουν επίσης στο διάστημα $(0,+\infty)$.Αυτές με πρόσθεση κατά μέλη δίνουν :

$$f(2^x)+f(4^x)<f(3^x)+f(5^x)$$

Επομένως η εξίσωση $f(2^x)+f(4^x)=f(3^x)+f(5^x)$ δεν έχει άλλη ρίζα εκτός από την $x=0$ ■

Μέθοδος 6η

Σε ορισμένες περιπτώσεις εντοπίζουμε ρίζες με παρατήρηση, αλλά η μοναδικότητα αυτών των ριζών εξασφαλίζεται μόνο με την εύρεση των διαστημάτων της μονοτονίας. Έτσι, αν η βοηθητική συνάρτηση f αλλάζει μονοτονία μόνο μια φορά και στο καθένα από τα διαστήματα που δημιουργούνται έχουμε ρίζα, τότε η εξίσωση έχει δύο ακριβώς ρίζες και η διαδικασία επίλυσης έχει ολοκληρωθεί.

Εφαρμογή 14η

Να λυθεί η εξίσωση $4^x=x^4$, $x>0$

Λύση

Δύο προφανείς ρίζες της εξίσωσης είναι οι $x=2, x=4$.Θα αποδείξουμε ότι αυτές είναι και οι μοναδικές. Λογαριθμίζοντας βλέπουμε ότι εξίσωση παίρνει την ισοδύναμη μορφή $\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln 4}{4}$.

Θεωρούμε λοιπόν τη συνάρτηση $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ και βρίσκουμε ότι :

♦ $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,$x>0$

♦ Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$.

Έτσι , αφού $2<e$ και $4>e$, βλέπουμε ότι :

♦ Στο διάστημα $(0,e]$ είναι

$$\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln 4}{4}\Leftrightarrow\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln 2}{2}\Leftrightarrow f(x)=f(2)\Leftrightarrow x=2$$

♦ Στο διάστημα $[e,+\infty)$ είναι

$$\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln 4}{4}\Leftrightarrow f(x)=f(4)\Leftrightarrow x=4$$

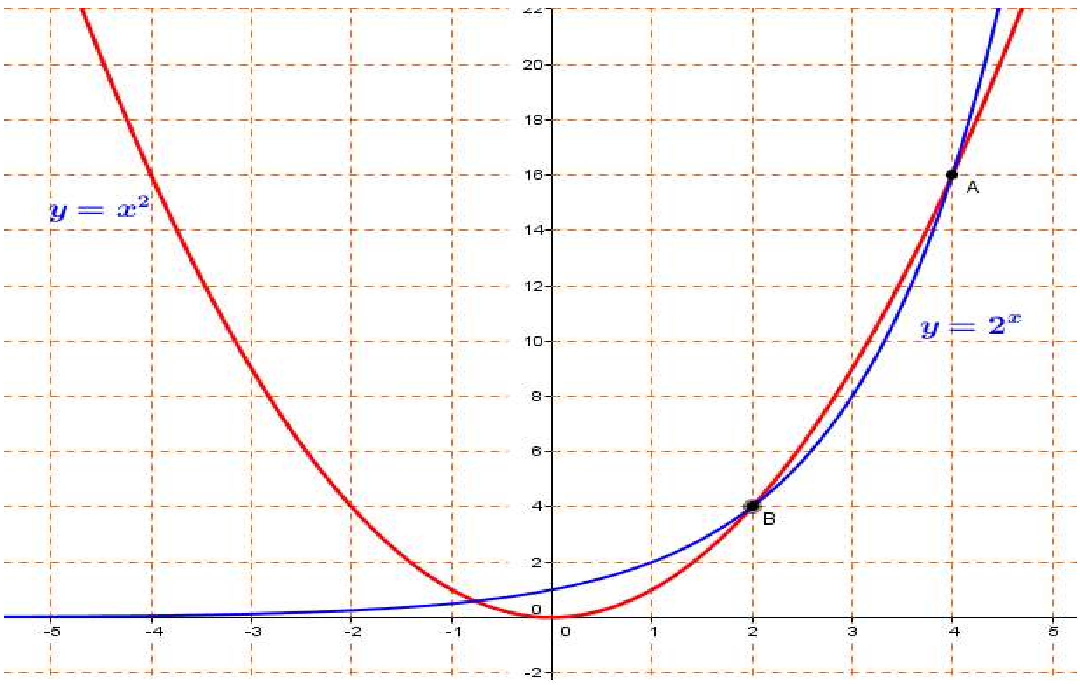
Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι $x=2$ και $x=4$ ■

Σχόλιο :

Οι συναρτήσεις $f(x)=4^x$, $g(x)=x^4$ είναι προφανώς κυρτές. Αν τις σχεδιάσει κάποιος κάπως ικανοποιητικά, η διαίσθησή του θα τον οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν δύο ακριβώς κοινά σημεία, οπότε αυτά είναι και τα μοναδικά. Αυτό ωστόσο , είναι γενικά τελείως παραπλανητικό, διότι οι γραφικές παραστάσεις δύο κυρτών(ή κοίλων αντίστοιχα) συναρτήσεων μπορεί να έχουν οσαδήποτε κοινά σημεία, δηλαδή κανένα , ένα, δύο και γενικά n , όπου $n \in \mathbb{N}$.

Οι συγκεκριμένες γραφικές παραστάσεις , δηλαδή οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=2^x$, $g(x)=x^2$ έχουν ακριβώς τρία κοινά σημεία. Τα δύο από αυτά έχουν τετμημένες $x=2, x=4$ και το τρίτο έχει αρνητική τετμημένη που δεν προσδιορίζεται.

Στο παρακάτω διάγραμμα βλέπουμε -για πρακτικούς λόγους- τις γραφικές παραστάσεις των κυρτών συναρτήσεων $f(x)=2^x$ και $g(x)=x^2$ που έχουν τρία κοινά σημεία. Στο σύνολο των θετικών αριθμών η εξίσωση $2^x=x^2$, όπως προκύπτει από το σχήμα, έχει μόνο δύο λύσεις, τις $x=2, x=4$.



Μέθοδος $7^{η}$ (Εξίσωση με ολοκλήρωμα)

Η εξίσωση έχει ή παίρνει συνήθως τη μορφή $\int_{α}^{g(x)} f(t)dt = 0$, όπου f είναι συνεχής συνάρτηση. Στην περίπτωση αυτή αποδεικνύουμε πρώτα ότι η f είναι θετική (ή αρνητική) στο διάστημα $Δ$. Στη συνέχεια θεωρούμε μια αρχική H της f με $H(α) = 0$ και παρατηρούμε ότι η εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$H(g(x)) = 0 = H(α) \qquad (1).$$

Είναι όμως $H'(x) = f(x) > 0$ (ή $H'(x) = f(x) < 0$), οπότε η συνάρτηση H είναι γνησίως μονότονη. Έτσι η εξίσωση (1) ισοδύναμα γίνεται

$$H(g(x)) = H(α) \Leftrightarrow g(x) = α$$

Στη συνέχεια λύνουμε την νέα εξίσωση είτε αλγεβρικά, είτε με τις μεθόδους που περιγράψαμε παραπάνω.

Άλλος τρόπος

Αφού αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο, μπορούμε να εργαστούμε και ως εξής. Ας υποθέσουμε πχ ότι $f(x) > 0$, $x \in Δ$.

- Αν ήταν $α < g(x)$ για κάποιο $x \in Δ$, τότε θα ήταν και $\int_{α}^{g(x)} f(t)dt > 0$, άτοπο.
- Αν ήταν $α > g(x)$ για κάποιο $x \in Δ$, τότε θα ήταν $\int_{α}^{g(x)} f(t)dt < 0$, άτοπο.

Επομένως, αναγκαστικά παίρνουμε :

$$\int_{α}^{g(x)} f(t)dt = 0 \Leftrightarrow g(x) = α$$

Ανάλογα εργαζόμαστε αν η συνάρτηση f είναι αρνητική. Επίσης με τον ίδιο τρόπο εργαζόμαστε αν και τα δύο άκρα ολοκλήρωσης είναι μεταβλητά, δηλαδή είναι μη σταθερές συναρτήσεις του x.

Άλλος τρόπος

Σε αρκετές επίσης περιπτώσεις σύντομες λύσεις πετυχαίνουμε με εφαρμογή του Θεωρήματος Μέσης Τιμής για το Ολοκλήρωμα. Σύμφωνα με αυτό, αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[α,β]$, τότε υπάρχει $γ \in (α,β)$ τέτοιο, ώστε :

$$\int_{α}^{β} f(t)dt = f(γ)(β - α)$$

Αν λοιπόν είναι $f(t) \neq 0$ για κάθε $t \in Δ$, τότε παίρνουμε ότι

$$\int_{α}^{g(x)} f(t)dt = 0 \Leftrightarrow f(γ)(g(x) - α) = 0 \Leftrightarrow g(x) = α$$

Εφαρμογή 15η

Να λύσετε την εξίσωση $\int_1^{e^x}\sqrt{t^2+1}\,dt=0$

Λύση

Έστω F μια αρχική της $f(t)=\sqrt{t^2+1}$. Είναι $\int_1^{e^x}\sqrt{t^2+1}\,dt=0\Leftrightarrow F(e^x)-F(1)=0$. Θεωρούμε επομένως τη συνάρτηση $g(x)=F(x)-F(1)$. Είναι τότε :

$$g'(x)=\sqrt{x^2+1}>0 \text{ για κάθε } x\in R.$$

Η συνάρτηση g είναι λοιπόν γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$. Έτσι η εξίσωση γίνεται :

$$\int_1^{e^x}\sqrt{t^2+1}\,dt=0\Leftrightarrow g(e^x)=0\Leftrightarrow g(e^x)=g(1)\Leftrightarrow e^x=1\Leftrightarrow x=0$$

Άλλος τρόπος

Επειδή $\sqrt{t^2+1}>0$ και επιπλέον η συνάρτηση $h(t)=\sqrt{t^2+1}$ είναι συνεχής στο R , είναι $\int_\alpha^\beta\sqrt{t^2+1}\,dt\neq 0$ για κάθε $\alpha\neq\beta$ και πιο συγκεκριμένα :

- Αν $\alpha<\beta$, τότε $\int_\alpha^\beta\sqrt{t^2+1}\,dt>0$
- Αν $\alpha>\beta$, τότε $\int_\alpha^\beta\sqrt{t^2+1}\,dt<0$

Σύμφωνα με τα παραπάνω σχόλια παίρνουμε ότι :

$$\int_1^{e^x}\sqrt{t^2+1}\,dt=0\Leftrightarrow e^x=1\Leftrightarrow x=0 \blacksquare$$

Εφαρμογή 16η

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & \text{αν } x\neq 0\\ 1\;, & \text{αν } x=0\end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$ και στη συνέχεια ότι είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να λύσετε την εξίσωση

$$\int_1^{2f'(x)}f(u)\,du=0$$

Εξετάσεις 2014

Λύση

α) Είναι

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1 = f(0)$$

Άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Για $x \neq 0$ είναι $f'(x) = \dfrac{xe^x - e^x + 1}{x^2} = \dfrac{h(x)}{x^2}$ όπου $h(x) = xe^x - e^x + 1$.

Το πρόσημο της h καθορίζει το πρόσημο της f'.

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ με $h'(x) = xe^x$.

Επίσης είναι :

- $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $h'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$. Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.
- $h'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$. Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	↘	0	↗

Συνεπώς για $x > 0$ έχουμε $h(x) > h(0) \Leftrightarrow f'(x) > 0$. Όμοια, για $x < 0$ έχουμε $h(x) > h(0) \Leftrightarrow f'(x) > 0$.

Τελικά, αφού $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

β) Θα βρούμε αρχικά την παράγωγο της f στο 0 με τη χρήση του ορισμού.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.

Θεωρούμε μια αρχική F της f με $F(1) = 0$.Παρατηρούμε ότι η εξίσωση παίρνει τη μορφή :

$$F(2f'(x)) = F(1) \qquad (1)$$

Αλλά $F'(x) = f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$. Επομένως η F είναι γνησίως αύξουσα, οπότε είναι και $1-1$. Η εξίσωση λοιπόν (1) γίνεται ισοδύναμα :

$$F(2f'(x)) = F(1) \Leftrightarrow 2f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f'(x) = f'(0)$$

Όπως στο πρώτο ερώτημα προκύπτει ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή. Έτσι, η f' ,ως γνησίως αύξουσα, είναι και $1-1$, οπότε παίρνουμε :

$$f'(x) = f'(0) \Leftrightarrow x = 0$$

Άλλος τρόπος

Παρατηρούμε ότι η $x = 0$ είναι προφανής λύση της δοσμένης εξίσωσης αφού για $x = 0$ το πρώτο μέλος είναι ίσο με

$$\int_1^{2\cdot\frac{1}{2}} f(u)du = \int_1^1 f(u)du = 0.$$

♦ Για $x>0$ είναι $e^x>1$ και $\dfrac{e^x-1}{x}>0 \Leftrightarrow f(x)>0$,ενώ για $x<0$ είναι

$e^x<1$ και $\dfrac{e^x-1}{x}>0 \Leftrightarrow f(x)>0$

Για $x=0$ έχουμε $f(0)=1>0$.

Αφού η f είναι κυρτή , η f' είναι γνησίως αύξουσα. Συνεπώς , για $x>0$ είναι

$$f'(x)>f'(0) \Leftrightarrow 2f'(x)>1$$

και αφού $f(x)>0$ για κάθε $x>0$, παίρνουμε $\displaystyle\int_1^{2f'(x)} f(u)du>0$

Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχουν λύσεις της δοσμένης εξίσωσης για $x>0$.

Όμοια , για $x<0$, είναι $f'(x)<f'(0) \Leftrightarrow 2f'(x)<1$ και αφού $f(x)>0$ για κάθε $x<0$ προκύπτει ότι :

$$\int_{2f'(x)}^{1} f(u)du>0 \Leftrightarrow \int_1^{2f'(x)} f(u)du<0.$$

Συνεπώς δεν υπάρχουν λύσεις της δοσμένης εξίσωσης για $x<0$. Άρα η μοναδική λύση της αρχικής εξίσωσης είναι η $x=0$ ■

Εφαρμογή 17η

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x^2}$ και F μια αρχική της f .Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $F(x)+F(x^3)=F(x^5)+F(x^7)$ **β)** $\int_0^x f(t)dt+\int_0^{2x} f(t)dt=\int_0^{3x} f(t)dt+\int_0^{4x} f(t)dt$

Λύση

α) Είναι $F'(x)=f(x)>0$, οπότε η συνάρτηση F είναι γνησίως αύξουσα.

Παρατηρούμε αρχικά ότι οι τιμές $x=0, x=1, x=-1$ είναι λύσεις της εξίσωσης . Θα αποδείξουμε ότι οι λύσεις αυτές είναι οι μοναδικές.

♦ Με $x>1$ είναι $x<x^5$ και $x^3<x^7$.Επομένως :

$$F(x)<F(x^5) \text{ και } F(x^3)<F(x^7)$$

Αυτές με πρόσθεση κατά μέλη δίνουν

$$F(x)+F(x^3)<F(x^5)+F(x^7)$$

που σημαίνει ότι κανένας αριθμός $x > 1$ δεν επαληθεύει την εξίσωση (1).

♦ Με $0 < x < 1$ είναι $x > x^5$ και $x^3 > x^7$.Επομένως, εντελώς ανάλογα παίρνουμε :

$$F(x) > F(x^5) \text{ και } F(x^3) > F(x^7)$$

Αυτές με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$F(x) + F(x^3) > F(x^5) + F(x^7)$$

που σημαίνει ότι κανένας αριθμός x , με $0 < x < 1$ δεν επαληθεύει την εξίσωση (1).

♦ Με $-1 < x < 0$ ή με $x < -1$ εργαζόμαστε εντελώς ανάλογα. Σημειώνουμε ότι στην πρώτη περίπτωση θα είναι $x < x^5$ και $x^3 < x^7$ ενώ στη δεύτερη $x > x^5$ και $x^3 > x^7$.

Τελικά, οι μοναδικές ρίζες της εξίσωσης είναι οι $x = 0, x = 1, x = -1$.

β) Αντίστοιχα με το α΄ ερώτημα η εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$g(x) + g(2x) = g(3x) + g(4x)$$

όπου g είναι τυχαία αρχική της f Προφανής ρίζα είναι η $x = 0$. Διακρίνοντας τις περιπτώσεις $x > 0$ ή $x < 0$ έχουμε αντίστοιχα ότι :

♦ $x < 3x$, $2x < 4x$ Επομένως :

$$g(x) < g(3x) \text{ και } g(2x) < g(4x)$$

Αυτές με πρόσθεση δίνουν $g(x) + g(2x) < g(3x) + g(4x)$, που σημαίνει ότι η εξίσωση δεν έχει θετικές ρίζες.

♦ $x > 3x$, $2x > 4x$.Επομένως :

$$g(x) > g(3x) \text{ και } g(2x) > g(4x)$$

Αυτές με πρόσθεση δίνουν $g(x) + g(2x) > g(3x) + g(4x)$, που σημαίνει ότι η εξίσωση δεν έχει αρνητικές ρίζες.

Άρα η μοναδική ρίζα της εξίσωσης είναι η $x = 0$ ■

Σημείωση :

Ο τρόπος αυτός εφαρμόζεται για κάθε συνεχή συνάρτηση f που είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ .

Μέθοδος $8^{η}$ (Εξίσωση με την αντίστροφη συνάρτηση)

Α. Συχνά συναντάμε εξισώσεις της μορφής $f^{-1}(x)=x$. Από τη συμμετρία όμως των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} συμπεραίνουμε ότι οι εξισώσεις $f^{-1}(x)=x$ και $f(x)=x$ είναι ισοδύναμες. Αν λοιπόν δοθεί η μία από τις δύο , τότε επιλέγουμε την άλλη . Συνήθως δίνεται η πρώτη και επιλέγουμε τη δεύτερη, διότι η εύρεση της αντίστροφης είναι συχνά δυσχερής ή αδύνατη.

Β. Αν κατά την διαδικασία επίλυσης μιας εξίσωσης καταλήξουμε στην εξίσωση $f(f(x))=x$, όπου f είναι κατάλληλη συνάρτηση, τότε στην περίπτωση που η f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση, ισχύει ότι :

$$f(f(x))=x \Leftrightarrow f(x)=x$$

Αυτό γίνεται με απαγωγή σε άτοπο , ως εξής :

Έστω a μια ρίζα της εξίσωσης $f(f(x))=x$, δηλαδή $f(f(\alpha))=\alpha$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

- Αν $f(\alpha)<\alpha$, τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα παίρνουμε :

$$f(f(\alpha))<f(\alpha) \Leftrightarrow \alpha<f(\alpha)$$

Πράγμα που είναι άτοπο, διότι $f(\alpha)<\alpha$.

- Αν $f(\alpha)>\alpha$, τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα παίρνουμε :

$$f(f(\alpha))>f(\alpha) \Leftrightarrow \alpha>f(\alpha)$$

πράγμα που είναι άτοπο, διότι $f(\alpha)>\alpha$.

Και στις δύο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο, οπότε τελικά θα είναι $f(\alpha)=0$

Αντιστρόφως, αν το α είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=x$, δηλαδή $f(\alpha)=\alpha$, τότε :

$$f(f(\alpha))=f(\alpha)=\alpha ,$$

δηλαδή το α είναι ρίζα και της εξίσωσης $f(f(x))=x$

Γ. Τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ βρίσκονται από τη λύση του συστήματος: $y=f(x)$ και $x=f(y)$, διότι:

$$(x,y)\in C_f \Leftrightarrow f(x)=y \quad \text{και } (y,x)\in C_{f^{-1}} \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x \Leftrightarrow y=f(x)$$

Δ. Για τη λύση της εξίσωσης $f^{-1}(x)=f(x)$ εργαζόμαστε όπως ακριβώς παραπάνω, αφού, αν θέσουμε $f^{-1}(x)=f(x)=y$, τότε:

$$f(x)=y \quad \text{και} \quad x=f(y)$$

Αν η συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα**, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$f^{-1}(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = x$$

και έτσι η εξίσωση $f^{-1}(x) = f(x)$ ανάγεται σε μία από τις απλούστερες εξισώσεις:

$$f^{-1}(x) = x \text{ ή } f(x) = x$$

Πραγματικά, η εξίσωση $f^{-1}(x) = f(x)$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $f(f(x)) = x$ και η απόδειξη προκύπτει άμεσα από την παράγραφο Β.

*** Σε επίπεδο πανελληνίων η παραπάνω διαδικασία πρέπει να αποτελεί μέρος της λύσης.

Ε. Αν μια συνάρτηση $f: R \to R$ είναι περιττή και γνησίως φθίνουσα, τότε ισχύει ότι :

$$f^{-1}(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = -x \ .$$

Με άλλα λόγια, αν μια συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα και περιττή, τότε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ βρίσκονται πάνω στην ευθεία $y = -x$.

Απόδειξη

Έστω ότι $f^{-1}(\alpha) = f(\alpha)$.Είναι τότε ;

$$f^{-1}(\alpha) = f(\alpha) \Leftrightarrow f(f(\alpha)) = \alpha$$

Θα αποδείξουμε ότι $f(\alpha) = -\alpha$.Έστω ότι $f(\alpha) \neq -\alpha$.Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

♦ Αν $f(\alpha) < -\alpha$, τότε :

$$f(\alpha) < -\alpha \Leftrightarrow f(f(\alpha)) > f(-\alpha) \Leftrightarrow \alpha > -f(\alpha) \Leftrightarrow f(\alpha) > -\alpha \text{, άτοπο.}$$

♦ Αν $f(\alpha) > -\alpha$, τότε :

$$f(\alpha) > -\alpha \Leftrightarrow f(f(\alpha)) < f(-\alpha) \Leftrightarrow \alpha < -f(\alpha) \Leftrightarrow f(\alpha) < -\alpha \text{, άτοπο.}$$

Είναι επομένως $f(\alpha) = -\alpha$.Αντιστρόφως τώρα, αν $f(\alpha) = -\alpha$, τότε :

$$f(\alpha) = -\alpha \Leftrightarrow -f(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow f(-\alpha) = \alpha \Leftrightarrow f^{-1}(\alpha) = -\alpha \Leftrightarrow f^{-1}(\alpha) = f(\alpha)$$

Άρα το α είναι ρίζα και της εξίσωσης $f^{-1}(x) = f(x)$

*** Σε επίπεδο πανελληνίων η παραπάνω διαδικασία πρέπει να αποτελεί μέρος της λύσης.

Εφαρμογή 1η

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 2$.

α) Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. **β)** Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = 1$.

γ) Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = x - 1$. **δ)** Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}(x) \geq x - 1$.

ε) Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = f(x)$

Λύση

α) Είναι $D_f = R$. Αν $x_1 < x_2$, τότε: $x_1^3 < x_2^3$ και $x_1 + 2 < x_2 + 2$

Αυτές με πρόσθεση δίνουν $f(x_1) < f(x_2)$.

β) Η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και «1 – 1», οπότε ορίζεται η f^{-1}. Έχουμε:

$$f^{-1}(x) = 1 \Leftrightarrow f\left(f^{-1}(x)\right) = f(1) \Leftrightarrow x = 4$$

γ) Η f έχει πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το R , οπότε είναι:

$$f^{-1}(x) = x - 1 \Leftrightarrow x = f(x-1) \Leftrightarrow x = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + (x-1) + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

διότι στην εξίσωση $x^2 - 3x + 3 = 0$ είναι $\Delta = 9 - 12 = -3 < 0$.

δ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα και έχει σύνολο τιμών το R , θα ισχύει:

$$f^{-1}(x) \geq x - 1 \Leftrightarrow f\left(f^{-1}(x)\right) \geq f(x-1) \Leftrightarrow x \geq (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + (x-1) + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x \leq 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3x + 3) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$$

διότι στο τριώνυμο $\varphi(x) = x^2 - 3x + 3$ είναι $\alpha = 1 > 0$ και $\Delta = -3 < 0$, οπότε $\varphi(x) > 0$ για κάθε $x \in R$. Άρα η ανίσωση αληθεύει για κάθε $x \in (-\infty, 0]$.

ε) Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, σύμφωνα με το σχόλιο είναι :

$$f^{-1}(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow x^3 + x + 2 = x \Leftrightarrow x^3 = -2 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{2}$$

Εφαρμογή 2η

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{e}{x} + x$.

α) Να αποδειχθεί ότι ορίζεται η f^{-1}.

β) Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = x$.

Λύση

α) Είναι $D_f = (0, +\infty)$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Έστω $x_1, x_2 > 0$ με $x_1 < x_2$. Τότε $\ln x_1 < \ln x_2$ και $-\frac{e}{x_1} < -\frac{e}{x_2}$. Άρα:

$$\ln x_1 - \frac{e}{x_1} + x_1 < \ln x_2 - \frac{e}{x_2} + x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Η μονοτονία της f προκύπτει εύκολα και με χρήση παραγώγων, αφού για παράδειγμα είναι

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{e}{x^2} + 1 > 0 \ .$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε και «1 – 1». Ορίζεται λοιπόν η $f^{-1}: f(D_f) \to R$.

β) Η εξίσωση $f^{-1}(x) = x$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $f(x) = x$, διότι οι C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία με εξίσωση $y = x$. Έτσι:

$$f^{-1}(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow \ln x - \frac{e}{x} + x = x \Leftrightarrow \ln x - \frac{e}{x} = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$$

όπου $g(x) = \ln x - \frac{e}{x}$, $x > 0$. Όμως η g είναι γνησίως αύξουσα (προκύπτει με τον ορισμό ή με παράγωγο) και $g(e) = 0$, Άρα $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$

Επομένως:

$$f^{-1}(x) = x \Leftrightarrow x = e$$

Εφαρμογή 3η

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} - x, x \in R$.

α) Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

β) Να εξεταστεί αν ορίζεται η f^{-1}.

γ) Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = 1 - x$.

δ) Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}(x) \le 1 - x$.

Λύση

α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το R .Επειδή οι συναρτήσεις e^{-x} και $-x$ είναι γνησίως φθίνουσες, καταλαβαίνουμε ότι η f θα είναι επίσης γνησίως φθίνουσα. Η απόδειξη μπορεί να γίνει και με τον ορισμό :

Έστω $x_1 < x_2$. Τότε διαδοχικά παίρνουμε:

$$-x_1 > -x_2, \quad e^{-x_1} > e^{-x_2} \quad \text{και} \quad -x_1 + e^{-x_1} > -x_2 + e^{-x_2}$$

δηλαδή $f(x_1) > f(x_2)$. Φυσικά , η μονοτονία της f προκύπτει πιο εύκολα με χρήση παραγώγων, αφού για παράδειγμα είναι $f'(x) = -e^{-x} - 1 < 0$.

Η f είναι λοιπόν γνησίως μονότονη και συγκεκριμένα γνησίως φθίνουσα.

β) Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη, θα είναι και «1 – 1». Επομένως ορίζεται η f^{-1}. Πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f που είναι το R , αφού είναι συνεχής, γνησίως μονότονη και τα όρια στο $+\infty, -\infty$ δίνουν αντίστοιχα $-\infty, +\infty$.

γ) Επειδή η f είναι «1 – 1» και έχει πεδίο ορισμού όλο το R , θα ισχύει:

$$f^{-1}(x)=1-x \Leftrightarrow f\left(f^{-1}(x)\right)=f(1-x) \Leftrightarrow x=e^{-(1-x)}-(1-x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=e^{x-1}+x-1 \Leftrightarrow$$

$$E^{x-1}=1 \Leftrightarrow e^{x-1}=e^{0} \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$$

δ) Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα και έχει πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών R , παίρνουμε:

$$f^{-1}(x)\leq 1-x \Leftrightarrow f\left(f^{-1}(x)\right)\geq f(1-x) \Leftrightarrow x\geq e^{x-1}+x-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{x-1}\leq 1 \Leftrightarrow e^{x-1}\leq e^{0} \Leftrightarrow x\leq 1$$

Άρα η ανίσωση επαληθεύεται στο διάστημα $(-\infty, 1]$.

Τονίζουμε ότι αν το σύνολο τιμών της f δεν είναι το R , η παραπάνω απόδειξη είναι ελλιπής και χρειάζεται διερεύνηση.

Ασκήσεις για εξάσκηση

Άσκηση 1

Μια συνάρτηση $f:R\to R$ έχει την ιδιότητα $f(3-x)+f(x+5) = 0$ για κάθε $x\in R$.

και είναι γνησίως φθίνουσα. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$.

Υπόδειξη

Για $x=-1$ παίρνουμε $f(4)=0$, οπότε μια λύση της εξίσωσης $f(x)=0$ είναι η $x=4$. Επειδή όμως η f είναι γνησίως μονότονη, η λύση αυτή είναι μοναδική. Άρα $f(x)=0 \Leftrightarrow x=4$

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^{x}+\left(\frac{4}{5}\right)^{x}-1$.

α) Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Να λυθεί η εξίσωση $3^{x}+4^{x}=5^{x}$ **γ)** Να λυθεί η ανίσωση $3^{x}+4^{x}>5^{x}$.

Υπόδειξη

α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = R$. Έστω $x_1 < x_2$. Επειδή $0 < \frac{3}{5} < 1$ και $0 < \frac{4}{5} < 1$, παίρνουμε ότι:

- $\left(\frac{3}{5}\right)^{x_1} > \left(\frac{3}{5}\right)^{x_2}$ και $\left(\frac{4}{5}\right)^{x_1} > \left(\frac{4}{5}\right)^{x_2}$
- $\left(\frac{3}{5}\right)^{x_1} + \left(\frac{4}{5}\right)^{x_1} - 1 > \left(\frac{3}{5}\right)^{x_2} + \left(\frac{4}{5}\right)^{x_2} - 1$, δηλαδή $f(x_1) > f(x_2)$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

Η μονοτονία μπορεί να βρεθεί ευκολότερα με την παράγωγο.

β) Είναι:

$$3^x + 4^x = 5^x \Leftrightarrow \frac{3^x}{5^x} + \frac{4^x}{5^x} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

Παρατηρούμε όμως ότι:

$$f(2) = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 - 1 = \frac{9+16}{25} - 1 = 0$$

οπότε η $x = 2$ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$. Επειδή επιπλέον η f είναι γνησίως μονότονη, η ρίζα $x = 2$ είναι η μοναδική. Άρα η μοναδική λύση της δοσμένης εξίσωσης είναι η $x = 2$.

γ) Είναι:

$$3^x + 4^x > 5^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1 > 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(2) \Leftrightarrow x < 2$$

Εφαρμογή :

Να λύσετε την εξίσωση $5^x + 12^x = 13^x$

Η εξίσωση , αφού διαιρέσουμε πρώτα όλους τους όρους με 13^x ,γράφεται στη μορφή

$$\left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0, \text{ με } f(x) = \left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x - 1$$

Μοναδική ρίζα είναι τελικά η $x = 2$

Άσκηση 3

Δίνεται μια συνάρτηση $f: R^* \to R$ με την ιδιότητα $f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$ για κάθε $x, y \neq 0$

Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα, τότε:

α) να αποδειχθεί ότι ορίζεται η f^{-1} ,

β) να λυθεί η εξίσωση $f(x) + f(x^2+3) = f(x^2+1) + f(x+1)$,

γ) αν επιπλέον είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 1$, να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Υπόδειξη

α) Έστω $\alpha, \beta \neq 0$ με $f(\alpha) = f(\beta)$. Τότε:

$$f(\alpha) - f(\beta) = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = 0 \qquad (1)$$

Αλλά η δοσμένη σχέση για $x = y = 1$ δίνει:

$$f(1) - f(1) = f(1) \Leftrightarrow f(1) = 0$$

Επειδή η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα, αυτή θα είναι η $x = 1$. Άρα η (1) δίνει:

$$\frac{\alpha}{\beta} = 1 \Leftrightarrow \alpha = \beta$$

Επομένως η f είναι «1 – 1», οπότε ορίζεται η f^{-1}.

β) Είναι:

$$f(x) + f(x^2+3) = f(x^2+1) + f(x+1) \Leftrightarrow f(x) - f(x^2+1) = f(x+1) - f(x^2+3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) - f(x^2+1) = f(x+1) - f(x^2+3) \Leftrightarrow x^3 + 3x = x^3 + x^2 + x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

η οποία είναι δεκτή.

γ) Έστω $\alpha, \beta > 0$ με $\alpha < \beta$. Θα αποδείξουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$.

Είναι:

$$f(\beta) - f(\alpha) = f\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) > 0, \quad \text{διότι } \frac{\beta}{\alpha} > 1$$

Άρα $f(\alpha) < f(\beta)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^3 + x + 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β) Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2-x} + (x^2-x)^3 + x^2 - 2x = e^{x+3} + (x+3)^3 + 3$

Άσκηση 5

Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\left(2^{x^2} + x^2 + 1\right)^3 + 2^{x^2} + x^2 + 1 = (2^{x+2} + x + 3)^3 + 4 \cdot 2^x + x + 3$

β) $(e^{x-1} + x - 3)^5 + (e^{x-1} + x - 3)^3 + e^{x-1} + x = 0$

Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x\ln x - x^2 + 1$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού Α της f, η $f'(x)$ και η $f''(x)$.

β) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και να βρεθεί το πρόσημο της f.

γ) Να λυθεί η εξίσωση $2\ln x = \frac{x^2-1}{x}$.

δ) Αν $0 < x \neq 1$, να αποδειχθεί ότι $\frac{x\ln x}{x^2-1} < \frac{1}{2}$.

Υπόδειξη

α) Πρέπει $x > 0$, οπότε το πεδίο ορισμού της f είναι $A = (0, +\infty)$. Επιπλέον:

- $f'(x) = (2x\ln x - x^2 + 1)' = 2\ln x + 2 - 2x, \quad x > 0$
- $f''(x) = (2\ln x + 2 - 2x)' = \frac{2}{x} - 2 = \frac{2(1-x)}{x}$

β) Για να μελετήσουμε την f ως προς τη μονοτονία, πρέπει να βρούμε το πρόσημο της f'. Όμως η εξίσωση $f'(x) = 0$ δεν λύνεται με αλγεβρικές μεθόδους. Για τον λόγο αυτό εκμεταλλευόμαστε το πρόσημο της f''.

Όλη αυτή η διαδικασία ενσωματώνεται στον πίνακα προσήμου. Στο $(0, 1)$ είναι $f''(x) > 0$ και στο $(1, +\infty)$ είναι $f''(x) < 0$. Επομένως η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$. Από τη μονοτονία της f' και από το γεγονός ότι $f'(1) = 0$ παίρνουμε ότι:

για $x < 1$ είναι $f'(x) < f'(1) = 0$ και για $x > 1$ είναι $f'(x) < f'(1) = 0$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $A = (0, +\infty)$ (αφού είναι συνεχής και στο $x_0 = 1$). Ακόμα είναι:

- $x < 1 \Leftrightarrow f(x) > f(1) \Leftrightarrow f(x) > 0$
- $x > 1 \Leftrightarrow f(x) < f(1) \Leftrightarrow f(x) < 0$

Επομένως η f είναι θετική στο $(0, 1)$ και αρνητική στο $(1, +\infty)$.

γ) Η πρώτη ενέργεια είναι να συσχετίσουμε τη δοσμένη εξίσωση με την f. Είναι όμως:

$$\ln x = \frac{x^2-1}{2x} \Leftrightarrow 2x\ln x = x^2 - 1 \Leftrightarrow 2x\ln x - x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

Όμως $f(1) = 0$ και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη, το $x = 1$ είναι η μοναδική ρίζα της f. Άρα και η μοναδική ρίζα της εξίσωσης είναι η $x = 1$.

δ) Η f είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε:

- $x > 1 \Leftrightarrow f(x) < f(1) \Leftrightarrow 2x\ln x - x^2 + 1 < 0 \Leftrightarrow 2x\ln x < x^2 - 1 \Leftrightarrow \frac{x\ln x}{x^2-1} < \frac{1}{2}$ αφού $x^2 - 1 > 0$ στο $(1, +\infty)$.
- $x < 1 \Leftrightarrow f(x) > f(1) \Leftrightarrow 2x\ln x - x^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow 2x\ln x > x^2 - 1 \Leftrightarrow \frac{x\ln x}{x^2-1} < \frac{1}{2}$ αφού $x^2 - 1 < 0$ στο

(0, 1).

Επομένως:

$$\frac{x\ln x}{x^2-1}<\frac{1}{2} \quad \text{για κάθε } x\in(0,\,1)\cup(1,\,+\infty)$$

Άσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x+1)e^{-x}+\frac{1}{2}x^2-1$.

α) Να βρείτε την f'.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να εξετάσετε αν η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $xe^{-x}+e^{-x}+\frac{1}{2}x^2=1$.

Άσκηση 8

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x+1)\ln x-2(x-1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f, την f' και την f''.

β) Να βρείτε τη μονοτονία της f'.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f'(x)=0$.

δ) Να βρείτε τη μονοτονία της f.

ε) Να λύσετε την εξίσωση $(x+1)\ln x=2(x-1)$.

Άσκηση 9

Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $e^x+x^2=x+1$

β) $e^x=1+\ln(x+1)$

Άσκηση 10

Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=e^x-1$ και $g(x)=x-x^2$ έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο και κοινή εφαπτομένη στο σημείο αυτό.

Άσκηση 11

Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $3^x+4^x=5^x$

β) $5^x+12^x=13^x$

γ) $3\cdot 2^x+4\cdot 3^x=3\cdot 6^x$

δ) $2\cdot 5^x+5\cdot 4^x-5\cdot 6^x=0$

Άσκηση 12

Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $2e^x + e^{-2x} = 1 + 2e^{-x} + 2xe^{-x}$

β) $e^x\left(x + 1 + \ln(x^2+1)\right) = 1$

γ) $2^x + 3^x + 4^x = 9^x$

δ) $6x^2\ln x = 2x^3 + 3x^2 - 6x + 1$

Άσκηση 13

Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^4 - 12x^2 + 24 - 24συνx = 0$

β) $x^5 - 20x^3 + 120x = 120ημx$

γ) $2e^x = 2 + 2x + x^2$

δ) $\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

Άσκηση 14

Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f\ (x) = x^2(6\ln x - 1) - x^3 - 2 \quad και \quad g(x) = x^3 + 2x^2 - 6x - 1$$

έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

Άσκηση 15

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = α^x - x$, $0 < α < 1$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να λύσετε την εξίσωση $α^{x^2-4} - α^{x-2} = x^2 - x - 2$

Άσκηση 16

Αν $x > 0$ και $α > 1$, να λύσετε την εξίσωση $x^x = α^{x+α^2}$.

Άσκηση 17

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (1-x)\ln x + \frac{1}{x} + x - 2$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να λύσετε την εξίσωση $\left(x - x^2\right)\ln x + x^2 = 2x - 1$.

γ) Να βρείτε το πρόσημο της f .

Άσκηση 18

α) Να αποδείξετε ότι $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}=e^x$.

Άσκηση 19

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, όπου $x>0$

α) Να μελετήσετε την $f(x)$ ως προς τη μονοτονία . **β)** Να λύσετε την εξίσωση $2^x=x^2$, με $x>0$

Άσκηση 20

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\ln x+x^2-1$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να λύσετε την εξίσωση :

$$f(x)+f(x^2)=f(x^5)+f(x^{10})$$

γ) Αν $\alpha,\beta>0$ και $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2=e^{(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)}$, να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta$.

Υπόδειξη

α) Είναι γνησίως αύξουσα

β) Το $x=1$ είναι προφανής λύση.

♦ Αν $x>1$, τότε $x<x^2, x^5<x^{10}$ και έτσι τελικά $f(x)+f(x^2)<f(x^5)+f(x^{10})$.

♦ Αν $0<x>1$, τότε $x>x^2$ και $x^5>x^{10}$, οπότε τελικά

$$f(x)+f\left(x^2\right)>f\left(x^5\right)+f\left(x^{10}\right)$$

στ) Λογαριθμίζουμε και γίνεται ισοδύναμη με την $f(\alpha)=f(\beta)$ κλπ

Άσκηση 21

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{\ell nx}{x}} & , \quad \alpha\nu \quad x>0 \\ 0 & , \quad \alpha\nu \quad x=0 \end{cases}$$

α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία.

β) Να λύσετε την εξίσωση $x^4=4^x$. με $x>0$

Επαναληπτικές Εξετάσεις 2014

Υπόδειξη

α) Η f είναι συνεχής, γνησίως αύξουσα στο $[0,e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$

β) Η εξίσωση γράφεται $f(x)=f(4)$.

♦ Με $x>e$ είναι $f(x)=f(4)\Leftrightarrow x=4$ ♦ Με $0<x\le e$ είναι $f(x)=f(4)\Leftrightarrow f(x)=f(2)\Leftrightarrow x=2$

Άσκηση 22

Έστω $f:(0,+\infty)\to R$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

- ♦ Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$
- ♦ $f(1)=1$ και ♦ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+5h)-f(1-h)}{h}=0$

Θεωρούμε επίσης μια αρχική G της συνάρτησης τη συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)-1}{x-1}$, $x\in(1,+\infty)$ με $G(\alpha)=0$,για κάποιο $\alpha>1$ και H μια αρχική της G .

Να αποδείξετε ότι:

Δ1. $f'(1)=0$ καθώς επίσης ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$.

Δ2. Η g είναι γνησίως αύξουσα και στη συνέχεια να λύσετε στο R την ανίσωση:

$$H(8x^2+6)-H(8x^2+5)=H(2x^4+6)-H(2x^4+5)$$

Δ3. Η g είναι κυρτή και ότι η εξίσωση

$$(\alpha-1)\,G(x)=(f(\alpha)-1)\,(x-\alpha)\ ,x>1$$

έχει ακριβώς μια λύση.

Εξετάσεις 2013

Άσκηση 23

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-3x(2\ln x-1)-4,x>0$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα .

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία , να βρείτε το σύνολο τιμών και το πρόσημό της .

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

δ) Να βρείτε τους θετικούς αριθμούς a, b, c , αν ισχύει η σχέση $a^2+b^2+c^2=2\ln(abc)+3$

ε) Να λύστε την εξίσωση : $f(x)+f(x^3)=f(x^2)+f(x^4)$.

Άσκηση 24

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2^x+x^2-2x-1$, $x\in R$

Δ1. α) Να αποδείξετε ότι συνάρτηση f είναι κυρτή στο R .

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις $x_1=0$ και $x_2=1$

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $x_0\in(0,1)$ τέτοιος, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(x_0,f(x_0))$, να είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

Δ3.Να αποδείξετε ότι $f(x)<0$ για κάθε $x\in(0,\ 1)$ και, στη συνέχεια, να λύσετε στο διάστημα (0, 1] την εξίσωση $\int_1^x f(t)dt=x-1$.

Ομογενείς 2014

Άσκηση 25

Μια συνάρτηση $f:R\to R$ έχει την ιδιότητα :

$$f(x^2)-f(y^2)\le(f(x)+y)(x-f(y)\ \text{ για κάθε }\ x,y\in R$$

Να αποδειχθεί ότι :

α) $f(x^2)=xf(x)$,για κάθε $x\in R$

β) Η f είναι περιττή.

γ) $f(x)f(y)=xy$ για κάθε $x,y\in R$.

δ) $f(x)=x$, για κάθε $x\in R$ ή $f(x)=-x$, για κάθε $x\in R$.

Γ2. Ανισώσεις

Για την λύση ανισώσεων εφαρμόζουμε σχετικά τις ίδιες ή ανάλογες μεθόδους με αυτές που συναντήσαμε στην επίλυση εξισώσεων.

Η πιο σημαντική διαφορά είναι ότι στις ανισώσεις δεν παίζει κανένα πια ρόλο η ιδιότητα του $1-1$, αλλά η μονοτονία.

Οι σημαντικότερες περιπτώσεις είναι οι εξής :

1. Αν είναι εφικτό , φέρνουμε την ανίσωση στην ισοδύναμη μορφή $f(x)>0$ ή $f(x)<0$. Στη συνέχεια βρίσκουμε τη μονοτονία της f και μία ρίζα , έστω α , της εξίσωσης $f(x)=0$, με παρατήρηση (ή άλλον τρόπο). Με βάση λοιπόν τον ορισμό της μονοτονίας παίρνουμε :

$$f(x)>0\Leftrightarrow f(x)>f(\alpha)\Leftrightarrow\begin{cases}x>\alpha,\ \text{αν η f είναι γνησίως αύξουσα.}\\ x<\alpha,\ \text{αν η f είναι γνησίως φθίνουσα.}\end{cases}$$

Προφανώς , δεν παραλείπουμε να εξασφαλίσουμε ότι οι τιμές που βρήκαμε ανήκουν και στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Ανάλογα εργαζόμαστε και στις ανισώσεις της μορφής $f(x)<0$, $f(x)\ge0$, $f(x)\le0$

2. Αν η ανίσωση έχει πιο σύνθετη μορφή, προσπαθούμε να την φέρουμε στη μορφή $f(g(x))>f(h(x))$, όπου f είναι κατάλληλη γνησίως μονότονη συνάρτηση. Στην περίπτωση αυτή, όπως και πριν, παίρνουμε :

$$f(g(x))>f(h(x))\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)>h(x),\ \text{αν η f είναι γνησίως αύξουσα.}\\ g(x)<h(x),\ \text{αν η f είναι γνησίως φθίνουσα.}\end{cases}$$

Εντελώς ανάλογα αντιμετωπίζονται οι περιπτώσεις :

$$f(g(x))<f(h(x)),\ f(g(x))\ge f(h(x)),\ f(g(x))\le f(h(x))$$

3. Με παρόμοιο τρόπο λύνουμε και ανισώσεις που σε κάποιο μέλος περιέχουν όρο της μορφής $\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt$. Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε μια βοηθητική συνάρτηση της μορφής $H(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(t)dt$, φέρουμε την ανίσωση στη μορφή $H(\gamma(x))<H(\delta(x))$, αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση H είναι γνησίως μονότονη και εργαζόμαστε όπως ακριβώς στην προηγούμενη περίπτωση.

4. Ενδιαφέρον έχουν επίσης ανισώσεις της μορφής $\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt>0$ που δεν αντιμετωπίζονται με τις παραπάνω μεθόδους. Στην περίπτωση λοιπόν αυτή, εργαζόμαστε ως εξής :

- Διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής και δεν αλλάζει πρόσημο στο πεδίο ορισμού της. Πιο ευνοϊκή περίπτωση είναι εκείνη, που η f είναι παντού θετική ή παντού αρνητική.

- Από βασική πρόταση των ολοκληρωμάτων παίρνουμε τότε ότι :

$$\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt>0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)<h(x), \text{αν } f(x)\geq 0 \\ g(x)>h(x), \text{αν } f(x)\leq 0 \end{cases}$$

κάτι που , αν χρειαστεί, αιτιολογείται απλά με άτοπο απαγωγή.