Η ΜΕΘΟΔΕΥΣΗ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

Μπάμπης Στεργίου - 2017

Σε προηγούμενα άρθρα και εργασίες καταγράψαμε , αναλύσαμε , σχολιάσαμε και παρουσιάσαμε διεξοδικά τις έννοιες και τις προτάσεις που αναφέρονται σε όλη την ύλη. Στην παρούσα εργασία επιχειρούμε αρχικά να συστηματοποιήσουμε την παραπάνω ύλη , θέτοντας ως πρώτο κριτήριο το είδος και τη μορφή των ασκήσεων. Για παράδειγμα, ασκήσεις που αναφέρονται στην εύρεση συνάρτησης συναντάμε σε πολλά κεφάλαια. Ανάλογα με το κεφάλαιο αυτό, η αντιμετώπιση των ασκήσεων γίνεται με διαφορετικό τρόπο. Στις σελίδες λοιπόν που ακολουθούνε παρουσιάζονται οι πιο σημαντικές κατηγορίες θεμάτων και οι βασικότεροι τρόποι που χρησιμοποιούνται για την λύση τους. Με την ταξινόμηση αυτή των ασκήσεων ο μαθητής μπορεί εύκολα να συνοψίσει όλα, όσα έχει συναντήσει στις επιμέρους ενότητες και να δει με ενιαίο τρόπο όσα πρέπει να εφαρμόσει στην πρώτη του επαφή με την άσκηση. Λυμένα παραδείγματα που δείχνουν τον τρόπο εφαρμογής της κάθε μεθόδου έχουν συμπεριληφθεί στις επιμέρους ενότητες του βιβλίου.

Α. ΘΕΜΑΤΑ ΕΥΡΕΣΗΣ

ΜΕΘΟΔΟΣ Α.

Εφαρμόζουμε όλες τις μεθόδους που παρουσιάζονται στο γενικό μέρος των συναρτήσεων. Έτσι, αν η συναρτησιακή σχέση περιέχει δύο μεταβλητές, επιλέγουμε τιμές για αυτές , πχ θέτοντας όπου y το x ή $x = y = 0$ και φτάνουμε στην απάντηση. Να τονίσουμε ότι η επαλήθευση(σε όλα τα θέματα εύρεσης) είναι απαραίτητη, αν οι ενέργειες δεν είναι ισοδύναμες.

Να επισημάνουμε επίσης τη βασική τεχνική , κατά την οποία τη συνάρτηση την βρίσκουμε από μια σχέση της μορφής $g(f(x)) = g(h(x))$, όπου g είναι μια κατάλληλη $1-1$ συνάρτηση. Πρόκειται για την πιο απλή και έξυπνη συγχρόνως περίπτωση.

Παράδειγμα 2°

Μια συνάρτηση $f: R \to R$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

$(f \circ f)(x) = x$ και $f\big(f(x)f(y) - xy\big) = f(x) - x$ για κάθε $x, y \in R$

α) Να αποδειχθεί ότι η f είναι αντιστρέψιμη .

β) Να βρεθεί το f(0).

γ) Να βρεθεί ο τύπος της f.

Λύση

α) Για να είναι η f αντιστρέψιμη, αρκεί να είναι «1 – 1». Έστω $x_1, x_2 \in R$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Τότε:

$$f\big(f(x_1)\big) = f\big(f(x_2)\big) \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Επομένως η f είναι «1 – 1», άρα και αντιστρέψιμη.

β) Από την υπόθεση έχουμε:

$$f\big(f(x)f(y) - xy\big) = f(x) - x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

Η (1) για $x = y = 0$ δίνει:

$$f\big(f^2(0)\big) = f(0) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} f^2(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$$

γ) Στην (1) θέτουμε $y = 0$ και παίρνουμε:

$$f\big(f(x)f(0) - 0\big) = f(x) - x \overset{(\beta)}{\Leftrightarrow} f(0) = f(x) - x \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$$

Η συνάρτηση αυτή επαληθεύει και τις δύο από τις δοσμένες σχέσεις, οπότε είναι δεκτή.

Παράδειγμα 5°

Να βρεθούν οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει

- $f(0)=0$

και

- $|f(x)-f(y)|=|x-y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Λύση

Από την υπόθεση έχουμε
- $f(0)=0$

- $|f(x)-f(y)|=|x-y| \quad (1)$

Από την (1) για $y=0$ παίρνουμε

$$\left(|f(x)-f(0)|=|x-0|, \text{για κάθε } x\in R\right) \overset{(f(0)=0)}{\Leftrightarrow} \left(\left|f\left(x\right)\right|=|x|, \text{για κάθε } x\in R\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(f\left(x\right)=x \text{ ή } f\left(x\right)=-x\right) \text{ για κάθε } x\in R\right)$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in R-\{0\}$,ώστε $f\left(x_1\right)=x_1, f\left(x_2\right)=-x_2$.Λόγω της (1) προκύπτει ότι :

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|x_1-x_2| \Leftrightarrow \left|x_1+x_2\right|=|x_1-x_2| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=x_1-x_2 \\ \quad ή \\ x_1+x_2=-x_1+x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=0 \\ \; ή \\ x_1=0 \end{cases},$$

που είναι άτοπο. Επομένως είναι:

$$\left(f\left(x\right)=x, \text{για κάθε } x\in R\right) \text{ ή } \left(f\left(x\right)=-x, \text{για κάθε } x\in R\right)$$

Οι συναρτήσεις αυτές ικανοποιούν τις υποθέσεις και έτσι είναι οι ζητούμενες.

ΜΕΘΟΔΟΣ Β

Για συνεχείς συναρτήσεις που είναι ορισμένες σε διάστημα η εύρεση του τύπου της συνάρτησης στηρίζεται συνήθως σε μερικές απλές τεχνικές. Μία χαρακτηριστική περίπτωση, ειδικά όταν μπορούν να συμπληρωθούν ταυτότητες, είναι να συμπληρώσουμε τετράγωνα και να βασιστούμε στην πρόταση : Συνεχείς συναρτήσεις που δεν μηδενίζονται σε ένα διάστημα, διατηρούν πρόσημο σε αυτό.

Σε περίπτωση που στην εύρεση λείπει μόνο μία τιμή, αυτή την βρίσκουμε από το όριο, δηλαδή με χρήση του ορισμού της συνέχειας , αφού $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Παράδειγμα 1ο :

Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις f με την ιδιότητα $f^2(x)=1+2xf(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1$.

Λύση

Συμπληρώνουμε το τετράγωνο και παίρνουμε :

$$f^2(x)=1+2xf(x)\Leftrightarrow (f(x)-x)^2 = x^2+1 \Leftrightarrow |f(x)-x|=\sqrt{x^2+1} \quad (1)$$

Αν θέσουμε $g(x)=f(x)-x$, τότε η g είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται, αφού $\sqrt{x^2+1}\neq 0$.

Επομένως η g διατηρεί πρόσημο και αφού $g(0)=f(0)=1>0$, η g είναι θετική. Επομένως η σχέση (1) δίνει :

$$|g(x)|=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x)-x=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x)=x+\sqrt{x^2+1}, x\in R$$

Σχόλιο

Αν έλειπε η συνθήκη $f(0)=1$, τότε θα παίρνουμε δύο συναρτήσεις :

$$f(x)=x+\sqrt{x^2+1}, x\in R \quad \text{ή} \quad f(x)=x-\sqrt{x^2+1}, x\in R$$

Παράδειγμα 4ο :

Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση $f:R\to R$ με $e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x$ για κάθε $x\in R$

Λύση

Προκύπτει αμέσως ότι για $x=0$ είναι $f(0)=0$. Η δοσμένη σχέση γράφεται :

$$e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x \Leftrightarrow e^{2f(x)}-2xe^{f(x)}=1 \Leftrightarrow (e^{f(x)}-x)^2=1+x^2 \Leftrightarrow |e^{f(x)}-x|=\sqrt{1+x^2}$$

Αλλά η συνάρτηση $g(x)=e^{f(x)}-1$ είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται , διότι $\sqrt{1+x^2}\neq 0$, οπότε διατηρεί πρόσημο. Επιπλέον είναι $g(0)=1>0$,οπότε η g είναι θετική. Άρα

$$|e^{f(x)}-x|=\sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow |g(x)|=\sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow g(x)=\sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow e^{f(x)}-x=\sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{f(x)}=x+\sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

ΜΕΘΟΔΟΣ Γ

Αν η δοσμένη σχέση περιέχει παράγωγο, τότε :

- Αντιπαραγωγίζουμε , βάζοντας απαραίτητα τη σταθερά. Η αντιπαραγώγιση γίνεται προσπαθώντας να δημιουργήσουμε όρους ή ομάδες όρων που είναι παράγωγοι γνωστών συναρτήσεων, σύνθετων συναρτήσεων , γινομένου ή πηλίκου. Για παράδειγμα είναι :

$$f^k(x)f'(x)=\left(\frac{f^{k+1}(x)}{k+1}\right)' \quad ,\frac{f'(x}{f(x)}=(\ln f(x))' \ , \ e^{f(x)}f'(x)=(e^{f(x)})' \quad \text{κλπ}$$

- Φέρνουμε τη σχέση στη μορφή $H'(x)+g(x)H(x)=k(x)$ και πολλαπλασιάζουμε με $e^{G(x)}$, όπου G είναι αρχική της g .Έτσι το πρώτο μέλος είναι η παράγωγος του $H(x)e^{G(x)}$.
- Σε περιπτώσεις που έχουμε συναρτησιακή σχέση με δύο μεταβλητές και παραγωγίσιμη συνάρτηση, τότε κρατάμε τη μία μεταβλητή σταθερή και παραγωγίζουμε ως προς την άλλη. Κάνοντας το ίδιο και για την άλλη μεταβλητή και δίνοντας ειδικές τιμές στις μεταβλητές, φτάνουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα.
- **Αν η συνάρτηση είναι πολυωνυμική,** τότε γίνεται διερεύνηση ως προς τον βαθμό των πολυωνύμων των δύο μελών. Βρίσκουμε επομένως το βαθμό , γράφουμε τη γενική μορφή της συνάρτησης, αντικαθιστούμε , εξισώσουμε τους αντίστοιχους συντελεστές και βρίσκουμε τη συνάρτηση πολυώνυμο(δείτε το δεύτερο γενικό παράδειγμα που ακολουθεί).

Σημειώνουμε ότι αν έχουμε ανισοτική σχέση με παραγώγους, δεν επιτρέπεται να αντιπαραγωγίσουμε , επιτρέπεται όμως να πάρουμε ορισμένο ολοκλήρωμα, έχοντας όμως πρώτα διατάξει τα άκρα.

Παράδειγμα 5^o :

Να βρεθεί η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(0)=2$, η οποία ικανοποιεί την ιδιότητα

$$(f(x)+x)(f'(x)+1)=x \text{ για κάθε } x\in R$$

Λύση

Η δοσμένη γράφεται

$$(f(x)+x)(f'(x)+1)=x \Leftrightarrow 2(f(x)+x)(f(x)+x)'=2x \Leftrightarrow \left((f(x)+x)^2\right)'=(x^2)'$$

$$\Leftrightarrow (f(x)+x)^2=x^2+c$$

Επειδή $f(0)=2$, είναι $c=4$, οπότε παίρνουμε

$$(f(x)+x)^2=x^2+4 \Leftrightarrow |f(x)+x|=\sqrt{x^2+4} \qquad (1)$$

Είναι όμως $\sqrt{x^2+4} \neq 0$, οπότε από την τελευταία σχέση παίρνουμε ότι $f(x)+x \neq 0$, $x \in R$.

Επομένως η συνάρτηση $g(x)=f(x)+x$, $x \in R$ ως συνεχής και χωρίς ρίζες διατηρεί πρόσημο και μάλιστα αφού $g(0)=f(0)=2>0$, είναι θετική .

Από την σχέση (1) παίρνουμε λοιπόν :

$$|f(x)+x|=\sqrt{x^2+4} \Leftrightarrow f(x)+x=\sqrt{x^2+4} \Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x^2+4}-x, x \in R$$

Παράδειγμα 6°

Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση f με την ιδιότητα $f(x)+lnf'(x)=x+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0)=1$

ΛΥΣΗ

Αρχικά πρέπει $f'(x)>0$.

$$\begin{aligned} & f(x)+\ln f'(x)=x+1 \Leftrightarrow \ln e^{f(x)}+\ln f'(x)=x+1 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \ln(e^{f(x)}f'(x))=x+1 \Leftrightarrow e^{f(x)}f'(x)=e^{x+1} \\ & \qquad \Leftrightarrow (e^{f(x)})'=(e^{x+1})' \end{aligned}$$

Άρα $e^{f(x)}=e^{x+1}+c, c \in R$. Όμως για $x=0$ είναι $c=0$.

Τελικά, $f(x)=x+1, x \in R$ αφού είναι $f'(x)=1>0$ για κάθε $x \in R$.Η συνάρτηση αυτή είναι δεκτή, διότι επαληθεύει όλα τα δεδομένα και τους περιορισμούς .

Παράδειγμα 7°

4. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f'(x)\left[e^{f(x)}+e^{-f(x)}\right]=2 \text{ για κάθε και } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0)=0.$$

Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ell n\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη

Η δοσμένη σχέση γράφεται :

$$f'(x)\left[e^{f(x)}+e^{-f(x)}\right]=2 \Leftrightarrow \left(\left[e^{f(x)}-e^{-f(x)}\right]\right)'=(2x)' \Leftrightarrow e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x+c$$

Θέτουμε $x=0$ και βρίσκουμε $c=0$,οπότε αναγόμαστε σε προηγούμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 9ο

Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(-1,+\infty)\to R$ με $f(0)=0$, $f'(0)=1$ και τέτοια , ώστε $f''(x)\cdot e^{2f(x)}=-1$ για κάθε $x\geq 0$. Να βρείτε την f .

Λύση

Ας ονομάσουμε (1) τη δοσμένη σχέση $f''(x)\cdot e^{2f(x)}=-1$.Είναι

$$f''(x)\cdot e^{2f(x)}=-1\Leftrightarrow f''(x)=-e^{-2f(x)}$$

Αυτή, πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $f'(x)$, δίνει

$$2f''(x)\cdot f'(x)=-e^{-2f(x)}\cdot 2f'(x)\Leftrightarrow$$

$$\left[\left(f'(x)\right)^2\right]'=\left(e^{-2f(x)}\right)'\Leftrightarrow \quad \left(f'(x)\right)^2=e^{-2f(x)}+c_1$$

Για $x=0$ παίρνουμε $c_1=0$.Άρα

$$\left(f'(x)\right)^2=e^{-2f(x)}\Leftrightarrow 2f'(x)\cdot f'(x)\cdot e^{2f(x)}=2\Leftrightarrow f'(x)\cdot\left(e^{2f(x)}\right)'=2\ (2)$$

Από τις σχέσεις (1) ,(2) προκύπτει ότι

$$f''(x)\cdot e^{2f(x)}+f'(x)\cdot\left(e^{2f(x)}\right)'=1\Leftrightarrow\left(f'(x)\cdot e^{2f(x)}\right)'=(x)'\Leftrightarrow f'(x)\cdot e^{2f(x)}=x+c_2$$

Για $x=0$ παίρνουμε $c_2=1$.Επομένως :

$$f'(x)\cdot e^{2f(x)}=x+1\Leftrightarrow 2f'(x)\cdot e^{2f(x)}=2x+2\Leftrightarrow\left(e^{2f(x)}\right)'=\left(x^2+2x\right)'\Leftrightarrow e^{2f(x)}=x^2+2x+c_3$$

Για $x=0$ προκύπτει ότι $c_3=1$.Επομένως :

$$e^{2f(x)}=x^2+2x+1\Leftrightarrow \ln e^{2f(x)}=\ln\left(x+1\right)^2\Leftrightarrow 2f(x)=2\ln\left|x+1\right|\overset{x>-1}{\Leftrightarrow} f(x)=\ln\left(x+1\right)$$

που επαληθεύει την αρχική σχέση .

ΜΕΘΟΔΟΣ Δ

Αν η δοσμένη σχέση περιέχει ολοκλήρωμα με την μεταβλητή της συνάρτησης στα άκρα ή μέσα στο ολοκλήρωμα, τότε :

- Βγάζουμε το x από τα ολοκληρώματα, κάνοντας ενδεχομένως απαραίτητα μια αντικατάσταση.
- Εξασφαλίζουμε την παραγωγισιμότητα όλων των όρων και παραγωγίζουμε με τον γνωστό τρόπο τις συναρτήσεις που ορίζονται από ολοκλήρωμα.
- Εφαρμόζουμε στη συνέχεια τις μεθόδους των προηγούμενων περιπτώσεων.

Τονίζουμε ότι μερικές φορές είναι προτιμότερη η παραγοντική ολοκλήρωση, ειδικά αν κάτω από το ολοκλήρωμα υπάρχει παράγωγος.

- Αν η ζητούμενη συνάρτηση βρίσκεται σε άκρο ολοκληρώματος, εφαρμόζουμε τα παραπάνω ή άλλες ειδικές πρακτικές και τεχνάσματα.
- Αν η συνάρτηση που ψάχνουμε βρίσκεται στα άκρα ολοκληρώματος και η διαφορά των άκρων βρίσκεται μέσα στην δοσμένη σχέση, τότε τη διαφορά αυτή τη γράφουμε στη μορφή ολοκληρώματος. Για παράδειγμα τη σχέση $\int_{2f(x)}^{f'(x)} g(t)dt = f'(x) - 2f(x)$ την γράφουμε

$$\int_{2f(x)}^{f'(x)} g(t)dt = \int_{2f(x)}^{f'(x)} 1dt \Leftrightarrow \int_{2f(x)}^{f'(x)} (g(t)-1)dt = 0$$

και με βάση τη συνέχεια και το σταθερό πρόσημο της συνάρτησης $h(t) = g(t) - 1$ ή το γεγονός ότι η h δεν αλλάζει πρόσημο παίρνουμε με τη γνωστή διαδικασία ότι $f'(x) = 2f(x)$.Η σχέση αυτή δίνει με τον γνωστό τρόπο που έχουμε περιγράψει σε άλλη ενότητα τη συνάρτηση f

Παράδειγμα :

Δίνονται οι γνησίως μονότονες και παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f : R \to R$ με τις ιδιότητες :

$2F(x) = g^2(x)$ και $2G(x) = f^2(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου F, G είναι αρχικές των συναρτήσεων f, g με $F(0) = G(0) = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $f = g$

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

Λύση

α) Καταρχάς εύκολα παίρνουμε ότι $f(0) = g(0) = 0$. Παραγωγίζοντας προκύπτει:

$$f(x) = g(x) \cdot g'(x) \text{ , οπότε } f(x) \cdot g(x) = g^2(x) \cdot g'(x)$$

και

$$g(x) = f'(x) \cdot f(x) \text{, οπότε } f(x) \cdot g(x) = f^2(x) \cdot f'(x) \text{ .}$$

Επομένως ισχύει ότι :

$$3g^2(x) \cdot g'(x) = 3f^2(x) f'(x) \Leftrightarrow \left(g^3(x)\right)' = \left(f^3(x)\right)' \Leftrightarrow$$

$g^3(x) = f^3(x) + c$ και αφού $g(0) = f(0)$ προκύπτει τελικά ότι

$$g^3(x) = f^3(x) \Leftrightarrow g(x) = f(x).$$

β) Ισχύει $f(x) = f(x) \cdot f'(x)$. Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη και $f(0) = 0$, το $x_0 = 0$ είναι η μοναδική της ρίζα. Επομένως είναι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $f'(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$, δηλαδή ότι $f(x) = x + c_1$ για $x > 0$ και $f(x) = x + c_2$ για $x < 0$, ενώ $f(0) = 0$.

Λόγω της συνέχειας της f προκύπτει ότι $c_1 = c_2 = 0$.Άρα $f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 10ο

Να βρείτε τη θετική και παραγωγίσιμη συνάρτηση f με $f(0) = 1$ που ικανοποιεί την ιδιότητα:

$$\int_{f'(x)}^{f(x)} f(t)dt = f'(x) - f(x) \text{ για κάθε } x \in R$$

ΛΥΣΗ

Έστω ότι υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ με $f(\xi) > f'(\xi)$. Η δοσμένη σχέση για $x = \xi$ δίνει άτοπο αφού το αριστερό μέλος είναι θετικό ενώ το δεξιό είναι αρνητικό.

Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο, αν υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ με $f(\xi) < f'(\xi)$. Συνεπώς

$$f(x) = f'(x) \Leftrightarrow f(x) = ce^x \Leftrightarrow f(x) = e^x, x \in \mathbb{R} \text{ αφού } f(0) = 1.$$

Η συνάρτηση αυτή είναι δεκτή.

Σχόλιο

Επειδή $\mathrm{f}'(\mathrm{x}) - \mathrm{f}(\mathrm{x}) = -\int_{\mathrm{f}'(\mathrm{x})}^{\mathrm{f}(\mathrm{x})} 1\mathrm{dt}$, η δοσμένη σχέση γίνεται $\int_{f'(x)}^{f(x)} (f(t)+1)dt = 0$, που αναγκαστικά είναι ισοδύναμη με την $f(x) = f'(x)$, μια και $f(t)+1 > 0$.

3. Να βρείτε τη θετική και παραγωγίσιμη συνάρτηση f με $f(0) = 1$ που ικανοποιεί την ιδιότητα:

$$\int_{f'(x)}^{f(x)} (f^2(t) - f(t))dt = f'(x) - f(x) \text{ για κάθε } x \in R$$

Απάντηση

Η σχέση γράφεται $\int\limits_{f'(x)}^{f(x)} \left(f^2(t) - f(t) + 1\right)dt = 0$ και συνεχίζουμε με διάκριση περιπτώσεων όπως στην παραπάνω άσκηση , αφού $f^2(t) - f(t) + 1 > 0$. Πάλι προκύπτει ότι $f(x) = f'(x)$, οπότε κατά τα γνωστά $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{e}^{\mathrm{x}}$.

Αν όλα τα ολοκληρώματα έχουν πραγματικά άκρα, τότε η εύρεση γίνεται με χρήση των θεωρημάτων συνέχειας και προσήμου ολοκληρώματος .

Παράδειγμα :

Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f στο $[0,1]$ με την ιδιότητα :

$$\int_0^1 f^2(x^2)dx = \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{3}$$

Λύση

Ας είναι $A = \int_0^1 f(x)dx$.

Θέτουμε $\sqrt{x} = y \geq 0 \Leftrightarrow x = y^2$ και παίρνουμε $dx = 2ydy$.Νέα άκρα ολοκλήρωσης είναι τα $y_1 = 0, y_2 = 1$.

Έτσι, $A = \int_0^1 2yf(y^2)dy = \int_0^1 2xf(x^2)dx$.

Από την αρχική σχέση προκύπτει ότι

$$\int_0^1 f^2(x^2)dx = \int_0^1 2xf(x^2)dx - \int_0^1 x^2\,dx \Leftrightarrow \int_0^1 \left[f^2(x^2) - 2xf(x^2) - x^2\right]dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \left[f(x^2) - x\right]^2 dx = 0 \quad \Leftrightarrow f(x^2) = x, x \in [0,1] :.$$

Στην τελευταία σχέση για $x \to \sqrt{x} \in [0,1]$ παίρνουμε: $f(x) = \sqrt{x}, x \in [0,1]$

Γενικά παραδείγματα στην Εύρεση

1° . Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση f με την ιδιότητα $4f(x) = \left(f'(x)\right)^2 + x^2$ για κάθε $x \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{2}x^2 \;, x \in R$.

β) Να αποδείξετε ότι από τα σημεία της ευθείας $\varepsilon : y = -\frac{1}{2}$ άγονται δύο κάθετες μεταξύ τους εφαπτομένες προς τη C_f .

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $A = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{e^x + 1}dx$.

δ) Ένα σημείο N της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με θετική τετμημένη απομακρύνεται από τον άξονα y'y με ρυθμό $2m/s$.Να βρείτε το ρυθμό που μεταβάλλεται η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο σημείο N με τον άξονα x'x , τη στιγμή που αυτή είναι ίση με 45^o .

ΛΥΣΗ

α) Προφανώς το σταθερό πολυώνυμο δεν επαληθεύει την ισότητα για κάθε $x \in R$ άρα η f είναι πολυωνυμική ν-στού βαθμού με $\nu \geq 1$

Αν $\nu = 1$ τότε $f(x) = \alpha x + \beta,\ \alpha \neq 0$ και η $f'(x) = \alpha,\ x \in R$ και η δοθείσα θα είναι

$4\alpha x + 4\beta = \alpha^2 + x^2$ που είναι αδύνατο για κάθε $x \in R$

Έτσι η f θα είναι αναγκαία πολυωνυμική βαθμού $\nu \geq 2$ οπότε η f' θα είναι πολυωνυμική $\nu - 1$ βαθμού .

Άρα η $\left(f'(x)\right)^2$ πολυωνυμική $2(\nu - 1) \geq 2$ βαθμού και λόγω της ισότητας $4f(x) = (f'(x))^2 + x^2$ θα ισχύει από την ισότητα των βαθμών των πολυωνύμων ότι $\nu = 2(\nu - 1) \Leftrightarrow \nu = 2$ οπότε

$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,\ \alpha \neq 0$ και επειδή $f'(x) = 2\alpha x + \beta$ στην δοθείσα σχέση θα έχουμε

$$4\alpha x^2 + 4\beta x + 4\gamma = (2\alpha x + \beta)^2 + x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\alpha x^2 + 4\beta x + 4\gamma = (4\alpha^2 + 1)x^2 + 4\alpha\beta x + \beta^2$$

και λόγω της ισότητας θα ισχύουν

$$4\alpha = 4\alpha^2 + 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2} \text{ και } 4\beta = 4\alpha\beta \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{2}\beta \Leftrightarrow \beta = 0$$

και $4\gamma = \beta^2 = 0$ επομένως $f(x) = \frac{1}{2}x^2,\ x \in R$

β) Είναι $f'(x) = x$ και από σημείο της $M(x_0, \frac{1}{2}x_0^2)$ η εφαπτομένη έχει εξίσωση

$$y - \frac{1}{2}x_0^2 = x_0(x - x_0) \Leftrightarrow y = x_0 x - \frac{1}{2}x_0^2$$

\ και αν περνάει από σημείο $(\kappa, -\frac{1}{2})$ της $y = -\frac{1}{2}$ θα ισχύει ότι

$$-\frac{1}{2} = x_0\kappa - \frac{1}{2}x_0^2 \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0\kappa - 1 = 0$$

Επειδή η εξίσωση

$x^2 - 2\kappa x - 1 = 0$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 4\kappa^2 + 4 > 0$ θ έχει πάντα δύο ρίζες , έστω x_1, x_2

που λόγω Vieta θα έχουν γινόμενο $x_1 x_2 = -1$ δηλαδή θα ισχύει ότι $f'(x_1)f'(x_2) = -1$

που σημαίνει ότι οι εφαπτόμενες στα σημεία με τετμημένες x_1, x_2 είναι κάθετες.

γ) Με $u=-x$ είναι $du=-dx$ και για $x=-1\to u=1,\ x=1\to u=-1$ και το

$$A=\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{e^x+1}dx=\int_{1}^{-1}\frac{f(-x)}{e^{-x}+1}(-du)=\int_{-1}^{1}\frac{f(x)e^x}{e^x+1}dx=B$$

Έτσι έχουμε $A+B=\int_{-1}^{1}\frac{f(x)(e^x+1)}{e^x+1}dx\Leftrightarrow 2A=\int_{-1}^{1}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x^2dx\Leftrightarrow ....\Leftrightarrow A=\frac{1}{6}$

δ) Γνωρίζουμε ότι $x'(t)=2$ και έστω ω η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη στο σημείο N.

Τότε θα ισχύει ότι :

$\varepsilon\varphi\omega=f'(x)=x>0$ και για κάθε χρονική στιγμή είναι $\varepsilon\varphi(\omega(t))=x(t)$

Άρα, παραγωγίζοντας, παίρνουμε $(1+\varepsilon\varphi^2(\omega(t)))\omega'(t)=x'(t)$ και την χρονική στιγμή που

$$\omega(t_0)=\frac{\pi}{4} \text{ θα είναι } (1+1)\omega'(t_0)=2\Leftrightarrow \omega'(t_0)=1$$

Β. ΘΕΜΑΤΑ ΥΠΑΡΞΗΣ

Θέματα ύπαρξης μπορούμε συνήθως να αντιμετωπίσουμε :

α) Με θεώρημα Bolzano στη συνάρτηση της διαφοράς, αφού γίνει πρώτα η απαλοιφή τυχόν ανεπιθύμητων παρονομαστών.

β) Με το θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών.

γ) Με το θεώρημα Μέγιστης – Ελάχιστης τιμής .

δ) Με εύρεση του συνόλου τιμών.

Για παράδειγμα, αν για μια συνεχή συνάρτηση $\mathrm{f}:\mathrm{A}\to\mathrm{R}$ *βρούμε ότι* $\mathrm{f}(\mathrm{A})=\mathrm{B}$ *και* $\beta\in\mathrm{B}$ *, τότε υπάρχει* $\alpha\in\mathrm{A}$ *τέτοιο , ώστε* $\mathrm{f}(\alpha)=\beta$ *.Αν μάλιστα η συνάρτηση* f *είναι γνησίως μονότονη, τότε αυτό το* α *είναι μοναδικό.*

Την παραπάνω διαδικασία την εφαρμόζουμε ακριβώς με τον ίδιο τρόπο και στην απόδειξη για την ύπαρξη ρίζας μια εξίσωσης , αφού αν $\beta\in\mathrm{B}=\mathrm{f}(\mathrm{A})$*, τότε η εξίσωση* $\mathrm{f}(\mathrm{x})=\beta$ *έχει ρίζα στο* A *.Η ρίζα αυτή, σε περίπτωση γνησίως μονότονης συνάρτησης , είναι μοναδική.*

ε) Με απαγωγή σε άτοπο, χρησιμοποιώντας την πρόταση :

" ***Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε διατηρεί***

πρόσημο" **.**

Αξίζει επίσης να σημειώσουμε πως αν μια συνάρτηση δεν μηδενίζεται, τότε μπορεί να είναι ο παρονομαστής μιας άλλης συνάρτησης .

στ) Με το θεώρημα Rolle σε κατάλληλη βοηθητική συνάρτηση , που συνήθως βρίσκεται με αντιπαραγώγιση ή δοκιμές.

ζ) Με το ΘΜΤ στη δοσμένη ή σε κατάλληλη βοηθητική συνάρτηση.

Παράδειγμα 1ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)\,\ell nx - 1$, $x > 0$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1=(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1,+\infty)$. Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1} = e^{2013}$, x>0 έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

γ. Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος Γ.2, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(x_0) + f(x_0) = 2012$$

Παράδειγμα 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(0, +\infty)$.

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f\left(e^{3-x} \cdot (x^2+1)\right) = \frac{e^2}{5}$$

έχει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών μία ακριβώς ρίζα.

Παράδειγμα 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{-x}(\ln x-x)$, $x>0$ και έστω F μια αρχική της f.

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση F είναι κυρτή και στη συνέχεια ότι

$$F(x)+F(3x)>2F(2x),\ \text{για κάθε } x>0.$$

β. Δίνεται ο σταθερός πραγματικός αριθμός $\beta>0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(\beta,2\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$F(\beta)+F(3\beta)=2F(\xi)$$

Παράδειγμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ell n\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, την ευθεία $y=x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{1-3\int_0^{x-2}f(t^2)dt}{x-3}+\frac{8-3\int_0^{x}f^2(t)dt}{x-2}=0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (2,3).

Γ. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ –ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Γ1. Εξισώσεις

Μέθοδος 1η

Κάθε εξίσωση, μετά από πιθανή εκτέλεση πράξεων ή κατάλληλους αλγεβρικούς μετασχηματισμούς(πχ λογαριθμίζουμε ή πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με κατάλληλη μη μηδενιζόμενη παράσταση) έχει ή παίρνει τη μορφή $f(x)=0$, όπου f είναι κατάλληλη συνάρτηση, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , που είναι και το πεδίο ορισμού της εξίσωσης. Υποθέτουμε ότι η εξίσωση αυτή δεν μπορεί να λυθεί με αλγεβρικές μεθόδους.

Α. Έστω ότι για τη συνάρτηση f γνωρίζουμε ή μπορούμε να αποδείξουμε ότι είναι $1-1$. Προσπαθούμε τότε να βρούμε με παρατήρηση έναν αριθμό $\alpha \in A$, ώστε $f(\alpha)=0$. Φέρνουμε λοιπόν την εξίσωση στη μορφή $f(x)=f(\alpha)$, οπότε λόγω του $1-1$ παίρνουμε :

$$f(x)=f(\alpha) \Leftrightarrow x=\alpha$$

Επομένως η μοναδική ρίζα της εξίσωσης είναι η $x=\alpha$.

Β. Είναι συνήθως πιο εύκολο να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη. Στη συνέχεια προσπαθούμε να εντοπίσουμε με παρατήρηση μια ρίζα της εξίσωσης, δηλαδή αριθμό $\alpha \in A$, ώστε $f(\alpha)=0$.

Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, η ρίζα αυτή είναι και η μοναδική

Γ. Εντοπίζουμε με παρατήρηση μια ρίζα και με απαγωγή σε άτοπο αποδεικνύουμε ότι η εξίσωση δεν έχει άλλη ρίζα,

Εφαρμογή 1η

Να λύσετε την εξίσωση :

$$(2^x+3^x)^{2014}=(2^{2014}+3^{2014})^x$$

Λύση

Διαιρούμε και τα δύο μέλη της δοσμένης εξίσωσης με 3^{2014x} και ισοδύναμα παίρνουμε την εξίσωση:

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^x+1\right]^{2014}=\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2014}+1\right]^x$$

Προφανής ρίζα είναι η τιμή $x=2014$. Διακρίνουμε στη συνέχεια τις περιπτώσεις

$$x < 2014 \;,\; x > 2014 .$$

Στην πρώτη πχ περίπτωση, όπου $x < 2014$, λόγω του γεγονότος ότι η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ είναι γνησίως φθίνουσα, ενώ η συνάρτηση $g(x) = \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{2014} + 1\right)^x$ είναι γνησίως αύξουσα παίρνουμε :

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^x + 1\right]^{2014} > \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2014} + 1\right]^{2014} > \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2014} + 1\right]^x$$

που σημαίνει ότι δεν υπάρχουν ρίζες μικρότερες του 2014 .Όμοια εργαζόμαστε και για $x > 2014$. Άρα η μοναδική ρίζα της δοσμένης εξίσωσης είναι η $x = 2014$.

Εφαρμογή 3η

Να λύσετε την εξίσωση $e^{-x} = x^2 + 1$

Λύση

Σύμφωνα με τα σχόλια και την ανάλυση της μεθόδου, πρώτα εξετάζουμε αν μπορούμε να εντοπίσουμε ρίζα. Πράγματι, η τιμή $x = 0$ είναι λύση της εξίσωσης.

Φέρνουμε όλους τους όρους στο α΄ μέλος και θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^{-x} - x^2 - 1$. Είναι

$$f'(x) = (e^{-x} - x^2 - 1)' = -e^{-x} - 2x \;\text{ και }\; f''(x) = (-e^{-x} - 2x)' = e^{-x} - 2 .$$

Φαίνεται όμως με την πρώτη ματιά ότι αφού η πρώτη παράγωγος δεν δίνει αμέσως ρίζα και πρόσημο, ενώ η δεύτερη παράγωγος δεν διατηρεί πρόσημο, δεν είναι κακή σκέψη να αλλάξουμε τη μορφή της εξίσωσης και αν χρειαστεί , επανερχόμαστε . Είναι λοιπόν :

$$e^{-x} = x^2 + 1 \Leftrightarrow (x^2 + 1)e^x = 1 \Leftrightarrow (x^2 + 1)e^x - 1 = 0$$

Ας θεωρήσουμε λοιπόν τη συνάρτηση $f(x) = (x^2 + 1)e^x - 1, x \in R$.Είναι

- $f(0) = 0$
- $f'(x) = ((x^2 + 1)e^x - 1)' = e^x (x + 1)^2 > 0, x \neq -1$

Η συνάρτηση λοιπόν f είναι γνησίως μονότονη, οπότε η τιμή $x = 0$ είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$, συνεπώς και της αρχικής εξίσωσης ■

Να σημειώσουμε ότι θα μπορούσαμε να συνεχίσουμε την πρώτη μας προσπάθεια , η διαδικασία όμως θα ήταν πιο πολύπλοκη διότι θα έπρεπε να βρούμε το πρόσημο της f'' , τη μονοτονία και το πρόσημο της f' και τελικά τη μονοτονία της $f(x)=e^{-x}-x^2-1$. Ας το επιχειρήσει μόνος του ο απαιτητικός μαθητής. Ωστόσο, μια πολύ εύκολη ενέργεια κατέστησε την λύση της άσκησης πολύ πιο απλή. Υπάρχουν περιπτώσεις που χωρίς τον κατάλληλο μετασχηματισμό της εξίσωσης η επίλυσή της είναι δυσχερής ή αδύνατη.

Μέθοδος $2^η$

Α. Φέρνουμε την εξίσωση στη μορφή $f(x)=f(\alpha)$ και αποδεικνύουμε ότι το α είναι το μοναδικό σημείο, στο οποίο η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό ακρότατο . Αυτό συνήθως το πετυχαίνουμε με το να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f αλλάζει μονοτονία μόνο στο $x=\alpha$.Για το λόγο αυτό μελετάμε αρχικά την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. Στη συνέχεια, αν το α είναι το μοναδικό σημείο, στο οποίο η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό ακρότατο , τότε με τη βοήθεια του ορισμού της μονοτονίας προκύπτει ότι $f(x)\neq f(\alpha)$ για κάθε $x\neq\alpha$.Έτσι το $x=\alpha$ είναι η μοναδική ρίζα.

Β. Σε εξισώσεις που έχουν ή παίρνουν την μορφή $f(x)=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$, όπου f είναι μια κυρτή ή κοίλη συνάρτηση μπορούμε , εκτός από τη μέθοδο της διαφοράς , εργαστούμε και ως εξής :

- Παρατηρούμε το $x=\alpha$ είναι ρίζα της εξίσωσης.
- Βλέπουμε ότι το β΄ μέλος είναι το y στην ευθεία της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(\alpha,f(\alpha))$.
- Από την ιδιότητα της εφαπτομένης σε κυρτή ή κοίλη συνάρτηση συμπεραίνουμε ότι η τιμή $x=\alpha$ είναι η μοναδική.

Εφαρμογή $4^η$

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+\frac{x+1}{x}$.

α) Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=2$

γ) Να λυθεί η εξίσωση $f(x^2+1)+f(x^4+1)=4$

Λύση

α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $D_f=(0,+\infty)$. Είναι :

$$f'(x)=\left(\ln x+\frac{x+1}{x}\right)'=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$$

Από το πρόσημο της f' προκύπτει ότι η f είναι :

- ♦ Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,1]$
- ♦ Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$

β) Από τη μονοτονία της f προκύπτει ότι το $f(1)=2$ είναι ολικό ελάχιστο της f και μάλιστα αυτό παρουσιάζεται μόνο στη θέση $x_0=1$.Αυτό σημαίνει ότι είναι $f(x)>2$ για κάθε $x\neq 1$.

Άρα η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=2$ είναι η $x=1$.

Σχόλιο

Μπορούμε να εργαστούμε πιο αναλυτικά ως εξής :

♦ Αν $x<1$, τότε $f(x)>f(1)=2$, δηλαδή $f(x)>2$.Αυτό σημαίνει ότι $f(x)\neq 2$ για $x<1$.

♦ Αν $x>1$, τότε $f(x)>f(1)=2$, δηλαδή $f(x)>2$.Αυτό σημαίνει ότι $f(x)\neq 2$ για $x>1$.

Επομένως η μοναδική ρίζα της εξίσωσης είναι η $x=1$

γ) Παρατηρούμε ότι η εξίσωση $f(x^2+1)+f(x^4+1)=4$ αληθεύει για $x=0$.Αυτή η ρίζα είναι η μοναδική, αφού για κάθε άλλη τιμή του x είναι $x^2+1\neq 1$ και $x^4+1\neq 1$, οπότε $f(x^2+1)>2$ και $f(x^4+1)>2$, δηλαδή $f(x^2+1)+f(x^4+1)>2+2=4$. Άρα

$$f(x^2+1)+f(x^4+1)=4\Leftrightarrow x=4 \ ■$$

Μέθοδος $3^η$

Αν η εξίσωση έχει σχετικά πολύπλοκη μορφή , προσπαθούμε να τη φέρουμε στη μορφή $f((g(x))=f(h(x))$, όπου f είναι μια κατάλληλη $1-1$ συνάρτηση.

Επομένως θα είναι :

$$f((g(x))=f(h(x))\Leftrightarrow g(x)=h(x)$$

Η νέα εξίσωση είτε λύνεται αλγεβρικά, είτε λύνεται όπως στις μεθόδους που περιγράψαμε παραπάνω.

Εφαρμογή 6η

Να λύσετε την εξίσωση:

$$2\left(x^2-3x+2\right)=\ln\left[\frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right]$$

Εξετάσεις 2010

Λύση

Βλέπουμε αρχικά ότι η εξίσωση έχει νόημα(ορίζεται) σε όλο το R .
Είναι φανερό ότι μάλλον πρέπει να εξετάσουμε μήπως η εξίσωση παίρνει μια πιο καλή μορφή και όχι να θεωρήσουμε για μελέτη τη συνάρτηση της διαφοράς. Παρατηρούμε λοιπόν ότι :

$$2\left(x^2-3x+2\right)=\ln\left[\frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right]\Leftrightarrow \ln((3x-2)^2+1)+2(3x-2)=\ln(x^4+1)+2x^2$$

$$\Leftrightarrow \ln((3x-2)^2+1)+2(3x-2)=\ln((x^2)^2+1)+2x^2$$

Αν λοιπόν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x)=\ln(x^2+1)+2x$, τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή :

$$\ln((3x-2)^2+1)+2(3x-2)=\ln((x^2)^2+1)+2x^2 \Leftrightarrow f(3x-2)=f(x^2)$$

Θα μελετήσουμε επομένως την f ως προς τη μονοτονία .Είναι

$$f'(x)=\left(\ln(x^2+1)+2x\right)'=\frac{2x}{x^2+1}+2=2\frac{x^2+x+1}{x^2+1}>0$$

Αφού λοιπόν η παράγωγος της f είναι θετική σε όλο το R , η f είναι γνησίως αύξουσα. Είναι επομένως και $1-1$, οπότε η εξίσωση γίνεται :

$$f(3x-2)=f(x^2)\Leftrightarrow 3x-2=x^2\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow (x=2 \ \text{ή} \ x=1)$$

Και οι δύο αυτές τιμές είναι δεκτές, μια και δεν έχουμε περιορισμούς ■

Εφαρμογή 7η

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-\ln(xe^x)$.Να λυθεί η εξίσωση :

$$f(x^4+3)+f(x^2+1)=f(x^4+1)+f(x^2+3)$$

Λύση

Η εξίσωση αλλάζοντας τη θέση των όρων παίρνει τη μορφή:

$$f(x^4+3)-f(x^4+1)=f(x^2+3)-f(x^2+1)$$

Είναι

- $f(x)=e^x-\ln(xe^x)=e^x-x-\ln x$, με $x>0$
- $f'(x)=(e^x-x-\ln x)'=e^x-\frac{1}{x}-1$ και $f''(x)=(e^x-\frac{1}{x}-1)'=e^x+\frac{1}{x^2}>0, x>0$

Επομένως η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Η μορφή της εξίσωσης μας οδηγεί να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x+2)-f(x)$, αφού έτσι η εξίσωση παίρνει τη μορφή $g(x^4+1)=g(x^2+1)$, με $x\in R$.Είναι όμως :

$g'(x)=f'(x+2)-f'(x)>0$ διότι η f' είναι γνησίως αύξουσα και $x+2>x$.Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα, συνεπώς είναι και $1-1$.Έτσι, τελικά παίρνουμε :

$$g(x^4+1)=g(x^2+1)\Leftrightarrow x^4+1=x^2+1\Leftrightarrow x^4-x^2=0\Leftrightarrow x^2(x^2-1)=0\Leftrightarrow (x=0 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=-1)$$

Μέθοδος 4η

Σε ορισμένες , πιο σπάνιες περιπτώσεις, πιθανόν να χρειαστεί να εντοπίσουμε με παρατήρηση δύο ή περισσότερες ρίζες και να αποδείξουμε ότι οι ρίζες αυτές είναι οι μοναδικές. Αυτό μπορεί να γίνει και ως εξής: Υποθέτουμε ότι η εξίσωση (που παίρνει ή έχει τη μορφή $f(x)=0$) έχει π.χ τουλάχιστον τρεις ρίζες , οπότε με διαδοχικές εφαρμογές του θεωρήματος Rolle για τις f, f', f'' προσπαθούμε να καταλήξουμε σε άτοπο.

Εφαρμογή 8η

Να λύσετε την εξίσωση $2^x+3^{2x}=9x+2$

Λύση

Παρατηρούμε ότι οι αριθμοί $x=0, x=1$ επαληθεύουν την εξίσωση , οπότε είναι ρίζες. Θα αποδείξουμε με τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο ότι αυτές οι λύσεις είναι οι μοναδικές. Έστω λοιπόν ότι υπάρχει και άλλη λύση και ας ονομάσουμε a,b,c τις τρεις (τουλάχιστον) από τις ρίζες της εξίσωσης, με $a<b<c$. Είναι προφανές ότι δύο από τους αριθμούς a,b,c είναι οι 0 και 1 .

Η εξίσωση μας οδηγεί στη συνάρτηση $f(x)=2^x+3^{2x}-9x-2$.Είναι τότε $f(a)=f(b)=f(c)=0$.

Από το θεώρημα Rolle για την f υπάρχουν $x_1\in(a,b)$ και $x_2\in(b,c)$ τέτοια, ώστε :

$f'(x_1)=0$ και $f'(x_2)=0$

Επίσης, πάλι από το θεώρημα του Rolle αλλά για την f' , υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$, με $f''(\xi)=0$.

Είναι όμως :

$$f'(x)=2^x \ln 2+2\cdot 3^{2x}\ln 2-9 \quad \text{και} \quad f''(x)=2^x \ln^2 2+4\cdot 3^{2x}\ln^2 2>0$$

Αλλά η τελευταία σχέση με την $f''(\xi)=0$ οδηγούν σε άτοπο. Η εξίσωση λοιπόν δεν μπορεί να έχει τρεις ή περισσότερες ρίζες, οπότε οι λύσεις της είναι αναγκαστικά οι $x=0, x=1$ ■

Εφαρμογή 9η

Να λύσετε την εξίσωση $2^x+3^x+6^x=3x^2+5x+3$

Υπόδειξη

Προφανείς ρίζες είναι οι $x=0, x=1, x=-1$.Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τέσσερις τουλάχιστον ρίζες, τις a, b, c, d με $a<b<c<d$. Όπως στην προηγούμενη εφαρμογή , πάλι με διαδοχικές εφαρμογές του θεωρήματος Rolle για τη συνάρτηση $f(x)=2^x+3^x+6^x-3x^2-5x-3$, θα πρέπει να υπάρχει ξ με $f^{(3)}(x)=0$.Αυτό όμως είναι άτοπο , διότι :

$$f^{(3)}(x)=2^x \ln^3 2+3^x \ln^3 2+6^x \ln^3 6>0$$

Εφαρμογή 10η

Έστω $f: R \to R$ κυρτή συνάρτηση και $\alpha \in R$.Να λύσετε την εξίσωση :

$$f(x)=f(\alpha)+f'(\alpha)(x-\alpha)$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι προφανής ρίζα της εξίσωσης είναι η $x=\alpha$. Έστω ότι υπάρχει και άλλη ρίζα x της εξίσωσης με $x \neq \alpha$, πχ $x>\alpha$. Σύμφωνα με το ΘΜΤ, υπάρχει $\xi \in (x, \alpha)$, τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \Leftrightarrow f(x)=f(\alpha)+f'(\xi)(x-\alpha)$$

Επομένως η εξίσωση παίρνει τη μορφή :

$$f(x)=f(\alpha)+f'(\alpha)(x-\alpha) \Leftrightarrow f(\alpha)+f'(\xi)(x-\alpha)=f(\alpha)+f'(\alpha)(x-\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(\xi)(x-\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha) \Leftrightarrow f'(\xi)=f'(\alpha) \Leftrightarrow \xi=\alpha$$

διότι η f είναι κυρτή , οπότε η f' , ως γνησίως αύξουσα , είναι $1-1$. Αλλά η σχέση $\xi=\alpha$ οδηγεί σε άτοπο, διότι $\xi \in (x, \alpha)$ που σημαίνει ότι $\xi \neq \alpha$.

Όμοια καταλήγουμε σε άτοπο , αν δεχθούμε ότι υπάρχει ρίζα x της εξίσωσης με $x<\alpha$. Άρα η μοναδική ρίζα της δοσμένης εξίσωσης είναι η $x=\alpha$.

Άλλος τρόπος

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(\alpha, f(\alpha))$ είναι η εξής :

$$(\varepsilon):\ y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x-\alpha) \Leftrightarrow y = f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha)$$

Αλλά η f είναι κυρτή, οπότε η γραφική της παράσταση είναι πάνω από την εφαπτομένη (ε) , με εξαίρεση το σημείο επαφής $M(\alpha, f(\alpha))$. Έτσι , για $x \neq \alpha$ ισχύει ότι :

$$f(x) > y \Leftrightarrow f(x) > f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha)$$

Αφού το $x = \alpha$ είναι ρίζα της δοσμένης εξίσωσης, από την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε ότι αυτή είναι και η μοναδική ■

Μέθοδος 5η

Υπάρχει μια ειδική κατηγορία εξισώσεων, που έχουν τη γενική μορφή :

$$f(a(x)) + f(b(x)) = f(d(x)) + f(g(x))$$

Στις εξισώσεις αυτές προσπαθούμε αρχικά να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη. Στη συνέχεια, αφού εντοπίσουμε μια ρίζα ρ της δοσμένης εξίσωσης, προσπαθούμε με τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο να αποδείξουμε ότι η εξίσωση δεν έχει άλλη ρίζα. Αυτό το πετυχαίνουμε διακρίνοντας τις περιπτώσεις $x < \rho$ ή $x > \rho$, συγκρίνοντας τις ποσότητες $a(x), b(x), d(x), g(x)$ κατάλληλα ανά δύο και χρησιμοποιώντας το είδος της μονοτονίας των συναρτήσεων a, b, d, g αλλά και της συνάρτησης f .

Εφαρμογή 13η

Να λυθεί η εξίσωση

$$2^x \ln(2^x+1) + 4^x \ln(4^x+1) = 3^x \ln(3^x+1) + 5^x \ln(5^x+1)$$

Λύση

Μια προφανής ρίζα είναι η $x = 0$. Παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = x\ln(x+1)$,με $x > -1$, τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή :

$$f(2^x) + f(4^x) = f(3^x) + f(5^x)$$

Είναι όμως :

$$f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1} = \ln(x+1) + 1 - \frac{1}{x+1} \quad \text{και} \quad f''(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} > 0 .$$

Είναι $f'(0) = 0$ και η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα. Άρα η f' είναι αρνητική στο διάστημα $(-1, 0)$ και θετική στο $(0, +\infty)$

Η συνάρτηση f είναι λοιπόν γνησίως φθίνουσα στο $(-1,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

♦ Για $x<0$ είναι $2^x>3^x$ και $4^x>5^x$, οπότε $f(2^x)>f(4^x)$ και $f(4^x)>f(5^x)$, διότι οι αριθμοί $2^x,3^x,4^x,5^x$ ανήκουν στο διάστημα $(0,+\infty)$.Αυτές με πρόσθεση κατά μέλη δίνουν :

$$f(2^x)+f(4^x)>f(3^x)+f(5^x)$$

♦ Για $x>0$ είναι $2^x<3^x$ και $4^x<5^x$, οπότε $f(2^x)<f(4^x)$ και $f(4^x)<f(5^x)$, διότι οι αριθμοί $2^x,3^x,4^x,5^x$ ανήκουν επίσης στο διάστημα $(0,+\infty)$.Αυτές με πρόσθεση κατά μέλη δίνουν :

$$f(2^x)+f(4^x)<f(3^x)+f(5^x)$$

Επομένως η εξίσωση $f(2^x)+f(4^x)=f(3^x)+f(5^x)$ δεν έχει άλλη ρίζα εκτός από την $x=0$ ■

Μέθοδος 6η

Σε ορισμένες περιπτώσεις εντοπίζουμε ρίζες με παρατήρηση, αλλά η μοναδικότητα αυτών των ριζών εξασφαλίζεται μόνο με την εύρεση των διαστημάτων της μονοτονίας. Έτσι, αν η βοηθητική συνάρτηση f αλλάζει μονοτονία μόνο μια φορά και στο καθένα από τα διαστήματα που δημιουργούνται έχουμε ρίζα, τότε η εξίσωση έχει δύο ακριβώς ρίζες και η διαδικασία επίλυσης έχει ολοκληρωθεί.

Εφαρμογή 14η

Να λυθεί η εξίσωση $4^x=x^4$, $x>0$

Λύση

Δύο προφανείς ρίζες της εξίσωσης είναι οι $x=2, x=4$.Θα αποδείξουμε ότι αυτές είναι και οι μοναδικές. Λογαριθμίζοντας βλέπουμε ότι εξίσωση παίρνει την ισοδύναμη μορφή $\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln 4}{4}$.

Θεωρούμε λοιπόν τη συνάρτηση $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ και βρίσκουμε ότι :

♦ $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, $x>0$

♦ Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$.

Έτσι , αφού $2<e$ και $4>e$, βλέπουμε ότι :

♦ Στο διάστημα $(0,e]$ είναι

$$\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln 4}{4}\Leftrightarrow\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln 2}{2}\Leftrightarrow f(x)=f(2)\Leftrightarrow x=2$$

♦ Στο διάστημα $[e,+\infty)$ είναι

$$\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln 4}{4}\Leftrightarrow f(x)=f(4)\Leftrightarrow x=4$$

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι $f(x)=2^x$, $g(x)=x^2$ ■

Μέθοδος $7^η$ (Εξίσωση με ολοκλήρωμα)

Η εξίσωση έχει ή παίρνει συνήθως τη μορφή $\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)dt = 0$, όπου f είναι συνεχής συνάρτηση . Στην περίπτωση αυτή αποδεικνύουμε πρώτα ότι η f είναι θετική (ή αρνητική) στο διάστημα Δ.Στη συνέχεια θεωρούμε τη συνάρτηση $H(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$, $x \in \Delta$ και παρατηρούμε ότι η εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$H(g(x)) = 0 = H(\alpha) \qquad (1).$$

Είναι όμως $H'(x) = f(x) > 0$ (ή $H'(x) = f(x) < 0$), οπότε η συνάρτηση H είναι γνησίως μονότονη. Έτσι η εξίσωση (1) ισοδύναμα γίνεται

$$H(g(x)) = H(\alpha) \Leftrightarrow g(x) = \alpha$$

Στη συνέχεια λύνουμε την νέα εξίσωση είτε αλγεβρικά, είτε με τις μεθόδους που περιγράψαμε παραπάνω.

Άλλος τρόπος

Αφού αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο, μπορούμε να εργαστούμε και ως εξής. Ας υποθέσουμε πχ ότι $f(x) > 0$, $x \in \Delta$.

- Αν ήταν $\alpha < g(x)$ για κάποιο $x \in \Delta$, τότε θα ήταν και $\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)dt > 0$, άτοπο.
- Αν ήταν $\alpha > g(x)$ για κάποιο $x \in \Delta$, τότε θα ήταν $\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)dt < 0$, άτοπο.

Επομένως , αναγκαστικά παίρνουμε :

$$\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)dt = 0 \Leftrightarrow g(x) = \alpha$$

Ανάλογα εργαζόμαστε αν η συνάρτηση f είναι αρνητική . Επίσης με τον ίδιο τρόπο εργαζόμαστε αν και τα δύο άκρα ολοκλήρωσης είναι μεταβλητά, δηλαδή είναι μη σταθερές συναρτήσεις του x .

Άλλος τρόπος

Σε αρκετές επίσης περιπτώσεις σύντομες λύσεις πετυχαίνουμε με εφαρμογή του Θεωρήματος Μέσης Τιμής για το Ολοκλήρωμα. Σύμφωνα με αυτό, αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε υπάρχει $\gamma \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = f(\gamma)(\beta - \alpha)$$

Αν λοιπόν είναι $f(t) \neq 0$ για κάθε $t \in \Delta$, τότε παίρνουμε ότι

$$\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)dt = 0 \Leftrightarrow f(\gamma)(g(x) - \alpha) = 0 \Leftrightarrow g(x) = \alpha$$

Εφαρμογή 15η

Να λύσετε την εξίσωση $\int_1^{e^x} \sqrt{t^2+1}\,dt = 0$

Λύση

Επειδή $\sqrt{t^2+1} > 0$ και επιπλέον η συνάρτηση $h(t) = \sqrt{t^2+1}$ είναι συνεχής στο R , είναι $\int_\alpha^\beta \sqrt{t^2+1}\,dt \neq 0$ για κάθε $\alpha \neq \beta$ και πιο συγκεκριμένα :

- Αν $\alpha < \beta$, τότε $\int_\alpha^\beta \sqrt{t^2+1}\,dt > 0$
- Αν $\alpha > \beta$, τότε $\int_\alpha^\beta \sqrt{t^2+1}\,dt < 0$

Σύμφωνα με τα παραπάνω παίρνουμε :

$$\int_1^{e^x} \sqrt{t^2+1}\,dt = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \blacksquare$$

Εφαρμογή 16η

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x}, & \alpha\nu \ \ x \neq 0 \\ 1 \ \ , & \alpha\nu \ \ x = 0 \end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$ και στη συνέχεια ότι είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να λύσετε την εξίσωση

$$\int_1^{2f'(x)} f(u)\,du = 0$$

Εξετάσεις 2014

Λύση

α) Είναι

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1 = f(0)$$

Άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Για $x \neq 0$ είναι $f'(x) = \dfrac{xe^x - e^x + 1}{x^2} = \dfrac{h(x)}{x^2}$ όπου $h(x) = xe^x - e^x + 1$.

Το πρόσημο της h καθορίζει το πρόσημο της f'.

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ με $h'(x) = xe^x$.

Επίσης είναι :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	↘	0	↗

- ♦ $h'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$
- ♦ $h'(x)>0 \Leftrightarrow x>0$. Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.
- ♦ $h'(x)<0 \Leftrightarrow x<0$. Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$.

Συνεπώς για $x>0$ έχουμε $h(x)>h(0) \Leftrightarrow f'(x)>0$. Όμοια, για $x<0$ έχουμε $h(x)>h(0) \Leftrightarrow f'(x)>0$.

Τελικά, αφού $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

β) Θα βρούμε αρχικά την παράγωγο της f στο 0 με τη χρήση του ορισμού.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2}=\frac{1}{2}\in\mathbb{R}$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=\dfrac{1}{2}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x)=\int_1^x f(t)dt$, με $x\in R$.Παρατηρούμε ότι η εξίσωση παίρνει τη μορφή :

$$F(2f'(x))=F(1) \qquad (1)$$

Αλλά $F'(x)=\left(\int_1^x f(t)dt\right)'=f(x)>0$ για κάθε $x\in R$. Επομένως η F είναι γνησίως αύξουσα, οπότε είναι και $1-1$. Η εξίσωση λοιπόν (1) γίνεται ισοδύναμα :

$$F(2f'(x))=F(1)\Leftrightarrow 2f'(x)=1\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow f'(x)=f'(0)$$

Όπως στο πρώτο ερώτημα προκύπτει ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή. Έτσι, η f' ,ως γνησίως αύξουσα, είναι και $1-1$, οπότε παίρνουμε :

$$f'(x)=f'(0)\Leftrightarrow x=0$$

Να σημειώσουμε ότι αντί της συγκεκριμένης αρχικής, μπορούμε να θεωρήσουμε τυχαία αρχική F της f και να εργαστούμε εντελώς ανάλογα.

Άλλος τρόπος

Παρατηρούμε ότι η $x=0$ είναι προφανής λύση της δοσμένης εξίσωσης αφού για $x=0$ το πρώτο μέλος είναι ίσο με

$$\int_1^{2\cdot\frac{1}{2}} f(u)du=\int_1^1 f(u)du=0.$$

♦ Για $x>0$ είναι $e^x>1$ και $\frac{e^x-1}{x}>0 \Leftrightarrow f(x)>0$,ενώ για $x<0$ είναι $e^x<1$ και $\frac{e^x-1}{x}>0 \Leftrightarrow f(x)>0$

Για $x=0$ έχουμε $f(0)=1>0$.

Αφού η f είναι κυρτή , η f' είναι γνησίως αύξουσα. Συνεπώς , για $x>0$ είναι

$f'(x)>f'(0) \Leftrightarrow 2f'(x)>1$ και αφού $f(x)>0$ για κάθε $x>0$, παίρνουμε

$$\int_1^{2f'(x)} f(u)du>0$$

Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχουν λύσεις της δοσμένης εξίσωσης για $x>0$.

Όμοια , για $x<0$, είναι $f'(x)<f'(0) \Leftrightarrow 2f'(x)<1$ και αφού $f(x)>0$ για κάθε $x<0$ προκύπτει ότι :

$$\int_{2f'(x)}^{1} f(u)du>0 \Leftrightarrow \int_1^{2f'(x)} f(u)du<0 .$$

Συνεπώς δεν υπάρχουν λύσεις της δοσμένης εξίσωσης για $x<0$.

Άρα η μοναδική λύση της αρχικής εξίσωσης είναι η $x=0$ ■

Εφαρμογή 18η

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x^2}$.Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $\int_1^x f(t)dt+\int_1^{x^3} f(t)dt=\int_1^{x^5} f(t)dt+\int_1^{x^7} f(t)dt$

β) $\int_0^x f(t)dt+\int_0^{2x} f(t)dt=\int_0^{3x} f(t)dt+\int_0^{4x} f(t)dt$

Λύση

α) Θεωρούμε μια αρχική F της συνάρτησης $f(x)$.Επειδή $F'(x)=f(x)>0$, η συνάρτηση G είναι γνησίως αύξουσα. Σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα η εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$G(x)+G(x^3)=G(x^5)+G(x^7) \qquad (1)$$

Παρατηρούμε αρχικά ότι οι τιμές $x=0, x=1, x=-1$ είναι λύσεις της εξίσωσης . Θα αποδείξουμε ότι οι λύσεις αυτές είναι οι μοναδικές.

♦ Με $x>1$ είναι $x<x^5$ και $x^3<x^7$.Επομένως :

$$G(x)<G(x^5) \text{ και } G(x^3)<G(x^7)$$

Αυτές με πρόσθεση κατά μέλη δίνουν

$$G(x)+G(x^3)<G(x^5)+G(x^7)$$

που σημαίνει ότι κανένας αριθμός $x>1$ δεν επαληθεύει την εξίσωση (1).

♦ Με $0<x<1$ είναι $x>x^5$ και $x^3>x^7$.Επομένως, εντελώς ανάλογα παίρνουμε :

$$G(x)>G(x^5) \text{ και } G(x^3)>G(x^7)$$

Αυτές με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$G(x)+G(x^3)>G(x^5)+G(x^7)$$

που σημαίνει ότι κανένας αριθμός x , με $0<x<1$ δεν επαληθεύει την εξίσωση (1).

♦ Με $-1<x<0$ ή με $x<-1$ εργαζόμαστε εντελώς ανάλογα. Σημειώνουμε ότι στην πρώτη περίπτωση θα είναι $x<x^5$ και $x^3<x^7$ ενώ στη δεύτερη $x>x^5$ και $x^3>x^7$.

Τελικά, οι μοναδικές ρίζες της εξίσωσης είναι οι $x=0, x=1, x=-1$.

β) Θεωρούμε αντίστοιχα με το α΄ ερώτημα μια αρχική G και η εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$G(x)+G(2x)=G(3x)+G(4x)$$

Προφανής ρίζα είναι η $x=0$. Διακρίνοντας τις περιπτώσεις $x>0$ ή $x<0$ έχουμε αντίστοιχα ότι :

♦ $x<3x$, $2x<4x$ Επομένως :

$$G(x)<G(3x) \text{ και } G(2x)<G(4x)$$

Αυτές με πρόσθεση δίνουν $G(x)+G(2x)<G(3x)+G(4x)$, που σημαίνει ότι η εξίσωση δεν έχει θετικές ρίζες.

♦ $x>3x$, $2x>4x$.Επομένως :

$$G(x)>G(3x) \text{ και } G(2x)>G(4x)$$

Αυτές με πρόσθεση δίνουν $G(x)+G(2x)>G(3x)+G(4x)$, που σημαίνει ότι η εξίσωση δεν έχει αρνητικές ρίζες.

Άρα η μοναδική ρίζα της εξίσωσης είναι η $x=0$ ■

Σημείωση :

Ο τρόπος αυτός εφαρμόζεται για κάθε συνεχή συνάρτηση f που είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ .

Μέθοδος 8^{η} (Εξίσωση την αντίστροφη συνάρτηση)

Α. Συχνά συναντάμε εξισώσεις της μορφής $f^{-1}(x)=x$. Από τη συμμετρία όμως των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} συμπεραίνουμε ότι οι εξισώσεις $f^{-1}(x)=x$ και $f(x)=x$ είναι ισοδύναμες. Αν λοιπόν δοθεί η μία από τις δύο , τότε επιλέγουμε την άλλη . Συνήθως δίνεται η πρώτη και επιλέγουμε τη δεύτερη, διότι η εύρεση της αντίστροφης είναι συχνά δυσχερής ή αδύνατη.

Β. Αν κατά την διαδικασία επίλυσης μιας εξίσωσης καταλήξουμε στην εξίσωση $f(f(x))=x$, όπου f είναι κατάλληλη συνάρτηση, τότε στην περίπτωση που η f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση, ισχύει ότι :

$$f(f(x))=x \Leftrightarrow f(x)=x$$

Αυτό γίνεται με απαγωγή σε άτοπο , ως εξής :

Έστω a μια ρίζα της εξίσωσης $f(f(x))=x$, δηλαδή $f(f(a))=a$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

- Αν $f(a)<a$, τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα παίρνουμε :

$$f(f(a))<f(a) \Leftrightarrow a<f(a)$$

Πράγμα που είναι άτοπο, διότι $f(a)<a$.

- Αν $f(a)>a$, τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα παίρνουμε :

$$f(f(a))>f(a) \Leftrightarrow a>f(a)$$

Πράγμα που είναι άτοπο, διότι $f(a)>a$.

Και στις δύο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο, οπότε τελικά θα είναι $f(a)=0$

Αντιστρόφως, αν το a είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=x$, δηλαδή $f(a)=a$, τότε :

$$f(f(a))=f(a)=a \ ,$$

δηλαδή το a είναι ρίζα και της εξίσωσης $f(f(x))=x$

Γ. Τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ βρίσκονται από τη λύση του συστήματος: $y=f(x)$ και $x=f(y)$, διότι:

$$(x,y)\in C_f \Leftrightarrow f(x)=y \quad \text{και} \quad (y,x)\in C_{f^{-1}} \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x \Leftrightarrow y=f(x)$$

Δ. Για τη λύση της εξίσωσης $f^{-1}(x) = f(x)$ εργαζόμαστε όπως ακριβώς παραπάνω, αφού, αν θέσουμε $f^{-1}(x) = f(x) = y$, τότε:

$$f(x)=y \quad \text{και} \quad x=f(y)$$

Αν η συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα**, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$f^{-1}(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x)=x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = x$$

και έτσι η εξίσωση $f^{-1}(x)=f(x)$ ανάγεται σε μία από τις απλούστερες εξισώσεις:

$$f^{-1}(x)=x \text{ ή } f(x)=x$$

Πραγματικά, η εξίσωση $f^{-1}(x)=f(x)$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $f(f(x))=x$ και η απόδειξη προκύπτει άμεσα από την παράγραφο Β.

*** Σε επίπεδο πανελληνίων η παραπάνω διαδικασία πρέπει να αποτελεί μέρος της λύσης.

Ε. Αν μια συνάρτηση $f:R\to R$ είναι περιττή και γνησίως φθίνουσα, τότε ισχύει ότι :

$$f^{-1}(x)=f(x) \Leftrightarrow f(x)=-x \ .$$

Με άλλα λόγια, αν μια συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα και περιττή, τότε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ βρίσκονται πάνω στην ευθεία $y=x$.

Απόδειξη

Έστω ότι $f^{-1}(\alpha)=f(\alpha)$.Είναι τότε ;

$$f^{-1}(\alpha)=f(\alpha) \Leftrightarrow f(f(\alpha))=\alpha$$

Θα αποδείξουμε ότι $f(\alpha)=-\alpha$.Έστω ότι $f(\alpha)\neq-\alpha$.Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

- ♦ Αν $f(\alpha)<-\alpha$, τότε :

$$f(\alpha)<-\alpha \Leftrightarrow f(f(\alpha))>f(-\alpha) \Leftrightarrow \alpha>-f(\alpha) \Leftrightarrow f(\alpha)>-\alpha \text{ , άτοπο.}$$

♦ Αν $f(\alpha) > -\alpha$, τότε :

$$f(\alpha) > -\alpha \Leftrightarrow f(f(\alpha)) < f(-\alpha) \Leftrightarrow \alpha < -f(\alpha) \Leftrightarrow f(\alpha) < -\alpha \text{, άτοπο.}$$

Είναι επομένως $f(\alpha) = -\alpha$.Αντιστρόφως τώρα, αν $f(\alpha) = -\alpha$, τότε :

$$f(\alpha) = -\alpha \Leftrightarrow -f(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow f(-\alpha) = \alpha \Leftrightarrow f^{-1}(\alpha) = -\alpha \Leftrightarrow f^{-1}(\alpha) = f(\alpha)$$

Άρα το a είναι ρίζα και της εξίσωσης $f^{-1}(x) = f(x)$

*** Σε επίπεδο πανελληνίων η παραπάνω διαδικασία πρέπει να αποτελεί μέρος της λύσης.

Εφαρμογή 1η

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 2$.

α) Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = 1$.

γ) Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = x - 1$.

δ) Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}(x) \geq x - 1$.

ε) Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = f(x)$

Λύση

α) Είναι $D_f = \mathbb{R}$. Αν $x_1 < x_2$, τότε: $x_1^3 < x_2^3$ και $x_1 + 2 < x_2 + 2$

Αυτές με πρόσθεση δίνουν $f(x_1) < f(x_2)$.

β) Η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και «1 – 1», οπότε ορίζεται η f^{-1}. Έχουμε:

$$f^{-1}(x) = 1 \Leftrightarrow f\left(f^{-1}(x)\right) = f(1) \Leftrightarrow x = 4$$

γ) Η f έχει πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το R , οπότε είναι:

$$f^{-1}(x) = x - 1 \Leftrightarrow x = f(x - 1) \Leftrightarrow x = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + (x - 1) + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

διότι στην εξίσωση $x^2 - 3x + 3 = 0$ είναι $\Delta = 9 - 12 = -3 < 0$.

δ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα και έχει σύνολο τιμών το R , θα ισχύει:

$$f^{-1}(x) \geq x - 1 \Leftrightarrow f\left(f^{-1}(x)\right) \geq f(x - 1) \Leftrightarrow x \geq (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + (x - 1) + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x \leq 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3x + 3) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$$

διότι στο τριώνυμο $\varphi(x) = x^2 - 3x + 3$ είναι $\alpha = 1 > 0$ και $\Delta = -3 < 0$, οπότε $\varphi(x) > 0$ για κάθε $x \in$ R. Άρα η ανίσωση αληθεύει για κάθε $x \in (-\infty, 0]$.

ε) Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, σύμφωνα με το σχόλιο είναι :

$$f^{-1}(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow x^3 + x + 2 = x \Leftrightarrow x^3 = -2 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{2}$$

Γ2. Ανισώσεις

Για την λύση ανισώσεων εφαρμόζουμε σχετικά τις ίδιες ή ανάλογες μεθόδους με αυτές που συναντήσαμε στην επίλυση εξισώσεων.

Η πιο σημαντική διαφορά είναι ότι στις ανισώσεις δεν παίζει κανένα πια ρόλο η ιδιότητα του $1-1$, αλλά η μονοτονία.

Οι σημαντικότερες περιπτώσεις είναι οι εξής :

1. Αν είναι εφικτό , φέρνουμε την ανίσωση στην ισοδύναμη μορφή $f(x)>0$ ή $f(x)<0$. Στη συνέχεια βρίσκουμε τη μονοτονία της f και μία ρίζα , έστω α , της εξίσωσης $f(x)=0$, με παρατήρηση (ή άλλον τρόπο). Με βάση λοιπόν τον ορισμό της μονοτονίας παίρνουμε :

$$f(x)>0 \Leftrightarrow f(x)>f(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} x>\alpha, \text{ αν η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα.} \\ x<\alpha, \text{ αν η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα.} \end{cases}$$

Προφανώς , δεν παραλείπουμε να εξασφαλίσουμε ότι οι τιμές που βρήκαμε ανήκουν και στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Ανάλογα εργαζόμαστε και στις ανισώσεις της μορφής $f(x)<0$, $f(x)\geq 0$, $f(x)\leq 0$

2. Αν η ανίσωση έχει πιο σύνθετη μορφή, προσπαθούμε να την φέρουμε στη μορφή $f(g(x))>f(h(x))$, όπου f είναι κατάλληλη γνησίως μονότονη συνάρτηση. Στην περίπτωση αυτή, όπως και πριν, παίρνουμε :

$$f(g(x))>f(h(x)) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)>h(x), \text{ αν η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα.} \\ g(x)<h(x), \text{ αν η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα.} \end{cases}$$

Εντελώς ανάλογα αντιμετωπίζονται οι περιπτώσεις :

$$f(g(x))<f(h(x)),\ f(g(x))\geq f(h(x)),\ f(g(x))\leq f(h(x))$$

3. Με παρόμοιο τρόπο λύνουμε και ανισώσεις που σε κάποιο μέλος περιέχουν όρο της μορφής $\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt$. Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε μια βοηθητική συνάρτηση της μορφής $H(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(t)dt$, φέρουμε την ανίσωση στη μορφή $H(\gamma(x))<H(\delta(x))$, αποδεικνύουμε ότι η

συνάρτηση H είναι γνησίως μονότονη και εργαζόμαστε όπως ακριβώς στην προηγούμενη περίπτωση.

4. Ενδιαφέρον έχουν επίσης ανισώσεις της μορφής $\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt > 0$ που δεν αντιμετωπίζονται με τις παραπάνω μεθόδους. Στην περίπτωση λοιπόν αυτή, εργαζόμαστε ως εξής :

- Διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής και δεν αλλάζει πρόσημο στο πεδίο ορισμού της. Πιο ευνοϊκή περίπτωση είναι εκείνη, που η f είναι παντού θετική ή παντού αρνητική.

- Από βασική πρόταση των ολοκληρωμάτων παίρνουμε τότε ότι :

$$\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) < h(x), \text{αν } f(x) \geq 0 \\ g(x) > h(x), \text{αν } f(x) \leq 0 \end{cases}$$

κάτι που , αν χρειαστεί, αιτιολογείται απλά με άτοπο απαγωγή.

Δ. ΥΠΑΡΞΗ ΚΑΙ ΠΛΗΘΟΣ ΡΙΖΩΝ

1. Ύπαρξη ριζών εξασφαλίζουμε :

α) Με το θεώρημα Bolzano στη συνάρτηση της διαφοράς ή μιας ισοδύναμης μορφής .

β) Με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών ή το θεώρημα μέγιστης – ελάχιστης τιμής

γ) Με το θεώρημα Rolle σε αρχική της συνάρτησης διαφοράς.

δ) Με άτοπο και χρήση της πρότασης που αφορά συνεχή συνάρτηση σε διάστημα χωρίς ρίζες (οπότε θα διατηρεί πρόσημο)

ε) Με την εύρεση του συνόλου τιμών κατάλληλης συνάρτησης.

2. Το πλήθος των ριζών μιας εξίσωσης το βρίσκουμε συνήθως με τη μελέτη της συνάρτησης διαφοράς :

- Βρίσκουμε τα διαστήματα μονοτονίας.
- Βρίσκουμε το σύνολο τιμών $f(\Delta)$ της συνάρτησης στο κάθε υποδιάστημα Δ του πεδίου ορισμού που η συνάρτηση είναι συνεχής και διατηρεί μονοτονία.
- Εξετάζουμε αν στο κάθε σύνολο $f(\Delta)$ ανήκει το 0 . Αν ναι, τότε έχουμε μοναδική ρίζα στο Δ. Αν όχι, τότε στο Δ δεν έχουμε ρίζα.

3. Αν θέλουμε να αποδείξουμε πιο ειδικά ότι μιας εξίσωση έχει μοναδική ρίζα , τότε αποδεικνύουμε αρχικά την ύπαρξη με τους γνωστούς τρόπους και για την μοναδικότητα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είτε τη μονοτονία , είτε το 1-1 , είτε να εργαστούμε με άτομο(χρήση του θεωρήματος Rolle ή της διατήρησης προσήμου).

ΣΧΟΛΙΟ

Την παραπάνω διαδικασία με τον ίδιο ακριβώς τρόπο την εφαρμόζουμε :

α) Για την συνάρτηση f' (ή στη συνάρτηση που θα οδηγήσει η εξίσωση $f'(x)=0$) , αν θέλουμε το πλήθος των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f .

β) Για την f''(ή στη συνάρτηση που θα οδηγήσει η εξίσωση $f''(x)=0$) , αν θέλουμε το πλήθος των σημείων καμπής της f .

Τονίζουμε ότι η εύρεση του πλήθους ριζών μιας εξίσωσης, στην έμμεση ή άμεση μορφή , αποτελεί μόνιμο θέμα στις εξετάσεις.

4. Στο ερώτημα " Να αποδείξετε ότι μια εξίσωση έχει το πολύ κ ρίζες " , εργαζόμαστε συνήθως με άτοπο. Υποθέτουμε ότι η εξίσωση έχει τουλάχιστον $k+1$ ρίζες και με διαδοχικές εφαρμογές του θεωρήματος Rolle στα διαστήματα των ριζών για τις f, f', f'' κλπ καταλήγουμε σε άτοπο. Με f συμβολίζουμε τη συνάρτηση της διαφοράς ή κάποια άλλη συνάρτηση στην οποία μας οδηγεί η δοσμένη συνάρτηση. Η διαδικασία αυτή περιγράφεται με λεπτομέρειες στο βοήθημα.

Ε. ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

Ε$_1$. Συνήθεις ανισότητες

α) Με θεώρημα μέσης τιμής σε κατάλληλη συνάρτηση σε κατάλληλο διάστημα.

β) Με χρήση του ορισμού της μονοτονίας.

γ) Με μελέτη της συνάρτησης διαφοράς και εύρεση ολικού ακροτάτου ή χρήση του ορισμού του ακροτάτου(ειδικά αν έχουμε συγκεκριμένες τιμές).

δ) Με ολοκλήρωση κατά μέλη μιας ανισότητας .

Παράδειγμα 1^{ο} :

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x\ln x, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.

β. Να αποδείξετε ότι ισχύει

$$f'(x+1) > f(x+1) - f(x)\ ,$$

για κάθε $x > 0$.

Παράδειγμα 2^{ο} :

β. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f, που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x) - e^{-f(x)} = x - 1, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f(0) = 0 .$$

i) Να εκφραστεί η f' ως συνάρτηση της f.

ii) Να αποδείξετε ότι $\frac{x}{2} \le f(x) \le x f'(x)$, για κάθε $x \in R$.

iii) Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$ και τον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2} f(1) .$$

Παράδειγμα 3ο :

Έστω η συνεχής συνάρτηση

$$f(x) = e^{-x}(\ln x - x),\ x > 0, \text{ τότε:}$$

α. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to 0^+} \left[(f(x))^2 \,\eta\mu \frac{1}{f(x)} - f(x) \right]$

γ. Να αποδείξετε ότι κάθε αρχική F της f είναι κυρτή . Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

$$F(x) + F(3x) > 2F(2x) \text{, για κάθε } x > 0 .$$

4. Δίνεται ο σταθερός πραγματικός αριθμός β >0. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (\beta, 2\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$F(\beta) + F(3\beta) = 2F(\xi)$$

Ε2. Ανισότητες στο Ολοκλήρωμα

Οι ανισότητες με ολοκληρώματα παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον αλλά και δυσκολίες.

Ανάμεσα στις πιο χαρακτηριστικές περιπτώσεις είναι οι παρακάτω :

Α. Ανισότητες της μορφής $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \ge M$

i) Προσπαθούμε να βρούμε ένα ακρότατο για την συνάρτηση f και μετά να ολοκληρώσουμε.

ii) Προσπαθούμε να βρούμε το πρόσημο της f (με μελέτη) και μετά να ολοκληρώσουμε.

iii) Αποδεικνύουμε πρώτα ότι $f(x) \ge g(x)$ για κάποια συνάρτηση γ και μετά ολοκληρώνουμε.

iv) Μελετάμε τη συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(x)dx$ και σε αυτή εφαρμόζουμε τον ορισμό της μονοτονίας ή του ακροτάτου.

v) Για κυρτές συναρτήσεις εφαρμόζουμε τη σχέση $f(x)\geq f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$, όπου α είναι κατάλληλα επιλεγμένος αριθμός (για τον οποίο έχουμε πληροφορίες) και ολοκληρώνουμε. Η ανισότητα που θα προκύψει είναι γνήσια. Αντίστοιχα εργαζόμαστε για κοίλες συναρτήσεις. Την τακτική αυτή εφαρμόζουμε ακόμα και στην περίπτωση που θέλουμε να βρούμε πρόσημο τιμών συνάρτησης (για να κάνουμε πχ Bolzano), αλλά παρουσιάζονται ορισμένα ολοκληρώματα (με γνωστά άκρα), τα οποία θέλουμε να συγκρίνουμε με αριθμητικές τιμές. Αν για παράδειγμα θέλουμε να βρούμε το πρόσημο του $F(2)=8-\int_{1}^{3} f(t)dt$ και ξέρουμε ότι η f είναι κυρτή , τότε βρίσκουμε την εξίσωση μιας εφαπτομένης, πχ στο 1 και αν αν αυτή είναι η $\varepsilon: y=2x$, τότε από τη σχέση $f(x)\geq 2x\ \ (1)$ παίρνουμε $\int_{1}^{3} f(t)dt>\int_{1}^{3} 2tdt=8$ διότι στην (1) δεν ισχύει παντού η ισότητα .Επομένως $F(2)=8-\int_{1}^{3} f(t)dt<0$

vi) Ορισμένες φορές ξεκινάμε από μια βασική ανισότητα που προκύπτει από τα δεδομένα ή τα άλλα υποερωτήματα, ολοκληρώνουμε, κάνουμε παραγοντική ολοκλήρωση και το αρχικό ολοκλήρωμα επανεμφανίζεται.

v) Κάνουμε δύο ΘΜΤ χωρίζοντας κάποιο διάστημα στη μέση και εργαζόμαστε σε συνάρτηση της μορφής $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(x)dx$, η οποία αποδεικνύουμε πρώτα ότι είναι κυρτή ή κοίλη, ώστε να έχουμε τη μονοτονία της F'

B. Ανισότητες της μορφής $\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt\geq M$ ή $\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt\geq\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt$

i) Μελετάμε ως προς το πρόσημο ή τα ακρότατα την f και συγκρίνοντας (μετά από μελέτη της διαφοράς $d(x)=g(x)-h)x)$) τις $g(x),h(x)$ ολοκληρώνουμε κατάλληλα.

ii) Θεωρούμε κατάλληλη συνάρτηση $\mathbf{H(x)=\int_{x}^{x+\alpha} f(t)dt}$, βρίσκουμε τη μονοτονία της H και εφαρμόζουμε τον ορισμό της μονοτονίας ποσότητες $\mathrm{g(x), h(x)}$ κλπ. Σημειώνουμε ότι σε αυτές τις περιπτώσεις προσπαθούμε να βρούμε κάποια σχέση ανάμεσα στις $\mathrm{g(x), h(x)}$ κλπ, δοκιμάζοντας πχ τις διαφορές τους , ώστε να εντοπίσουμε το κατάλληλο α.

Παράδειγμα 1°

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$f'(x)=\frac{f(x)}{f(x)-x},\quad x\in\mathbb{R}$$

σταθερή.

α. Να αποδείξετε ότι

$$f(x)=x+\sqrt{x^2+9},\ \ x\in\mathbb{R}$$

β. Να αποδείξετε ότι

$$\int_{x}^{x+1} f(t)dt<\int_{x+1}^{x+2} f(t)dt,\quad x\in\mathbb{R}$$

Γ. Ανισότητες της μορφής $\int_{ax}^{bx} f(t)dt\geq(b-a)xf(bx)$ ή $\int_{ax}^{bx} f(t)dt\geq(b-a)xf(ax)$

Για γνησίως μονότονες συναρτήσεις , μια σπουδαία περίπτωση ανισοτήτων είναι αυτή που περιγράφει ο τίτλος :

$$\mathbf{\int_{ax}^{bx} f(t)dt\geq(b-a)xf(bx)}$$

Το τέχνασμα είναι να γράψουμε $\mathbf{(b-a)x=\int_{ax}^{bx} 1\cdot dt}$, οπότε η ανισότητα παίρνει τη μορφή :

$$\mathbf{\int_{ax}^{bx} (f(t)-f(bx))dt\geq 0}$$

Επειδή όμως το t βρίσκεται ανάμεσα στα $\mathrm{ax, bx}$ και η f είναι γνησίως μονότονη, η συνάρτηση κάτω από το ολοκλήρωμα διατηρεί πρόσημο, είναι συνεχής και δεν είναι παντού μηδέν.Άρα, ανάλογα με το είδος της μονοτονίας της f και το πρόσημο των a, b καθώς και του x προκύπτει η ζητούμενη ανισότητα .

Άλλος τρόπος :

Αν F είναι μια αρχική της f , τότε σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα , η δοσμένη ανισότητα γράφεται

$$F(\beta x)-F(\alpha x)\geq(\beta-\alpha)xf(\beta x)$$

Γίνεται φανερό ότι η συνέχεια γίνεται με ΘΜΤ για την F στο διάστημα $[\alpha,\beta]$

Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.Να αποδείξετε ότι :

α) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα

β) $2xf(x)<\int_x^{3x} f(t)dt<2xf(3x)$, για κάθε $x>0$.

Υπόδειξη

α) Η συνάρτηση f είναι πεδίο ορισμού το R , διότι $x+\sqrt{x^2+1}\geq x+\sqrt{x^2}\geq x+|x|\geq 0$.Βρίσκουμε:

$$f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}})=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}>0$$

για κάθε $x\in R$.Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Θα εφαρμόσουμε την ισχυρή μέθοδο της αρχικής συνάρτησης .

Παρατηρούμε ότι η διαφορά των άκρων του ολοκληρώματος είναι $3x-x=2x$. Αν F είναι αρχική της f (υπάρχει διότι η f είναι συνεχής) , τότε η δοσμένη σχέση γράφεται :

$$\int_x^{3x} f(t)dt<2xf(3x)\Leftrightarrow F(3x)-F(x)<2xf(3x)\Leftrightarrow\frac{F(3x)-F(x)}{3x-x}<f(3x)$$
$$\Leftrightarrow F'(\xi)<f(3x)\Leftrightarrow f(\xi)<f(3x)$$

κάτι που προκύπτει από το ΘΜΤ. Η τελευταία σχέση μας οδηγεί στη μονοτονία της f. Πράγματι, η συνάρτηση f έχει παράγωγο $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}>0$, οπότε είναι γνησίως αύξουσα. Επειδή $x<\xi<3x$, θα είναι $f(\xi)<f(3x)$ και η ζητούμενη αποδείχθηκε.

Να σημειώσουμε ότι αντί της τυχαίας αρχικής, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε την $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$.

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε και το άλλο σκέλος.

Άλλος τρόπος

Από τη μορφή του ολοκληρώματος θεωρούμε $x \le t \le 2x$ και από την μονοτονία της f παίρνουμε $f(x) \le f(t) \le f(2x)$ χωρίς να ισχύει παντού η ισότητα. Επειδή η f είναι συνεχής , παίρνουμε :

$$\int_{x}^{3x} f(x)dt \le \int_{x}^{3x} f(t)dt \le \int_{x}^{3x} f(3x)dt \Leftrightarrow f(x)(3x-x) \le \int_{x}^{3x} f(t)dt \le f(3x)(3x-x)$$

$$2xf(x) \le \int_{x}^{3x} f(t)dt \le 2xf(3x)$$

Ας προσέξουμε ότι η ολοκλήρωση γίνεται παντού ως t (βάζουμε δηλαδή παντού dt)

Άλλος τρόπος

Θα αποδείξουμε αρχικά το πρώτο σκέλος, δηλαδή ότι

$\int_{x}^{3x} f(t)dt \ge 2xf(3x)$.Όμως $2x=\int_{x}^{3x} 1\cdot dt$.Έτσι, η ζητούμενη σχέση γράφεται :

$\int_{x}^{3x} (f(t)-f(3x))dt \le 0$, η οποία , όπως περιγράψαμε και στα σχόλια , ισχύει διότι $x \le t \le 3x$, η f είναι γνησίως αύξουσα, γεγονός που δίνει ότι $f(t)-f(3x) \ge 0$ και τέλος διότι η $f(t)-f(3x) \ge 0$ είναι συνεχής , αλλά όχι παντού μηδέν .Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε και το άλλο σκέλος.

Άλλη λύση

Χρησιμοποιούμε το θεώρημα μέσης τιμή του ολοκληρωτικού λογισμού για το α΄ μέλος.

Πραγματικά , σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα , υπάρχει $\xi \in (x,3x)$, τέτοιο ώστε

$$\int_{x}^{3x} f(t)dt=(3x-x)f(\xi)=2xf(\xi) .$$

Έτσι, στην ουσία καταλήγουμε στην πρώτη λύση.

Σχόλιο :

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι :

Αν $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$, τότε $3xf(2x) < \int_{2x}^{5x} f(t)dt < 3xf(5x)$, για κάθε $x \ne 0$

Βασική άσκηση

Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R και $\alpha<\beta$, τότε

$$xf(\alpha x)<\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha x}^{\beta x}f(t)dt<xf(\beta x),\text{για κάθε } x\neq 0$$

Για $x=0$ η παραπάνω σχέση γίνεται ισότητα.

Ανάλογα, αν η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα, τότε

$$xf(\alpha x)>\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha x}^{\beta x}f(t)dt>xf(\beta x),\text{για κάθε } x\neq 0$$

ΣΤ. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ

Αν μας δίνεται ότι μια συνάρτηση f είναι κυρτή, τότε έχουμε τις εξής πολύ σπουδαίες άμεσες ή έμμεσες πληροφορίες:

α) Η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε αν έχουμε και μία ρίζα της , βρίσκουμε αμέσως το πρόσημό της και άρα τη μονοτονία και το ακρότατο της f .

β) Θα ισχύει η ανισότητα $f(x)\geq f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$ για κάθε εσωτερικό σημείο α του πεδίου ορισμού της f , λόγω της ιδιότητας της εφαπτομένης. Η ισότητα ισχύει μόνο για $x=\alpha$.

γ) Η εξίσωση $f(x)=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$ έχει μοναδική ρίζα την $x=\alpha$, λόγω της προηγούμενης σχέσης.

δ) Η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα που ορίζεται. Η απόδειξη απαιτεί χρήση του ΘΜΤ στον αριθμητή της παραγώγου για την f στο διάστημα $[a,x]$ (για $x>a$) ή στο διάστημα $[x,a]$ (για $x<a$)

ε) Χωρίζουμε το διάστημα στη μέση, κάνουμε δύο ΘΜΤ και με τον ορισμό της μονοτονίας της f' παίρνουμε μια ανισότητα (ανισότητα Jensen), που παρουσιάζεται συχνά με φανερή ή κρυφή μορφή.

στ) Η μέθοδος της κυρτότητας βρίσκει συχνά εφαρμογή και σε θέματα ανισότητας με ολοκληρώματα. Έτσι, ας διαπιστώσουμε ότι μια συνάρτηση είναι κυρτή στο πεδίο ορισμού της ή σε ένα διάστημα $\Delta=[\kappa,+\infty)$, τότε βρίσκουμε την εφαπτομένη $y=\alpha x+\beta$ στο σημείο της, οπότε

προκύπτει αμέσως η ανισότητα : $f(x)\geq \alpha x+\beta$ και έτσι :

$$\int_{\gamma}^{\delta} f(t)dt \geq \int_{\gamma}^{\delta}(\alpha t+\beta)dt=\left[\alpha\frac{t^2}{2}+\beta t\right]_{\gamma}^{\delta}$$

Ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν και στην περίπτωση που η συνάρτηση f είναι κοίλη στο πεδίο ορισμού της ή σε κάποιο διάστημα.

Παράδειγμα

Αν $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$, να αποδείξετε ότι $\int_0^3 f(t^2)dt<9$

Λύση

Είναι

$$f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

και $f''(x)=-\dfrac{x}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}$,οπότε η συνάρτηση είναι κοίλη στο $[0,+\infty)$. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $(0,0)$ είναι $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=x$, οπότε αφού η συνάρτηση είναι κοίλη, από την σχέση γραφικής παράστασης και εφαπτομένης παίρνουμε : $f(x)\leq x$ για κάθε $x\geq 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$.Επομένως παίρνουμε ότι $f(t^2)\leq t^2$, η οποία με τη σειρά της , αφού δεν ισχύει παντού το ίσον , δίνει ότι

$$\int_0^3 f(t^2)dt<\int_0^3 t^2dt=\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^3=9$$

Σχόλιο

Ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν και για την κοίλη συνάρτηση.

στ) Την τακτική αυτή εφαρμόζουμε ακόμα και στην περίπτωση που θέλουμε να βρούμε πρόσημο τιμών συνάρτησης (για να κάνουμε πχ Bolzano), αλλά παρουσιάζονται ολοκληρώματα (με γνωστά άκρα), τα οποία θέλουμε να συγκρίνουμε με αριθμητικές τιμές. Αν για παράδειγμα θέλουμε να βρούμε το πρόσημο του $F(2)=15-\int_1^4 f(t)dt$ και ξέρουμε ότι η f είναι κυρτή , τότε βρίσκουμε την εξίσωση μιας εφαπτομένης, πχ στο 1 και αν αυτή είναι η $\varepsilon: y=2x$, τότε από τη σχέση $f(x)\geq 2x$ (1) παίρνουμε $\int_1^4 f(t)dt > \int_1^4 2tdt = 15$ διότι στην (1) δεν ισχύει παντού η ισότητα .Επομένως

$$F(2)=15-\int_1^3 f(t)dt < 0$$

Ζ. ΟΡΙΑ

Όρια μπορούμε να συναντήσουμε σε πολλά σημεία μιας άσκησης, είτε άμεσα είτε έμμεσα. Για τον υπολογισμό τους απαιτείται :

- Η καλή γνώση των ιδιοτήτων και των θεωρημάτων.
- Ένα ελάχιστο επίπεδο τεχνικών.

Όρια λοιπόν μπορούμε να υπολογίσουμε :

α) Με χρήση της κλασικής θεωρίας (κριτήριο παρεμβολής κλπ)

β) Με τους κανόνες de L'Hospital .

γ) Θέτοντας βοηθητικές συναρτήσεις (κυρίως σε θεωρητικά θέματα) .

δ) Αξιοποιώντας τον ορισμό της συνέχειας ή της παραγώγου σε ένα σημείο.

Όταν υπολογίζουμε ένα όριο:

- Πρώτα εξετάζουμε αν η μεταβλητή τείνει σε αριθμό ή σε άπειρο, διότι στην κάθε περίπτωση συνήθως εφαρμόζουμε διαφορετική τεχνική, ειδικά αν είναι γνωστός ο τύπος της συνάρτησης (αριθμητικό όριο).
- Στη συνέχεια εξετάζουμε τη μορφή , στην οποία οδηγεί το όριο. Οι απροσδιόριστες μορφές απαιτούν συχνά χρήση του κανόνα de L'Hospital. Προσέχουμε ιδιαίτερα ώστε στην διαδοχική εφαρμογή του κανόνα de L'Hospital να μην υπερβούμε τα δεδομένα της άσκησης. Πιθανόν στο τελευταίο βήμα να χρειαστεί να περάσουμε στον ορισμό της παραγώγου με πρόσθεση και αφαίρεση του κατάλληλου αριθμού.

- Αν έχουμε όριο συνάρτησης που ορίζεται με ολοκλήρωμα, τότε είτε εφαρμόζουμε τον κανόνα de L'Hospital, είτε φράζουμε τη συνάρτηση, της οποίας αναζητούμε το όριο δεξιά και αριστερά και στη συνέχεια εφαρμόζουμε το κριτήριο παρεμβολής.

Ενδεικτικά για αυτή την περίπτωση είναι τα παρακάτω παραδείγματα που πρέπει να αποτελούν εργαλεία κάθε μαθητή σε αυτή την κατηγορία ασκήσεων :

Βασικά όρια συνάρτησης που ορίζεται από Ολοκλήρωμα

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ γνησίως μονότονη και συνεχής συνάρτηση .Να υπολογιστούν τα όρια:

i) $A=\lim\limits_{x\to 0}\int_x^{2x}\frac{f(t+2)-1}{t}dt$, $f(2)=2$

ii) $B=\lim\limits_{x\to 1}\int_x^{x^2}\frac{f(t+1)-1}{t-1}dt$, $f(2)=2$

iii) $\Gamma=\lim\limits_{x\to 0}\int_x^{x^2}\frac{f(t+1)-1}{t}dt$, $f(1)=2$

iv) $\Delta=\lim\limits_{x\to 1}\int_x^{x^3}\frac{f(t)-2}{t-1}dt$, με f παραγωγίσιμη στο $x_0=1$, $f(1)=2$

v) $E=\lim\limits_{x\to 0}\int_x^{2x}\frac{1}{\ln t}dt$

vi) $E=\lim\limits_{x\to 1^+}\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}dt$

vii) $Z=\lim\limits_{x\to +\infty}\int_x^{x+1}\frac{x}{\sqrt{t^2+1}}dt$

ΜΕΘΟΔΟΣ

Για τον υπολογισμό ορίου συνάρτησης , στην οποία εμφανίζονται όροι της μορφής $H(x)=\int_{\alpha x}^{\beta x}f(t)dt$ και $x\to x_0$ μπορούμε να ακολουθήσουμε τα εξής βήματα :

- Να μελετήσουμε ως προς τη μονοτονία την $f(t)$
- Να θεωρήσουμε αρχική F της f και να εκμεταλλευτούμε τη συνέχειά της.
- Να θεωρήσουμε ότι το t κινείται μεταξύ των αx , βx (ανάλογα με τα α,β και το πρόσημο του x_0)
- Να δημιουργήσουμε μια διπλή ανισότητα για την $f(t)$, είτε χτίζοντας βήμα- βήμα είτε με τη μονοτονία της f και στη συνέχεια, ολοκληρώνοντας , να δημιουργήσουμε μια διπλή ανισότητα για την $H(x)=\int_{\alpha x}^{\beta x}f(t)dt$.Τονίζουμε ότι όταν ολοκληρώσουμε τη διπλή ανισότητα, ολοκληρώνουμε και τους τρεις όρους ως προς dt. Είναι σοβαρό λάθος η ολοκλήρωση να γίνει στον μεσαίο όρο ως προς dt και τους άκρους όρους ως προς dx .
- Εναλλακτικά μπορούμε να βασιστούμε σε γνωστές ανισότητες και στη συνέχεια να καταλήξουμε στη διπλή ανισότητα για την $H(x)$.

- Να χρησιμοποιήσουμε τελικά το κριτήριο παρεμβολής .
- Να επεκτείνουμε την συνάρτηση κατά ένα σημείο, στο x_0.Αυτό είναι εφικτό όταν το όριο της $f(x)$ για $x \to x_0$ υπάρχει και είναι αριθμός.

Ανάλογα βήματα κάνουμε και στην περίπτωση που $x \to +\infty$ ή $x \to -\infty$. Στην περίπτωση αυτή αξίζει να τονίσουμε ότι μπορούμε τελικά να εφαρμόζουμε την ιδιότητα :

- Αν $I(x) \geq g(x)$ και $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = +\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to \pm\infty} I(x) = +\infty$
- Αν $I(x) \leq g(x)$ και $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to \pm\infty} I(x) = -\infty$

Οι ιδιότητες αυτές είναι άμεσες συνέπειες των θεωρημάτων και μπορούν να χρησιμοποιηθούν χωρίς απόδειξη.

Η. Η ΔΥΝΑΜΗ ΤΗΣ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ

Η μονοτονία είναι μια ιδιότητα των συναρτήσεων που κάθε μαθητής θα συναντήσει με απόλυτη βεβαιότητα στις εξετάσεις. Για το λόγο αυτό θα προσπαθήσουμε να εντοπίσουμε τις πιο σημαντικές εφαρμογές σε όλες τις κατηγορίες ασκήσεων, όπου η αξιοποίηση της μονοτονίας παίζει καθοριστικό ρόλο.

α. Σύγκριση τιμών

β. Απόδειξη ανισοτήτων

γ. Λύση εξισώσεων.

δ. Εύρεση συνόλου τιμών

ε. Εύρεση προσήμου συνάρτησης ή παράστασης.

Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη και εντοπίσουμε ρίζα της, τότε η ρίζα αυτή είναι μοναδική .Μπορούμε στη συνέχεια με τον ορισμό της μονοτονίας να βρούμε το πρόσημο της συνάρτησης. Έτσι:

- Αν η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, τότε είναι αρνητική αριστερά και θετική δεξιά της ρίζας.
- Αν η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα , τότε είναι θετική αριστερά και αρνητική δεξιά της ρίζας.

♦ ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ ΠΟΥ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΕΓΚΥΡΕΣ

1. Δεν παραγωγίζουμε ανισοτική σχέση, ούτε αντιπαραγωγίζουμε (βάζοντας τη σταθερά) μπορούμε όμως να ολοκληρώσουμε τα δύο μέλη μιας ανισότητας , ακόμα κι αν υπάρχει παράγωγος , αρκεί να έχουμε όμως πρώτα διατάξει τα άκρα ολοκλήρωσης. Αν το κάτω άκρο είναι μεγαλύτερο από το πάνω, τότε η φορά αλλάζει.
2. Όταν σε μία ισότητα παραγωγίζουμε ή ολοκληρώνουμε, τότε δεν βάζουμε ισοδυναμία αλλά συνεπαγωγή, αφού η αντίστροφη πορεία δεν ισχύει πάντα.
3. Όταν ολοκληρώνουμε μια ανισότητα πρέπει πρώτα να διατάσσουμε τα άκρα, διότι πιθανόν η φορά να πρέπει να αλλάξει(αν το κάτω άκρο είναι μεγαλύτερο από το άνω άκρο).
4. Όταν έχουμε εξισώσεις της μορφής $f(x)=g(x)$ με την f γνησίως μονότονη, τότε ακόμα κι αν εντοπίσουμε ρίζα με παρατήρηση, δεν σημαίνει ότι αυτή είναι μοναδική. Αυτό ισχύει μόνο αν η g είναι σταθερή, δηλαδή μόνο σε εξισώσεις της μορφής $f(x)=c$
5. Αν σε κάποιο όριο που εμφανίζονται δύο μεταβλητές εφαρμόζουμε τον κανόνα de L'Hospital, τότε μεταβλητή παραγώγισης είναι αυτή που βρίσκεται κάτω από το σύμβολο $\underline{\lim_{h\to\alpha}}$ (δηλαδή στην περίπτωσή μας μεταβλητή παραγώγισης είναι το h και όχι ίσως το x που εμφανίζεται επίσης στο όριο).
6. Αν έχουμε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x(t))$ και θέλουμε την κλίση της στο τυχαίο σημείο, τότε αυτή είναι ίση με $f'(x(t))$ και όχι ίση με $(f(x(t))'=f(x(t))\cdot x'(t)$. Αν $\omega(t)$ είναι η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη $x(t)$, τότε θα ισχύει $\varepsilon\varphi(\omega(t))=f'(x(t))$ και όχι $\varepsilon\varphi(\omega(t))=(f(x(t)))'$
7. Αν έχουμε μια συνάρτηση $E(x)=f(x)$ και το x είναι συνάρτηση του χρόνου t , τότε για να βρούμε το ρυθμό μεταβολής του Ε ως προς t , γράφουμε $E(t)=f(x(t))$ και μετά βρίσκουμε το

ζητούμε ρυθμό από τον τύπο : $E'(t)=f'(x(t))\cdot x'(t)$ και όχι παραγωγίζοντας τη σχέση

$E(x(t))=f(x(t))$!!!

8. Στην εύρεση ορίων χρήσιμες είναι οι εξής παρατηρήσεις.

♦ Αν $x\to 0^+$, τότε είναι $0<x<2x$, ενώ αν $x\to 0^-$, τότε είναι $2x<x<0$.Αντίστοιχα :

♦ Αν $x\to 1^+$, τότε είναι $1<x<x^2$, ενώ αν $x\to 1^-$, τότε είναι $x^2<x<1$

9. Αποφεύγουμε να ολοκληρώσουμε μια ανισότητα, αν προηγουμένως δεν διατάξουμε τα άκρα του ολοκληρώματος . Αν το κάτω άκρο είναι μεγαλύτερο από το άνω άκρο, τότε η φορά αλλάζει !

10. Όταν σε ένα όριο με $h\to 0$ που περιέχει πχ τον όρο $f(x-5h)$ θέλουμε να ελέγξουμε συνέχεια ή παράγωγο, τότε θέτουμε $-5h=u$ με $u\to 0$ και όχι $x-5h=u$

11. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα (γνησίως φθίνουσα) και παραγωγίσιμη, τότε γράφουμε $f'(x)\geq 0$ $(f'(x)\leq 0)$ και όχι $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$.Έχει σημασία να γράψουμε και το ‘ίσον’ και όχι γνήσια διάταξη .

12. Όταν έχουμε ένα όριο, όπως πχ το $\lim\limits_{h\to 0} f(x+2h)$, τότε δεν επιτρέπεται πάντα να θέτουμε $x=0$ και να βρίσκουμε ότι τον όριο αυτό είναι ίσο με $f(x)$. Αυτό είναι δυνατόν μόνο όταν η f είναι συνεχής στο x και μάλιστα για να είναι πλήρης η παρουσίαση , πρέπει να θέσουμε $2h=u$, οπότε :

$$\lim_{h\to 0} f(x+2h)=\lim_{u\to 0} f(x+u)=f(x).$$

♦ ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ ΠΟΥ ΔΕΝ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΞΕΧΝΑΜΕ

1. Αν έχουμε συναρτησιακή σχέση με δύο μεταβλητές με παραγωγίσιμη συνάρτηση, τότε κρατάμε τη μία μεταβλητή σταθερή και παραγωγίσουμε ως προς την άλλη. Αυτό το κάνουμε ίσως και στις δύο μεταβλητές , αν η σχέση δεν είναι συμμετρική. Στη συνέχεια θέτουμε στη μία μεταβλητή ειδικές τιμές μέχρι να φτάσουμε σε μια πιο απλή σχέση με τη συνάρτηση και την παράγωγό της , η οποία τελικά μας οδηγεί στη ζητούμενη συνάρτηση.
2. Αν έχουμε σχέση μέτρο μιγαδικού, δεν ξεχνάμε ότι υψώνοντας στο τετράγωνο μπορούμε να εκφράσουμε τον συζυγή συναρτήσει του αρχικού μιγαδικού.
3. Αν μας ζητήσουν ή χρειαστούμε αρχική μιας συνάρτησης με κλάδους, τότε βρίσκουμε μια αρχική για τον κάθε κλάδο και βάζοντας σταθερές προσπαθούμε να καταστήσουμε τη νέα συνάρτηση συνεχή(και παραγωγίσιμη).

Έτσι, αν $f(x)=\begin{cases} g(x), x<a \\ h(x), x\geq b \end{cases}$, τότε αναζητούμε την αρχική στη μορφή : $F(x)=\begin{cases} G(x)+c_1, x<a \\ c, x=a \\ H(x)+c_2, x\geq b \end{cases}$,

όπου G, H είναι αρχικές των f, g αντίστοιχα, απαιτώντας αυτή να είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο a . Αν θέλουμε, στην τελική σχέση επιλέγουμε μια μικρή τιμή για τη μία μεταβλητή.

Αν θέλουμε την τιμή της παραγώγου σε ένα σημείο, δηλαδή κάποιο $f'(x_0)$,τότε προσπαθούμε να εργαστούμε είτε με τον ορισμό της παραγώγου στο σημείο αυτό , είτε με τη συνέχεια της παραγώγου παίρνοντας όριο (αν η συνέχεια δίνεται ή αν προκύπτει από τα δεδομένα) ,είτε σχηματίζοντας σε κάποιο όριο την παράγωγο στο x_0 (με πρόσθεση – αφαίρεση στον αριθμητή του $f(x_0)$), είτε με χρήση του θεωρήματος Fermat (από ανισότητα σε ισότητα) με ακρότατο