ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ : Η ΕΥΡΕΣΗ ΚΑΙ Η ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΟΥ

Βαγγέλης Μουρούκος – Μπάμπης Στεργίου

Περίληψη

Στο άρθρο αυτό επιχειρούμε να εντοπίσουμε, να καταγράψουμε και να περιγράψουμε με σχετικά σύντομο τρόπο την έννοια , την σημασία , τον τρόπο εύρεσης και τις εφαρμογές του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης, καθώς και ορισμένες περιπτώσεις που κατά την πορεία της εύρεσής του δημιουργούνται συχνά λάθη ή παραλείψεις.

Α. Ας πάρουμε από το σχολικό βιβλίο του Θετικού Κύκλου το παρακάτω ερώτημα με την απάντησή του :

Τι λέμε σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το σύνολο A ;

Απάντηση

Σύνολο τιμών της f λέμε το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$. Είναι δηλαδή:

$$f(A)=\{y \mid y=f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\} \text{ ή ακόμα : } f(A)=\{f(x)/x \in A\} .$$

Το σύνολο τιμών της f στο A συμβολίζεται με $f(A)$. Το σύνολο τιμών υπάρχει για κάθε συνάρτηση, είτε γνωρίζουμε τον τύπο της είτε όχι και συχνά η εύρεσή του είναι πολύ δύσκολη έως αδύνατη.

Σχόλιο

Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f, τότε:

α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο A των τετμημένων των σημείων της C_f.

β) Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $f(A)$ των τεταγμένων των σημείων της C_f.

Εδώ θεωρούμε συμβατικά ότι αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης σχεδιάζεται ως συνεχής γραμμή σε ένα διάστημα, τότε οι προβολές των σημείων της στον άξονα $y'y$ δημιουργούν επίσης διάστημα ή μονοσύνολο(αν η συνάρτηση είναι σταθερή). Το γεγονός ότι η γραφική παράσταση σχεδιάζεται με τρόπο ώστε σε κάποιο διάστημα να φαίνεται συνεχής είναι βέβαια αποτέλεσμα αυστηρής θεωρητικής μελέτης που κυρίως βασίζεται στην έννοια του ορίου και η οποία με τη σειρά της βασίζεται στις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών.

Για τις γνωστές συναρτήσεις λοιπόν , η γραφική παράσταση δηλώνει αυτό που στην πραγματικότητα είναι η συνάρτηση : συνεχής, μονότονη κλπ. Με άλλα λόγια **η γραφική παράσταση είναι μια μαθηματική πρόταση που εκφράζεται με εικόνα** . Επομένως, ένας μαθητής που στο ερώτημα : << Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x)=\ln x$ >> σχεδιάσει τη γραφική παράσταση και απαντήσει ότι είναι το R, εξηγώντας ίσως τον τρόπο , με τον οποίο το εξάγει αυτό , δηλαδή από την προβολή της γραφικής παράστασης στον άξονα $y'y$, έχει στην πραγματικότητα απαντήσει πλήρως. Δεν κάνει μεν θεωρητική απόδειξη, απαντάει όμως σωστά με βάση τις θεωρητικές γνώσεις του για τη συνάρτηση αυτή .

Για τον λόγο αυτό, η εύρεση του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης με γραφικό και εποπτικό τρόπο, μέσω δηλαδή της γραφικής της παράστασης , είναι σε πρώτο βήμα απλή συνέπεια μιας προσεκτικής παρατήρησης. Πιο συγκεκριμένα , για να βρούμε το σύνολο τιμών, αρκεί να προβάλλουμε τη γραφική της παράσταση στον άξονα $y'y$ και να εντοπίσουμε τα διαστήματα (ή το σύνολο) που δημιουργούνται από τις προβολές των σημείων της . Ωστόσο όμως , η πιο αυστηρή εύρεση του συνόλου τιμών μας συνάρτησης , απαιτεί άλλοτε σημαντικές αλγεβρικές τεχνικές και άλλοτε γνώσεις από τη συνέχεια και τη μονοτονία της συνάρτησης.

Β. Πριν προχωρήσουμε στην ανάπτυξη των κυριότερων τρόπων εύρεσης του συνόλου τιμών μας συνάρτησης, ας δούμε ορισμένες από τις χρήσεις του και τις σημαντικότερες από τις πληροφορίες που μας δίνει .

Η σημασία του συνόλου τιμών

Το σύνολο τιμών $f(A)$ μιας συνάρτησης με πεδίο ορισμού A , ή ακόμα η εικόνα $f(A)$ ενός συνόλου A μέσω μιας συνάρτησης f , δίνει σημαντικές πληροφορίες για την συνάρτηση.

Παραδείγματα :

- Αν $f(A)=(0,1)$ τότε συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση είναι θετική , ότι η γραφική της δηλαδή παράσταση είναι πάνω από τον άξονα $x'x$ καθώς και ότι η $0<f(x)<1$ για κάθε $x\in A$. Από τη μορφή επίσης του συνόλου τιμών προκύπτει ότι η συνάρτηση f δεν έχει μέγιστο ή ελάχιστο, είναι όμως φραγμένη στο A.
- Αν $f(A)=(0,1]$, τότε εκτός από το γεγονός ότι πάλι η f είναι θετική, εδώ έχουμε την επιπλέον πληροφορία ότι η f έχει μέγιστο το $y_{max}=1$, δεν έχει όμως ελάχιστο, αφού το αριστερό άκρο του διαστήματος $f(A)=(0,1]$ είναι ανοικτό.
- Αν $f(A)=(-2,2)$, τότε εκτός από το γεγονός ότι $-2<f(x)<2$ για κάθε $x\in A$, συμπεραίνουμε ότι οι εξισώσεις $f(x)=0$,$f(x)=-1, f(x)=1$ και γενικά κάθε εξίσωσης της μορφής $f(x)=\beta$ με $\beta\in(-2,2)$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο σύνολο A . Ας αναφέρουμε προκαταβολικά ότι στην περίπτωση που η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, τότε η λύση αυτή είναι μοναδική.
- Το σύνολο τιμών μιας $1-1$ συνάρτησης f είναι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} .Αλλά και το σύνολο τιμών της αντίστροφης είναι το πεδίο ορισμού της αρχικής συνάρτησης.
- Αν το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα διάστημα Δ είναι υποσύνολο ενός πεπερασμένου συνόλου ή ενός άπειρου συνόλου που αποτελείται από μεμονωμένα σημεία , τότε η συνάρτηση αυτή είναι σταθερή στο διάστημα Δ . Τονίζουμε επίσης ότι συνεχείς συναρτήσεις με τιμές μόνο ρητούς αριθμούς ή μόνο άρρητους αριθμούς , είναι αναγκαστικά σταθερές. Γενικότερα ισχύει ότι :

Πρόταση

Αν το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα διάστημα δεν είναι διάστημα, τότε η συνάρτηση αυτή είναι σταθερή.

Εφαρμογές αυτού του σημαντικού συμπεράσματος θα δούμε στην αντίστοιχη παράγραφο.

Προφανώς ,μια συνάρτηση μπορεί να είναι σταθερή και σε περιπτώσεις που δεν εμπίπτουν στις παραπάνω.

- Η παράγωγος μιας συνάρτησης σε ένα διάστημα έχει την ιδιότητα της ενδιάμεσης τιμής .

Το σύνολο τιμών λοιπόν της παραγώγου f' σε ένα διάστημα Δ είναι επίσης διάστημα. Πρόκειται για το περίφημο θεώρημα Darboux , το οποίο όμως ξεφεύγει από τη σχολική ύλη.

- Αν το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ δεν είναι διάστημα, τότε η συνάρτηση αυτή δεν έχει αρχική στο διάστημα αυτό. Πρόκειται για μια ιδιαίτερα σημαντική πληροφορία που δίνει το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης.
- Αν το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f είναι ένωση ξένων διαστημάτων και το μικρότερο ή το μεγαλύτερο από τα άκρα των διαστημάτων αυτών είναι κλειστό, τότε το άκρο αυτό είναι ολικό ακρότατο της f και συγκεκριμένα : Ολικό ελάχιστο , αν το κλειστό άκρο είναι το μικρότερο και ολικό μέγιστο , αν είναι το μεγαλύτερο.

Εφαρμογή 1

Τι συμπεραίνετε για το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης $f: A \to R$, αν αυτή έχει την ιδιότητα

$$(f(x)-1)(f(x)-2)=0 \text{ για κάθε } x \in A \quad ;$$

Λύση

Για κάθε $x \in A$ έχουμε :

$$(f(x)-1)(f(x)-2)=0 \Leftrightarrow (f(x)-1=0 \text{ ή } f(x)-2=0) \Leftrightarrow (f(x)=1 \text{ ή } f(x)=2)$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι υποσύνολο του συνόλου $\{1,2\}$, δηλαδή $f(A) \subseteq \{1,2\}$.

Πιο συγκεκριμένα, το σύνολο τιμών της συνάρτησης f μπορεί να είναι :

$$f(A)=\{1,2\} \text{ ή } f(A)=\{1\} \text{ ή } f(A)=\{2\}$$

Τονίζουμε εδώ ότι η σχέση $(f(x)-1)(f(x)-2)=0$ δεν δίνει $f(x)=1$ για κάθε $x \in A$ ή $f(x)=2$ για κάθε $x \in A$. Με άλλα λόγια, από την σχέση $(f(x)-1)(f(x)-2)=0$ και χωρίς άλλες πληροφορίες(πχ τη συνέχεια) δεν μπορούμε να βρούμε τον τύπο της συνάρτησης f.

Γ. Ας ξεκινήσουμε με ένα βασικό ερώτημα που είναι το κλειδί για την εύρεση του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης.

Πότε ο αριθμός β ανήκει στο σύνολο τιμών $f(A)$ μια συνάρτησης $f: A \to R$;

Απάντηση

■ Ο αριθμός β ανήκει στο σύνολο τιμών $f(A)$ μια συνάρτησης $f: A \to R$, όταν υπάρχει $\alpha \in A$, τέτοιο, ώστε $f(\alpha) = \beta$.

■ Αν έχουμε τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , τότε το β ανήκει στο σύνολο τιμών της, αν η ευθεία $y = \beta$ τέμνει τη γραφική παράσταση σε ένα τουλάχιστον σημείο.

Έτσι, κάθε φορά που πρόκειται να αποφανθούμε αν ένας αριθμός ανήκει ή όχι στο σύνολο τιμών της συνάρτησης f , ανατρέχουμε στην παραπάνω βασική και άμεση συνέπεια του ορισμού του συνόλου τιμών.

Ανάλογα εργαζόμαστε βέβαια , αν έχουμε τη γραφική της παράσταση , οπότε η απάντηση βασίζεται στην γεωμετρική – εποπτική ερμηνεία του συνόλου τιμών.

Με βάση την παραπάνω παρατήρηση, προκύπτει ότι :

ΜΕΘΟΔΟΣ 1

Το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f: A \to R$ αποτελείται από εκείνα και μόνον τα $y \in R$, για τα οποία υπάρχει ένα τουλάχιστον $x \in R$, τέτοιο ώστε $f(x) = y$.

Με άλλα λόγια :

Το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f: A \to R$ αποτελείται από εκείνα τα $y \in R$, για τα οποία η εξίσωση $f(x) = y$ έχει μία τουλάχιστον λύση, η οποία όμως πρέπει να ανήκει στο πεδίο ορισμού A .

Για να βρούμε λοιπόν το σύνολο τιμών της f θεωρούμε την εξίσωση $f(x) = y$ και θέτουμε για το y όλους τους περιορισμούς ,ώστε η εξίσωση αυτή να έχει λύση στο σύνολο A .

Επισημαίνουμε ότι δεν αρκεί η εξίσωση $f(x) = y$ να έχει λύση στο R , αλλά πρέπει η λύση αυτή να ανήκει στο A .

Πριν προχωρήσουμε σε εφαρμογές που δείχνουν τον τρόπο εύρεσης του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης , ας δούμε όχι πώς βρίσκουμε αλλά πώς αποδεικνύουμε ότι μια συνάρτηση $f: A \to R$ έχει σύνολο τιμών το σύνολο B.

Εφαρμογή 2

Μια συνάρτηση $f: R \to R$ έχει την ιδιότητα $f((f(x)) = 4x - 3$ για κάθε $x \in R$.Να αποδειχθεί ότι η f έχει σύνολο τιμών το R .

Λύση

Έστω $\beta \in R$.Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $\alpha \in R$, τέτοιο ώστε $f(\alpha) = \beta$. Η πρώτη προσπάθεια είναι να βρούμε εκείνο το x , για το οποίο είναι $4x - 3 = \beta$.Λύνουμε ως προς x και βρίσκουμε εύκολα ότι $x_o = \dfrac{\beta + 3}{4}$.

Στην σχέση $f((f(x)) = 4x - 3$ θέτουμε $x_0 = \dfrac{\beta + 3}{4}$ και παίρνουμε :

$$f((f(x_0)) = 4x_0 - 3 \Leftrightarrow f(f(\frac{3+\beta}{4})) = 4 \cdot \frac{3+\beta}{4} - 3 \Leftrightarrow f(f(\frac{3+\beta}{4})) = \beta$$

Θέτουμε λοιπόν $\alpha = f(\dfrac{3+\beta}{4})$ και καταλήγουμε στην σχέση $f(\alpha) = \beta$.Άρα η f έχει σύνολο τιμών το R .

ΜΕΘΟΔΟΣ 2

Για να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση $f: A \to R$ έχει σύνολο τιμών το σύνολο B , εργαζόμαστε ως εξής :

- **Αποδεικνύουμε πρώτα ότι $f(x) \in B$ για κάθε $x \in A$.**
- **Αποδεικνύουμε στη συνέχεια ότι για κάθε $\beta \in B$ υπάρχει $\alpha \in A$, τέτοιο ώστε $f(\alpha) = \beta$.**

Σπουδαία παρατήρηση

Θα περίμενε κανείς ότι η δεύτερη συνθήκη , δηλαδή ότι για κάθε $\beta \in B$ υπάρχει $\alpha \in A$ τέτοιο, ώστε $f(\alpha) = \beta$, θα αρκούσε από μόνη της για να συμπεράνουμε ότι $f(A) = B$.Όμως στην πραγματικότητα αυτό που αποδεικνύει η συνθήκη αυτή είναι ότι κάθε στοιχείο $\beta \in B$ ανήκει στο σύνολο τιμών $f(A)$ της f , δηλαδή ότι $B \subseteq f(A)$. Έχοντας όμως και την πρώτη συνθήκη, ότι δηλαδή $f(x) \in B$ για κάθε $x \in A$, εξασφαλίζουμε ότι $f(A) \subseteq B$, οπότε τελικά θα είναι $f(A) = B$

" **Αντί-παράδειγμα** "

Να "αποδειχθεί" ότι η συνάρτηση $f(x) = e^x - 1$ έχει σύνολο τιμών το διάστημα $B = (0, +\infty)$.

"**Απόδειξη**"

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = R$. Αρκεί επομένως να " αποδείξουμε" ότι για κάθε $\beta > 0$ υπάρχει $\alpha \in R$, με $f(\alpha) = \beta$.Όμως

$$f(\alpha) = \beta \Leftrightarrow e^{\alpha} - 1 = \beta \overset{\beta > 0}{\Leftrightarrow} \alpha = \ln(\beta + 1),$$

αφού $\beta + 1 > 0$.Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το $f(R) = (0, +\infty)$.

Στην πραγματικότητα όμως η συνάρτηση f έχει σύνολο το $(-1, +\infty)$.Το λάθος έγκειται στο γεγονός ότι, όπως γράψαμε στο σχόλιο, πρέπει να αποδείξουμε επιπλέον και τη συνθήκη $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$, η οποία όμως δεν ισχύει , αφού για $x = -\ln 2$ είναι $f(-\ln 2) = \frac{1}{2} - 1 < 0$.

Δ. Η εύρεση του συνόλου τιμών- Βασικές εφαρμογές

Δ.1. Ας ξεκινήσουμε την εύρεση του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης με χρήση μόνο του ορισμού και των βασικών εργαλείων της άλγεβρας

Εφαρμογή 3

Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 2x - 5$.

Λύση

Πρόκειται για τελείως απλή εφαρμογή, δείχνει όμως το σκεπτικό για την εύρεση του συνόλου τιμών με καθαρά αλγεβρικό τρόπο που βασίζεται στον ορισμό και μόνο.

Το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f : A \to R$ αποτελείται από εκείνα και μόνον τα $y \in R$, για τα οποία η εξίσωση $f(x) = y$ έχει λύση στο πεδίο ορισμού $A = R$ της f .

Όμως

$$f(x) = y \Leftrightarrow x^2 - 2x - 5 = y \Leftrightarrow x^2 - 2x - 5 - y = 0$$

Η εξίσωση αυτή, ως εξίσωση β΄ βαθμού , έχει λύση, αν και μόνο αν :

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4+4(5+y) \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -6$$

Προφανώς, οι λύσεις της εξίσωσης αυτής ανήκουν στο πεδίο ορισμού R της f . Άρα το σύνολο τιμών της δοσμένης συνάρτησης είναι το $f(R)=[-6,+\infty)$.

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε αν φέρουμε την f στη μορφή $f(x)=(x-1)^2-6$

Ας δούμε τώρα ένα παρόμοιο παράδειγμα με αλλαγμένο το πεδίο ορισμού:

Εφαρμογή 4

Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x)=x^2-2x-5$ με πεδίο ορισμού $A=R-\{1\}$.

Λύση

Το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f: A \to R$ αποτελείται από εκείνα και μόνον τα $y \in R$, για τα οποία η εξίσωση $f(x)=y$ έχει λύση στο πεδίο ορισμού $A=R$ της f.

Όμως

$$f(x)=y \Leftrightarrow x^2-2x-5=y \Leftrightarrow x^2-2x-5-y=0 \quad (1)$$

Η εξίσωση αυτή, ως εξίσωση β΄ βαθμού , έχει λύση, αν και μόνο αν :

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4+4(5+y) \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -6$$

Επειδή το πεδίο ορισμού δεν είναι το $A=R$, πρέπει επιπλέον να εξετάσουμε αν για αυτά τα y μία τουλάχιστον λύση της εξίσωσης (1) ανήκει στο πεδίο ορισμού R της f .

Ας δούμε όμως πρώτα μήπως υπάρχει $y \geq -6$, για το οποίο η εξίσωση (1) έχει λύση την $x=1$. Για $x=1$ η (1) δίνει $y=-6$. Δεν είμαστε όμως ακόμα έτοιμοι για να απορρίψουμε την τιμή αυτή. Πρέπει να εξετάσουμε την συμπεριφορά της εξίσωσης $y=f(x)$ για $y=-6$, διότι αυτή είναι τελικά η πιο …αρμόδια σχέση για να αποφασίσει αν θα δεχτούμε ή αν θα εξαιρέσουμε κάποια τιμή από το σύνολο τιμών. Αλλά για $y=-6$ η (1) γίνεται :

$$x^2-2x-5+6=0 \Leftrightarrow x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow x=1 \notin D_f=R-\{1\}$$

Άρα το σύνολο τιμών της δοσμένης συνάρτησης είναι το $f(A)=(-6,+\infty)$.

Παρατήρηση

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να βρούμε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x)=x^2-2x-5$, με $x \neq 2$. Όπως στην παραπάνω άσκηση παίρνουμε :

$$f(x)=y \Leftrightarrow x^2-2x-5=y \Leftrightarrow x^2-2x-5-y=0 \quad (1)$$

Πρέπει

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4+4(5+y) \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -6$$

Η εξίσωση (1) για $x=2$ (που δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού) δίνει $y=-5$. Πιθανόν λοιπόν το $y=-5$ να μην ανήκει στο πεδίο ορισμού . Αλλά η ίδια εξίσωση για $y=-5$ δίνει :

$$x^2-2x-5+5=0 \Leftrightarrow (x=0 \text{ ή } x=2)$$

Επειδή $x=0 \in D_f$, τελικά το $y=-5$ ανήκει στο σύνολο τιμών και έτσι $f(A)=[-6,+\infty)$

Εφαρμογή 5

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.

Λύση

Πρέπει $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$, οπότε το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=R-\{1\}$.

Θεωρούμε την εξίσωση $y=f(x)$. Το σύνολο τιμών της f αποτελείται από όλα εκείνα τα $y \in R$, για τα οποία η εξίσωση $y=f(x)$ έχει λύση ως προς x στο A . Όμως:

$$y=f(x) \Leftrightarrow y=\frac{x^2-2x+2}{x-1} \Leftrightarrow x^2-(y+2)x+2+y=0 \qquad (1)$$

Η (1) είναι εξίσωση β΄ βαθμού ως προς x και έχει λύση στο R αν και μόνο αν:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (y+2)^2-4(2+y) \geq 0 \Leftrightarrow (y+2)(y-2) \geq 0 \Leftrightarrow\Leftrightarrow y \in (-\infty,-2] \cup [2,+\infty)$$

Μένει να εξετάσουμε μήπως για κάποιο από τα παραπάνω y η λύση της (1) είναι ο αριθμός 1, ο οποίος δεν ανήκει στο A. Αλλά για $x=1$ η σχέση (1) δίνει:

$$1-(y+2)+2+y=0 \Leftrightarrow 1=0$$

η οποία είναι αδύνατη. Επομένως οι παραπάνω τιμές για το y είναι δεκτές και έτσι το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A)=(-\infty,-2] \cup [2,+\infty)$

Σχόλιο

Στην πραγματικότητα πρόβλημα υπάρχει αν και οι δύο λύσεις της εξίσωσης (1) είναι ίσες με 1. Αλλά τότε πρέπει Δ=0 , δηλαδή $y=-2$ ή $y=2$.Όμως για τις τιμές αυτές του y η εξίσωση (1) δίνει για το x αντίστοιχα τις τιμές $x=0$ και $x=2$ που ανήκουν στο πεδίο ορισμού. Άρα και οι τιμές $y=-2$, $y=2$ ανήκουν στο σύνολο τιμών της f και έτσι $f(A)=(-\infty,-2] \cup [2,+\infty)$.

Εφαρμογή 6

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.

Λύση

Πρέπει $x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$, οπότε το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=R-\{1\}$.

Θεωρούμε την εξίσωση $y=f(x)$. Το σύνολο τιμών της f αποτελείται από όλα εκείνα τα $y\in R$, για τα οποία η εξίσωση $y=f(x)$ έχει λύση ως προς x στο A. Όμως:

$$y=f(x) \Leftrightarrow y=\frac{x^2+x-2}{x-1} \Leftrightarrow x^2+(y-1)x+y-2=0 \qquad (1)$$

Η (1) είναι εξίσωση β΄ βαθμού ως προς x και έχει λύση στο R, αν και μόνο αν:

$$\Delta\geq 0\Leftrightarrow (1-y)^2-4y+8\geq 0\Leftrightarrow y^2-6y+9\geq 0\Leftrightarrow (y-3)^2\geq 0$$

η οποία ισχύει για κάθε $y\in R$.Θα περίμενε κανείς λοιπόν ότι το σύνολο τιμών είναι το R . Πρέπει όμως να εξετάσουμε αν επιπλέον η λύση της (1) ανήκει στο πεδίο ορισμού της f , δηλαδή αν $x\neq 1$.Με άλλα λόγια πρέπει να εξετάσουμε μήπως για κάποιο από τα παραπάνω y η λύση της (1) είναι ο αριθμός 1, ο οποίος δεν ανήκει στο A. Αλλά για $x=1$ η σχέση (1) δίνει:

$$1+(1-y)+y-2=0\Leftrightarrow 0y=0$$

που είναι ταυτότητα ως προς y . Φαίνεται πως οδηγούμαστε σε αδιέξοδο, οπότε επιστρέφουμε στον τύπο της f και παρατηρούμε ότι η τιμή $x=1$ μηδενίζει και τον αριθμητή. Απλοποιούμε λοιπόν και παίρνουμε $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}=\dfrac{(x-1)(x+2)}{x-1}=x+2$, $x\neq 1$. Από αυτή τη μορφή παίρνουμε τώρα ότι για $x=1$ είναι $y=3$.Η εξίσωση (1) για $y=3$ γίνεται : $x^2-2x+1=0\Leftrightarrow x=1\notin D_f$ και έτσι οριστικά η τιμή $y=3$ δεν ανήκει στο σύνολο τιμών. Άρα $f(A)=R-\{3\}$.

Ας σημειώσουμε ότι αν από την αρχή απλοποιήσουμε τον τύπο της συνάρτησης, τότε η διαδικασία εύρεσης γίνεται πιο απλή, αφού αντί της (1) θα έχουμε εξίσωση α΄ βαθμού.

Εφαρμογή 7

Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x)=x^3-3x^2+3x-2$

Υπόδειξη

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A=R$. Παρατηρούμε ότι :

$$f(x)=x \Leftrightarrow (x-1)^3-1=y \Leftrightarrow (x-1)^3=y+1 \Leftrightarrow$$
$$x=\begin{cases} -\sqrt[3]{-(y+1)}, & y<-1 \\ \sqrt[3]{y+1}, & y\geq -1 \end{cases}$$

Επομένως η f έχει σύνολο τιμών το R .

Εφαρμογή 8

Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in R$, ώστε η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha x+\beta}{x^2+x+1}$ να έχει σύνολο τιμών το $[-\dfrac{1}{3},1]$

Λύση

Η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A=R$.

Το σύνολο τιμών της f αποτελείται από όλα εκείνα τα $y\in R$, για τα οποία η εξίσωση $y=f(x)$ έχει λύση ως προς x στο A. Όμως:

$$y=\frac{\alpha x+\beta}{x^2+x+1} \Leftrightarrow yx^2+(y-\alpha)x+y-\beta=0 \qquad (1)$$

♦ Για $y=0$ η εξίσωση (1) γίνεται

$$-\alpha x-\beta=0 \Leftrightarrow \alpha x+\beta=0$$

που έχει λύση στο R , εκτός από την περίπτωση που $\alpha=0$ και $\beta\neq 0$. Αφήνουμε όμως για το τέλος την τελική διερεύνηση.

♦ Με $y\neq 0$ η εξίσωση (1) είναι δευτέρου βαθμού και έχει λύση, αν και μόνο αν :

$$\Delta\geq 0 \Leftrightarrow (y-\alpha)^2-4y(y-\beta)\geq 0 \Leftrightarrow 3y^2+2(\alpha-2\beta)-\alpha^2\leq 0$$

Η παραπάνω ανίσωση αληθεύει σε ένα διάστημα της μορφής $[y_1,y_2]$ και επειδή θέλουμε σύνολο τιμών της f να είναι το $[-\frac{1}{3},1]$, πρέπει ρίζες τις εξίσωσης $3y^2+2(\alpha-2\beta)-\alpha^2=0$ να είναι οι

$y_1 = -\frac{1}{3}, y_2 = 1$. Επειδή λοιπόν πρέπει να είναι $y_1 + y_2 = \frac{2}{3}, y_1 \cdot y_2 = -\frac{1}{3}$, από τις σχέσεις Viette παίρνουμε ότι :

$$\frac{2(\alpha - 2\beta)}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{και} \quad \frac{-\alpha^2}{3} = -\frac{1}{3}$$

Οι σχέσεις αυτές δίνουν τελικά $(\alpha,\beta) = (1,1)$ ή $(\alpha,\beta) = (-1,0)$.Μένει η τελική διερεύνηση. Επειδή $\alpha \neq 0$, τελικά και οι δύο λύσεις είναι δεκτές, αφού και στις δύο περιπτώσεις το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών .

Δ.2. Θα συνεχίσουμε με την εύρεση του συνόλου τιμών σε συναρτήσεις που είναι συνεχείς αλλά δεν μπορεί να εφαρμοστεί ίσως καμία από τις προηγούμενες μεθόδους που περιγράψαμε ή στις οποίες το σύνολο τιμών προσδιορίζεται ευκολότερα μέσω των θεωρημάτων που αφορούν συνεχείς συναρτήσεις . Για τις συναρτήσεις αυτές θα χρησιμοποιήσουμε πάλι τη σχετική πρόταση από το σχολικό βιβλίο.

ΜΕΘΟΔΟΣ 3

Αν μια συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα** και **συνεχής** σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A,B), όπου

$$A = \lim_{x\to\alpha^+} f(x) \quad \text{και} \quad B = \lim_{x\to\beta^-} f(x).$$

Αν, όμως, η f είναι **γνησίως φθίνουσα** και **συνεχής** στο (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (B,A) .

Το συμπέρασμα ισχύει ακόμα και στην περίπτωση που το ένα ή και τα δύο από τα άκρα του διαστήματος είναι άπειρο. Στην περίπτωση αυτή τα αντίστοιχα όρια δεν είναι προφανώς πλευρικά.

Σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση βρίσκουμε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f , βρίσκουμε με την βοήθεια των παραγώγων ή άλλον τρόπο τα διαστήματα μονοτονίας , βρίσκουμε για το κάθε διάστημα Δ_i του A το σύνολο τιμών $f(\Delta_i)$ της f και έτσι τελικά το σύνολο τιμών είναι το : $f(A) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup ... \cup f(\Delta_\kappa)$, όπου $A = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup ... \cup \Delta_\kappa$

Να παρατηρήσουμε επίσης ότι αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ και $0 \in f(\Delta)$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική λύση στη διάστημα Δ .

Αντίστοιχα, αν $\beta \in f(\Delta)$, τότε η εξίσωση $f(x)=\beta$ έχει μοναδική λύση στη διάστημα Δ. Με τον τρόπο αυτό, σε συνδυασμό με τον τρόπο εύρεσης του συνόλου τιμών, βρίσκουμε το πλήθος των ριζών μιας εξίσωσης.

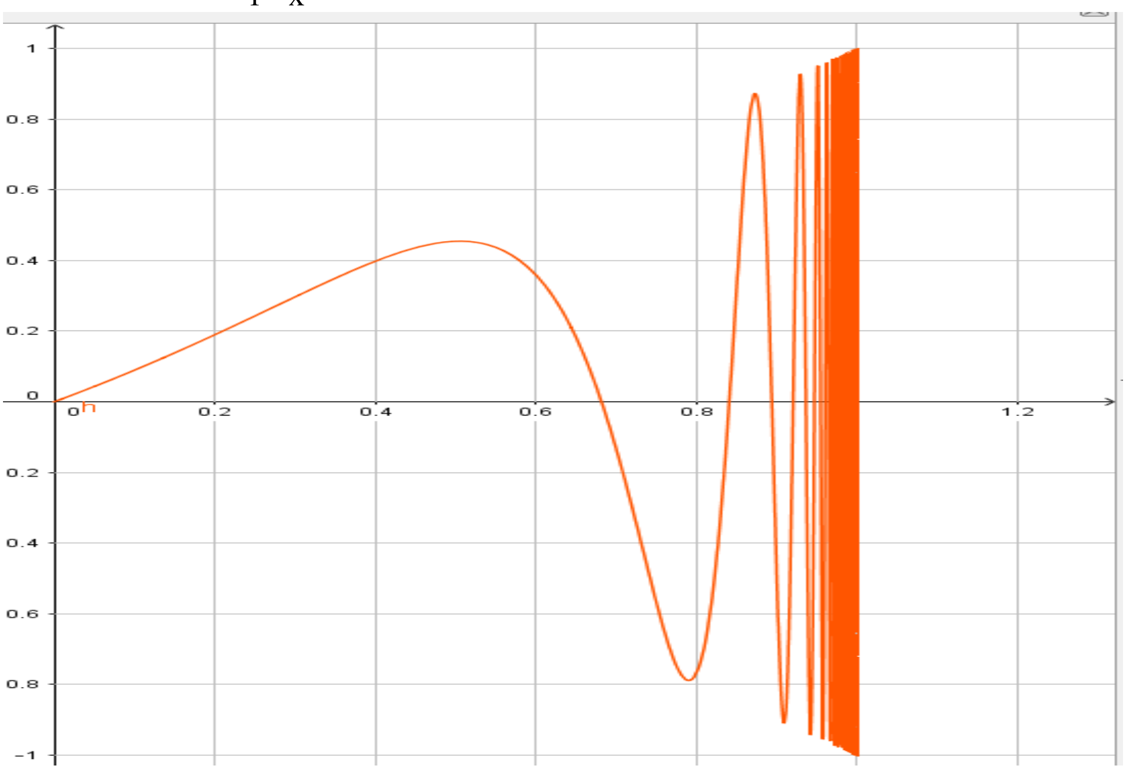
Χρήσιμες επισημάνσεις :

■ Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό, δηλαδή η εικόνα $f(\Delta)$, είναι επίσης διάστημα ή μονοσύνολο. Το σύνολο τιμών είναι μονοσύνολο, μόνο αν η συνάρτηση είναι σταθερή.

Επιπλέον, για μια συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα Δ μπορούμε να συμπεράνουμε ότι :

- Αν το Δ είναι κλειστό, τότε και το $f(\Delta)$ είναι κλειστό. Αν όμως το $f(\Delta)$ είναι κλειστό, τότε το Δ δεν είναι υποχρεωτικά κλειστό. Ένα τέτοιο παράδειγμα αποτελεί η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ που έχει σύνολο τιμών το $[-1,1]$, αλλά το πεδίο ορισμού $D_f = R$ είναι ανοικτό διάστημα.

- Αν το $f(\Delta)$ είναι ανοικτό, τότε το Δ δεν είναι αναγκαστικά ανοικτό. Αυτό φαίνεται από τη συνάρτηση $f(x)=x\sin\dfrac{1}{1-x}, x\in[0,1)$, η οποία έχει σύνολο τιμών το (-1,1).



- Αν m, M είναι τα ακρότατα της f στο διάστημα $\Delta=[\alpha,\beta]$, τότε η εικόνα $f(\Delta)$ είναι :

$$f(\Delta)=[m, M]$$

- Αν το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ δεν είναι διάστημα, τότε η συνάρτηση αυτή είναι σταθερή.

Οι παραπάνω παρατηρήσεις είναι μέγιστης σημασίας για τους υποψήφιους, δεν παρουσιάζουν δυσκολίες, είναι σαφείς και αποτελούν συχνά ερωτήματα στις Πανελλήνιες εξετάσεις.

■ Αν μια συνάρτηση f είναι **συνεχής** σε ένα ανοικτό διάστημα $\Delta=(\alpha,\beta)$, $A=\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)=-\infty$ και $B=\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)=+\infty$ ή αντίστροφα , δηλαδή $\{\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x), \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)\}=\{-\infty,+\infty\}$, τότε το σύνολο τιμών της f στο διάστημα αυτό είναι το $f(\Delta)=R$.

Στην παραπάνω περίπτωση ας προσεχθεί ότι δεν χρειάζεται η μονοτονία, παρά μόνο η συνέχεια και τα άπειρα όρια στα άκρα του διαστήματος. Αυτό το συμπέρασμα είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος των ενδιάμεσων τιμών και της έννοιας του άπειρου ορίου και θεωρούμε πώς δεν απαιτείται καμία αιτιολόγηση από τον μαθητή .

Ας σημειώσουμε ότι το συμπέρασμα ισχύει ακόμα και στην περίπτωση που το ένα ή και τα δύο από τα άκρα του διαστήματος είναι άπειρο. Στην περίπτωση αυτή τα αντίστοιχα όρια δεν είναι προφανώς πλευρικά.

Εφαρμογή 9

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=1-x-\ln x$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=2017$

γ) Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x)>1-x$

Λύση

Πρόκειται αναμφίβολα για την πιο σημαντική εφαρμογή για τον υποψήφιο.

α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $A=(0,+\infty)$, είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα , αφού :

$$f'(x)=(1-x-\ln x)'=-1-\frac{1}{x}<0 \ , \ x>0$$

Είναι επίσης :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$$

Επομένως το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το R .

β) Επειδή $2017 \in f(A) = R$, η εξίσωση $f(x) = 2017$ έχει μία τουλάχιστον λύση , η οποία όμως είναι και η μοναδική ,διότι η f είναι γνησίως μονότονη.

γ) Στο ερώτημα αυτό απαιτείται κάτι παραπάνω από τα συνηθισμένα. Αρχικά παρατηρούμε ότι δεν χρειάζεται κανένας περιορισμός, αφού η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $f(A) = R$. Είναι όμως αυθαιρεσία να πάρουμε τον περιορισμό $1 - x > 0$ και να … περάσουμε την f στα δύο μέλη, αλλάζοντας προφανώς την φορά της ανισότητας. Ας δούμε λοιπόν βήμα –βήμα την κανονική πορεία:

i) Αν $1 - x \le 0 \Leftrightarrow x \ge 1$, τότε η ανισότητα αληθεύει, αφού το πρώτο μέλος είναι θετικός αριθμός (η αντίστροφη συνάρτηση έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού της f που είναι το $(0, +\infty)$), ενώ το δεύτερο μη θετικός.

ii) Αν $1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$, τότε :

$$f^{-1}(x) > 1 - x \Leftrightarrow x < f(1-x) \Leftrightarrow x < 1 - (1-x) - \ln(1-x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x < x - \ln(1-x) \Leftrightarrow \ln(1-x) < 0 \Leftrightarrow 1 - x < 1 \Leftrightarrow x > 0$$

Άρα τελικά η ανίσωση αληθεύει για $x \in (0,1) \cup [1, +\infty) = (0, +\infty)$

Πρόταση

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta = (\alpha, \beta)$ και $f(\Delta) = (\kappa, \lambda)$, τότε θα είναι $\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = \kappa$ και $\lim_{x\to\beta^-} f(x) = \lambda$

Ανάλογο συμπέρασμα ισχύει αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα. Πιο συγκεκριμένα ισχύει ότι :

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = \lambda \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\beta^-} f(x) = \kappa$$

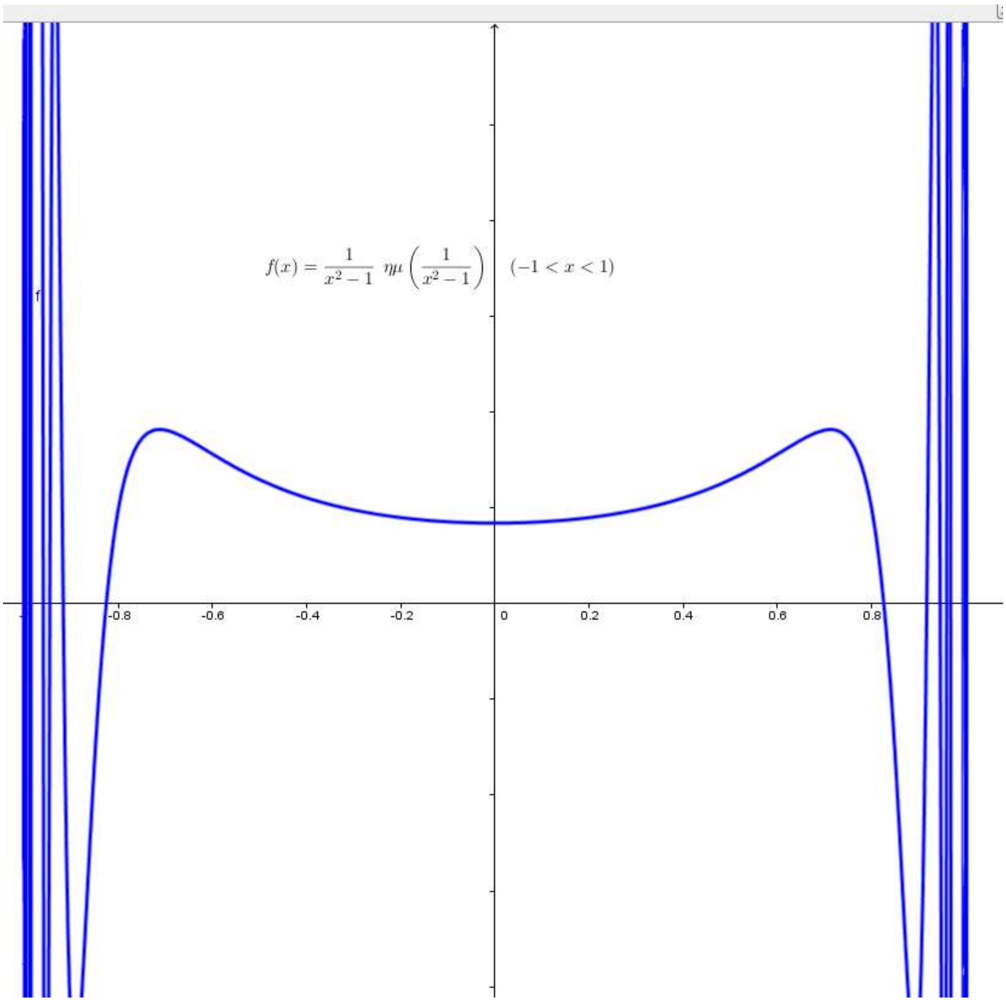
Σημειώνουμε ότι κάποια ή και όλα από τα α ,β ή κ , λ μπορεί να είναι $+\infty$ ή $-\infty$,αρκεί οι συμβολισμοί να προσαρμοστούν κατάλληλα. Στην περίπτωση π.χ. που κάποιο από τα α ,β είναι $+\infty$ ή $-\infty$, το αντίστοιχο πλευρικό όριο δεν είναι πια πλευρικό.

Παρατήρηση

■ Έστω μία συνεχής συνάρτηση f σε ένα διάστημα $\Delta=(\alpha,\beta)$ που έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

Στην περίπτωση αυτή δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι αναγκαστικά θα είναι ,

$\{\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x), \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)\}=\{-\infty,+\infty\}$, δηλαδή $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)=-\infty$ ή $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)=+\infty$ ή αντίστροφα αφού ενδέχεται τα πλευρικά όρια $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x), \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$ να μην υπάρχουν .Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}\cdot \eta\mu\dfrac{1}{x^2-1}$, $x\in(-1,1)$, της οποίας τη γραφική παράσταση βλέπουμε στην εικόνα :



Μονοτονία – Συνέχεια και Σύνολο τιμών

Για τις μονότονες συναρτήσεις ισχύει η εξής πρόταση :

Αν μια συνάρτηση f (γνησίως) είναι μονότονη σε ένα διάστημα Δ και το σύνολο τιμών της $f(\Delta)$ είναι διάστημα, τότε η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής στο Δ .

Ε. Περιπτώσεις που προβληματίζουν!

Εφαρμογή 10

Μια συνάρτηση $f: R \to R$ έχει την ιδιότητα :

$$f^3(x) + f(x) = x + 1 \text{ για κάθε } x \in R \text{ .}$$

Να αποδειχθεί ότι η f έχει σύνολο τιμών το R .

Λύση

Η πρώτη επιφανειακή προσέγγιση θα μπορούσε να είναι η εξής :

Θεωρούμε τυχαίο $y \in R$. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει $x \in R$ με $f(x) = y$.Θέτουμε $f(x) = y$ στη δοσμένη σχέση και παίρνουμε :

$$f^3(x) + f(x) = x + 1 \Leftrightarrow y^3 + y = x + 1 \Leftrightarrow x = y^3 + y - 1$$

Επομένως το σύνολο τιμών είναι $f(R) = R$

Η προσπάθεια όμως αυτή έχει σοβαρά κενά. Στην πραγματικότητα αυτό που βρήκαμε με την παραπάνω διαδικασία είναι ότι αν υπάρχει $x \in R$ με $f(x) = y$, τότε αυτό το x δίνεται από την σχέση $x = y^3 + y - 1$. Όμως κανείς δεν εγγυάται ότι αυτό το χ υπάρχει. Για να είναι ολοκληρωμένη η απάντηση πρέπει να αποδείξουμε ότι $f(x) = y$, δηλαδή ότι $f(y^3 + y - 1) = y$ και αυτό δεν είναι καθόλου προφανές.

Ας δούμε την πιο κλασική πια αντιμετώπιση αυτού του θέματος. Με τον ορισμό αποδεικνύουμε σχεδόν άμεσα ότι η f είναι $1-1$, οπότε αντιστρέφεται. Η πιθανή αντίστροφη της f , όπως έδειξε η παραπάνω διαδικασία είναι η $g(x) = x^3 + x - 1$.

Η δοσμένη σχέση δίνει ότι :

$$g(f(x)) = f^3(x) + f(x) - 1 = x + 1 - 1 = x$$

δηλαδή $g(f(x)) = x$ για κάθε $x \in R$. Θεωρούμε λοιπόν τυχαίο $\beta \in R$.Αρκεί να βρούμε $\alpha \in R$, τέτοιο ώστε $f(\alpha) = \beta$. Θεωρούμε όπως είναι φυσιολογικό τον αριθμό $\alpha = g(\beta)$. Επειδή $g(f(x)) = x$, είναι :

$$\alpha = g(\beta) \Leftrightarrow g(f(\alpha)) = g(\beta) \overset{g:1-1}{\Leftrightarrow} f(\alpha) = \beta$$

Η σχέση $f(\alpha) = \beta$ είναι η ζητούμενη, οπότε το θέμα έχει ολοκληρωθεί.

Σχόλιο

Με την παραπάνω διαδικασία έχουμε βρει και την αντίστροφη της f και συγκεκριμένα ότι

$$f^{-1}(x) = x^3 + x - 1, x \in R$$

Να τονίσουμε ότι η αντίστροφη συνάρτηση δεν βρίσκεται θέτοντας $f(x) = y$, μια και δεν μπορούμε να εργαστούμε με ισοδυναμίες. Βρίσκεται καλύτερα θέτοντας στην δοσμένη σχέση στη θέση του τυχαίου $x \in R$ το $f^{-1}(x)$ μια και το τυχαίο x έχει τη μορφή $f^{-1}(x)$ αφού σύνολο τιμών είναι το R . Χωρίς να έχουμε βρει πρώτα το σύνολο τιμών της f , δηλαδή το πεδίο ορισμού της f^{-1} , δεν έχουμε ορίσει την f^{-1} στο R , αλλά μόνο στο σύνολο τιμών της.

Εφαρμογή 11

Μια συνάρτηση $f : R \to R$ έχει την ιδιότητα :

$$f^3(x) + f(x) = e^x \text{ για κάθε } x \in R .$$

Να αποδειχθεί ότι η f έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(0, +\infty)$.

Λύση

Θέτοντας $f(x) = y$, υποψιαζόμαστε ότι η αντίστροφη της f , αν υπάρχει, θα είναι η συνάρτηση

$$g(x) = \ln(x^3 + x) \ , \ x > 0$$

Από την δοσμένη σχέση παίρνουμε $g(f(x)) = x$ για κάθε $x \in R$. Η συνάρτηση αυτή είναι $1-1$, όπως μπορούμε να αποδείξουμε με τον ορισμό ή με παράγωγο.

♦ Η σχέση $f^3(x) + f(x) = e^x$ γράφεται :

$$f(x)(f^2(x) + 1) = e^x \text{, που σημαίνει ότι } f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in R \quad (1)$$

♦ Έστω λοιπόν $\beta \in (0,+\infty)$.Αρκεί να βρούμε $\alpha \in R$, τέτοιο ώστε $f(\alpha)=\beta$. Θεωρούμε, όπως είναι φυσιολογικό ,τον αριθμό $\alpha = g(\beta)$. Επειδή $g(f(x)) = x$, είναι :

$$\alpha = g(\beta) \Leftrightarrow g(f(\alpha)) = g(\beta) \overset{g:1-1}{\Leftrightarrow} f(\alpha)=\beta$$

Η σχέση $f(a)=b$ είναι η ζητούμενη, οπότε το θέμα έχει ολοκληρωθεί.

Σπουδαία παρατήρηση

Χωρίς την εξασφάλιση της σχέσης (1), η υπόλοιπη διαδικασία δεν εξασφαλίζει ότι $f(R)=(0,+\infty)$, αλλά μόνο ότι $f(R) \supseteq (0,+\infty)$. Έτσι, μαζί με τη σχέση $f(x)>0$ που δίνει ότι $f(R) \subseteq (0,+\infty)$, προκύπτει τελικά ότι $f(R)=(0,+\infty)$.

Για να γίνει αυτό καλύτερα αντιληπτό, αναφέρουμε ότι με την ίδια διαδικασία προκύπτει ότι για κάθε $\alpha>1$ υπάρχει $\alpha \in R$ ώστε $f(\alpha)=\beta$. Ωστόσο , το σύνολο τιμών δεν είναι το $(1,+\infty)$ αλλά το $(0,+\infty)$. Αν όμως είχαμε και τη σχέση $f(x)>1$, τότε το σύνολο τιμών θα ήταν το $f(R)=(1,+\infty)$.

Μια παράξενη "λύση" :

" Η σχέση $f^3(x)+f(x)=e^x$ γράφεται :

$$f(x)(f^2(x)+1)=e^x \text{, που σημαίνει ότι } f(x)>0 \text{ για κάθε } x \in R$$

Θεωρούμε $y>0$. Αρκεί να βρούμε $x \in R$ τέτοιο ώστε $f(x)=y$.Θέτουμε $f(x)=y$ στη δοσμένη σχέση $f^3(x)+f(x)=e^x$ και έτσι προκύπτει ότι :

$$y^3+y=e^x \Leftrightarrow x=\ln(y^3+y) \text{ , } y>0$$

Άρα η συνάρτηση f έχει σύνολο τιμών το $(0,+\infty)$. "

Η λύση αυτή όπως εξηγήσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα έχει σοβαρές παραλείψεις και πρέπει να αποφεύγεται, αφού δεν αποτελεί τελικά λύση παρά απόπειρα λύσης. Για να είναι η παραπάνω πορεία ολοκληρωμένη , πρέπει επιπλέον να αποδείξουμε ότι για την τιμή $x=\ln(y^3+y)$, $y>0$ που βρήκαμε ισχύει ότι $f(x)=y$.Αυτό είναι απαραίτητο να γίνει διότι κατά τη διαδικασία εύρεσης τα βήματα δεν είναι ισοδύναμα. Η τιμή που βρήκαμε αφορά μόνο το ένα σκέλος, λείπει όμως το άλλο σκέλος που είναι η ύπαρξη της τιμής αυτής.

Με άλλα λόγια φτάσαμε στην τιμή με την προϋπόθεση ότι υπάρχει, αλλά η ύπαρξη είναι επίσης το ίδιο σημαντικό ζήτημα. Η επαλήθευση επομένως είναι απαραίτητη.

ΣΤ. Γενικά θέματα

Εφαρμογή 12

Δίνεται η συνάρτηση $f:R \to R$ με την ιδιότητα $e^{f(x)} + f(x) = x + 1$ για κάθε $x \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι $1-1$ και $f(0) = 0$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Να αποδείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών το R και ότι $f^{-1}(x) = e^x + x - 1$

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = x$.

ε) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη.

στ) Να υπολογίσετε τα όρια $A = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ και $B = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

Υπόδειξη

α) Με τον ορισμό. Για την εύρεση του $f(0)$ θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^x + x - 1$ που είναι γνησίως αύξουσα. Έτσι έχουμε $g(f(x)) = e^{f(x)} + f(x) - 1 = x$, δηλαδή $g(f(x)) = x \quad (1)$.

Επομένως :

$e^{f(0)} + f(0) = 0 + 1 \Leftrightarrow g(f(0)) = g(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$

β) Έστω $x_1 < x_2$.Τότε λόγω της (1) παίρνουμε $g(f(x_1)) < g(f(x_2)) \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Άλλος τρόπος

Αν όχι, τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in R$ με $x_1 < x_2$ και $f(x_1) \geq f(x_2)$.Αυτή βήμα – βήμα δίνει τελικά ότι

$$e^{f(x_1)} + f(x_1) \geq e^{f(x_2)} + f(x_2) \Leftrightarrow x_1 + 1 \geq x_2 + 1 \Leftrightarrow x_1 \geq x_2$$

που είναι άτοπο , διότι $x_1 < x_2$.

γ) Έστω $\beta \in R$.Θεωρούμε $\alpha = g(\beta)$ (είναι αναμενόμενο, αφού η g είναι η πιθανή αντίστροφη της συνάρτησης f).Τότε

$$\alpha = g(\beta) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} g(f(\alpha)) = g(\beta) \Leftrightarrow f(\alpha) = \beta$$

Επομένως η συνάρτηση f έχει σύνολο τιμών το R. Αν θέσουμε όπου x το $f^{-1}(x), x \in R$, τότε παίρνουμε ότι $f^{-1}(x) = e^x + x - 1$, δηλαδή $f^{-1} = g$

δ) Είναι

$$f(x)=x \Leftrightarrow f^{-1}(x)=x \Leftrightarrow e^x+x-1=x \Leftrightarrow x=0$$

διότι οι εξισώσεις $f(x)=x, f^{-1}(x)=x$ είναι ισοδύναμες.

ε) Αν κάνουμε για την $h(x)=e^x$ ΘΜΤ στο διάστημα με άκρα τα $f(\alpha), f(x)$, τότε $e^{f(x)}-e^{f(\alpha)}=(f(x)-f(\alpha))e^{\xi(x)}$. Έτσι, από τις σχέσεις $e^{f(x)}+f(x)=x+1, e^{f(\alpha)}-f(\alpha)=\alpha+1$ με αφαίρεση κατά μέλη παίρνουμε ότι :

$$e^{f(x)}-e^{f(\alpha)}+f(x)-f(\alpha)=x-\alpha \Leftrightarrow (f(x)-f(\alpha))e^{\xi(x)}+f(x)-f(\alpha)=x-\alpha \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x)-f(\alpha)=\frac{x-\alpha}{e^{\xi(x)}+1}$$

Επομένως $|f(x)-f(\alpha)|=|\frac{x-\alpha}{e^{\xi(x)}+1}|\le|x-\alpha|$ και το κριτήριο παρεμβολής δίνει ότι η f είναι συνεχής στο $x=\alpha$.

Η σχέση επίσης $f(x)-f(\alpha)=\frac{x-\alpha}{e^{\xi(x)}+1}$ δίνει ότι :

$$\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=\frac{1}{e^{\xi(x)}+1} \ , \quad f(\alpha)<\xi(x)<f(x) \text{ ή } f(x)<\xi(x)<f(\alpha)$$

που σημαίνει τελικά ότι η f είναι και παραγωγίσιμη, αφού

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to a}\frac{1}{e^{\xi(x)}+1}=\frac{1}{e^{f(\alpha)}+1} \ .$$

Είναι επομένως :

$$f'(x)=\frac{1}{e^{f(x)}+1}, x\in R$$

στ) Επειδή έχουμε ότι το σύνολο τιμών είναι $f(R)=R$ και η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα , παίρνουμε ότι $A=\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ και $B=\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

Εφαρμογή 13

Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$f^3(x)+f(x)=x\ , \ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α) Να βρεθεί το f(0).

β) Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στην αρχή των αξόνων.

γ) Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=0$ και να βρεθεί το πρόσημο της f(x).

δ) Να αποδειχθεί ότι $f(x)=3xf'(x)-2f(x)f'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ε) Να αποδειχθεί ότι $\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{4}\left[3xf(x)-f^2(x)\right], x\in R$.

στ) Να αποδειχθεί ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και να βρεθεί η f^{-1}.

Λύση

α) Για $x=0$: $f^3(0)+f(0)=0\Leftrightarrow f(0)\left[f^2(0)+1\right]=0\Leftrightarrow f(0)=0$.

β) Παραγωγίζουμε και παίρνουμε:

$$3f^2(x)f'(x)+f'(x)=1\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{3f^2(x)+1}>0 \quad (1)$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

Είναι $f'(0)=1$, οπότε (ε): $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=x$.

γ) Είναι $f(0)=0$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, η $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα.

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα και $f(0)=0$ θα ισχύει:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)	− ↗	0	↗ +

- $x<0\Leftrightarrow f(x)<f(0)\Leftrightarrow f(x)<0$.
- $x>0\Leftrightarrow f(x)>f(0)\Leftrightarrow f(x)>0$.

Άρα:

- για $x\in(0,+\infty)$ είναι $f(x)>0$.
- για $x\in(-\infty,0)$ είναι $f(x)<0$.

δ) Είναι $3f^2(x)f'(x)+f'(x)=1$, οπότε πολλαπλασιάζοντας με f(x) παίρνουμε:

$$3f^3(x)f'(x)+f'(x)f(x)=f(x)$$

Επειδή $f^3(x)=x-f(x)$, αυτή γίνεται:

$$\big(3x-3f(x)\big)f'(x)+f(x)f'(x)=f(x) \Leftrightarrow f(x)=3xf'(x)-2f(x)f'(x) \qquad (2)$$

ε) Η σχέση (1) εξασφαλίζει ότι η παράγωγος f' είναι συνεχής. Ολοκληρώνουμε λοιπόν την (2):

$$I=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x 3tf'(t)dt-2\int_0^x f(t)f'(t)dt=$$

$$=\big[3tf(t)\big]_0^x-\int_0^x 3f(t)dt-2\left[\frac{f^2(t)}{2}\right]_0^x=3xf(x)-3I-f^2(x)$$

διότι $f(0)=0$ και μια αρχική της $g(t)=f(t)f'(t)$ είναι η $G(t)=\dfrac{f^2(t)}{2}$. Άρα:

$$I+3I=3xf(x)-f^2(x) \Leftrightarrow I=\frac{1}{4}\big[3xf(x)-f^2(x)\big]$$

Σχόλιο

Τη σχέση $f^3(x)+f(x)=x$ *την πολλαπλασιάζουμε με* $f'(x)\neq 0$ *και παίρνουμε:*

$$f^3(x)f'(x)+f(x)f'(x)=xf'(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{f^4(x)}{4}\right)'+\left(\frac{f^2(x)}{2}\right)'+f(x)=\big[xf(x)\big]'$$

Άρα:

$$\int_0^x\left(\frac{f^4(t)}{4}\right)'dt+\int_0^x\left(\frac{f^2(t)}{2}\right)'dt+\int_0^x f(t)dt=\int_0^x\big[tf(t)\big]'dt$$

Επομένως:

$$\int_0^x f(t)dt=-\left[\frac{f^4(t)}{4}\right]_0^x-\left[\frac{f^2(t)}{2}\right]_0^x+\big[tf(t)\big]_0^x=$$

$$=-\frac{f^4(x)}{4}-\frac{f^2(x)}{2}+xf(x)=$$

$$=-\frac{f^3(x)f(x)}{4}-\frac{f^2(x)}{2}+xf(x)=$$

$$=-\frac{\big(x-f(x)\big)f(x)}{4}-\frac{f^2(x)}{2}+xf(x)=$$

$$= \frac{4xf(x) - xf(x) + f^2(x) - 2f^2(x)}{4} = \frac{3xf(x) - f^2(x)}{4}$$

στ) Έστω $\beta \in \mathbb{R}$. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ με $f(\alpha) = \beta$. Θέτουμε $\alpha = \beta^3 + \beta$. Τότε: $f^3(\alpha) + f(\alpha) = \alpha$ και $\alpha = \beta^3 + \beta$. Άρα:

$$f^3(\alpha) + f(\alpha) = \beta^3 + \beta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[f(\alpha) - \beta\right]\left[f^2(\alpha) + f(\alpha)\cdot\beta + \beta^2 + 1\right] = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = \beta$$

διότι $f^2(\alpha) + f(\alpha)\cdot\beta + \beta^2 + 1 > 0$. Η σχέση $f^3(x) + f(x) = x$ με x το $f^{-1}(x)$, όπου $x \in \mathbb{R}$ δίνει:

$$\left[f\left(f^{-1}(x)\right)\right]^3 + f\left(f^{-1}(x)\right) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f^{-1}(x) = x^3 + x$$

Τονίζουμε και εδώ ότι η ενέργεια να θέσουμε $f(x) = y$ και να αντικαταστήσουμε :

$$f^3(x) + f(x) = x \Leftrightarrow y^3 + y = x \Leftrightarrow x = y^3 + y$$

δεν εξασφαλίζει ότι η f έχει σύνολο τιμών το R, ούτε δίνει την αντίστροφη της f.

Γενικά σχόλια

i) *Από τη σχέση* $f^3(x) + f(x) = x$ *, και χωρίς άλλο δεδομένο, μπορούμε να αποδείξουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Πράγματι, αν δεν ήταν γνησίως αύξουσα, θα υπήρχαν* $x_1,\ x_2$ *με* $x_1 < x_2$ *και* $f(x_1) \geq f(x_2)$. *Έτσι* $f^3(x_1) \geq f^3(x_2)$, *οπότε:*

$$f^3(x_1) + f(x_1) \geq f^3(x_2) + f(x_2) \Leftrightarrow x_1 \geq x_2, \text{ άτοπο.}$$

Μπορούμε επίσης να αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη αφαιρώντας τις σχέσεις $f^3(x) + f(x) = x$ *και* $f^3(x_0) + f(x_0) = x_0$.

ii) *Το σύνολο τιμών σε παρόμοιες ασκήσεις, όπως αναλύσαμε και στην αρχή της παρούσας εργασίας, βρίσκεται και ως εξής:*

- *Η πιθανή αντίστροφη της f είναι η* $g(x) = x^3 + x$.
- *Η g είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1.*
- *Η δοσμένη δίνει* $g\left(f(x)\right) = x,\ \ x \in \mathbb{R}$. *Έτσι* $f(x) = g^{-1}(x)$. *Αλλά η* g^{-1} *έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού της g, δηλαδή το ℝ. Άρα και η f έχει σύνολο τιμών το ℝ. (Ας τονίσουμε ότι:*

$$g(f(x)) = x = g(g^{-1}(x)) \overset{1\text{-}1}{\Leftrightarrow} f(x) = g^{-1}(x).)$$

Εφαρμογή 14

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και F μια αρχική της f με $F(0)=1$ με την ιδιότητα:

$$f(2015-x)F(x-2015) = 2015-x, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

α) Να αποδειχθεί ότι $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να λυθεί η εξίσωση $f(x)+f(3x)=f(2x)+f(4x)$.

Υπόδειξη

α) Θέτουμε όπου x το $2015-x$ και βρίσκουμε:

$$f(x)F(-x) = x,\ \ x\in\mathbb{R}.$$

Αυτή για x το –x δίνει:

$$f(-x)F(x) = -x$$

Επομένως:

$$f(x)F(-x) - f(-x)F(x) = 2x \Leftrightarrow F'(x)F(-x) + \left(F(-x)\right)' F(x) = 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F(x)F(-x) = x^2 + c \overset{F(0)=1}{\Longleftrightarrow} F(x)F(-x) = x^2+1 \qquad (1)$$

Άρα, διαιρώντας κατά μέλη:

$$\frac{f(x)F(-x)}{F(x)F(-x)} = \frac{x}{x^2+1} \Leftrightarrow \ln|F(x)| = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) \Leftrightarrow \Leftrightarrow |F(x)| = \sqrt{x^2+1}$$

Η F, λόγω της (1) και της $F(0)=1$, είναι θετική. Έτσι:

$$F(x) = \sqrt{x^2+1} \text{ και } f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

β) $f'(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα. Βρίσκουμε $f(\mathbb{R}) = (-1,\ 1)$.

γ) Το $x=0$ είναι προφανής ρίζα.

Με $x>0$ είναι $f(x)<f(2x)$ και $f(3x)<f(4x)$, οπότε $f(x)+f(3x)<f(2x)+f(4x)$. Άρα δεν έχουμε θετική ρίζα. Όμοια για $x<0$.

Απ. $x=0$

Εφαρμογή 15

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=\ln(x^2+1)-x+1 \text{ και } g(x)=e^x+x^2-x-1$$

α) Να μελετηθεί η g ως προς τη μονοτονία.

β) Να λυθεί η εξίσωση $(f\circ g)(x)=1$.

γ) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f και το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$.

Υπόδειξη

α) Είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\ 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,\ +\infty)$. (Μοναδική ρίζα η $x=0$.)

β) Γράφεται $f\left(g(x)\right)=f(0) \overset{f\ 1-1}{\Longleftrightarrow} g(x)=0 \Leftrightarrow x=0$, από το (α).

γ) $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$. Έχει μία ακριβώς ρίζα.

Εφαρμογή 16

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}-2$.

α) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.

β) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f καθώς και το πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$.

γ) Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} x+\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}=y+2 \\ y+\sqrt[3]{y}+\sqrt[5]{y}=z+2 \\ z+\sqrt[3]{z}+\sqrt[5]{z}=x+2 \end{cases}$.

Υπόδειξη

α) Γνησίως αύξουσα.

β) $f\left([0,\ +\infty)\right)=[-2,\ +\infty)$. Έχει μία μόνο ρίζα.

γ) Είναι $x=z+\sqrt[3]{z}+\sqrt[5]{z}-2=f(z)$ και τελικά:

$$x=f\left(f\left(f(x)\right)\right)$$

Με απαγωγή σε άτοπο παίρνουμε ότι η εξίσωση αυτή είναι ισοδύναμη με την $f(x)=x$.

Έτσι $x=y=z$. Αλλά:

$$f(x)=x \Leftrightarrow \sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}=2 \Leftrightarrow x=1$$

Άρα $(x,\ y,\ z)=(1,\ 1,\ 1)$.

Εφαρμογή 17

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\ln x+x^2-1$.

α) Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β) Να μελετηθεί η f ως προς τα κοίλα και να βρεθούν τα σημεία καμπής της C_f.

γ) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.

δ) Να βρεθεί το πρόσημο της συνάρτησης f.

ε) Να λυθεί η εξίσωση:

$$f(x)+f(x^5)=f(x^2)+f(x^{10})$$

Υπόδειξη

α) Γνησίως αύξουσα.

β) $f''(x)=-\dfrac{2}{x^2}+2=2\dfrac{x^2-1}{x^2}$.

Η f είναι κοίλη στο $(0,1]$ και κυρτή στο $[1,+\infty)$. Το M(1,0) είναι σημείο καμπής.

γ) Σύνολο τιμών είναι το $\mathbb{R}$.

δ) $f(1)=0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα.

x	0		1		$+\infty$
f(x)		$-$ ↗	0	↗ $+$	

Η f είναι αρνητική στο $(0,1)$ και θετική στο $(1,+\infty)$.

ε) Το $x=1$ είναι ρίζα.

- Για $x\in(0,1)$ είναι $x>x^2$ και $x^5>x^{10}$, οπότε:

  $f(x)>f(x^2)$, $f(x^5)>f(x^{10})$ και έτσι:

$$f(x)+f(x^5)>f(x^2)+f(x^{10})$$

- Για $x>1$ είναι $f(x)<f(x^2)$, $f(x^5)<f(x^{10})$ και έτσι:

$$f(x)+f(x^5)<f(x^2)+f(x^{10}).$$

Άρα μοναδική ρίζα είναι το $x=1$.

Εφαρμογή 18

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=e^{\frac{x}{\alpha}}-e^{\frac{\beta}{x}}$, όπου α, β είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

α) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.

β) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.

γ) Να βρεθούν οι κατακόρυφες ασύμπτωτες της C_f καθώς και οι οριζόντιες, αν υπάρχουν.

δ) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{f(x)}{x}dx$.

Υπόδειξη

Πεδίο ορισμού $A=\mathbb{R}^*$.

α) $f'(x)=\frac{1}{\alpha}e^{\frac{x}{\alpha}}+\frac{\beta}{x^2}e^{\frac{\beta}{x}}>0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f΄(x)	+	‖	+
f(x)	↗	‖	↗

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,\,0)$ και $(0,\,+\infty)$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=1$, οπότε:

$$f(\Delta_1)=(-1,\,1),\ \text{με}\ \Delta_1=(-\infty,\,0)$$

- $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Άρα:

$$f(\Delta_2)=\mathbb{R}\ \ (\Delta_2=(0,\,+\infty)).$$

Απ. $f(A)=\mathbb{R}$.

γ) Η $x=0$, διότι $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$. Η ευθεία $y=-1$ στο $-\infty$.

δ) Θέτουμε $x=\alpha\beta\frac{1}{t}$, οπότε $dx=-\alpha\beta\frac{1}{t^2}$.

x	α	β
t	β	α

Άρα:

$$I=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{e^{\frac{x}{\alpha}}-e^{\frac{\beta}{x}}}{x}dx=\int_{\beta}^{\alpha}\left(\frac{e^{\frac{\beta}{t}}-e^{\frac{t}{\alpha}}}{\alpha\beta\frac{1}{t}}\left(-\alpha\beta\frac{1}{t^2}\right)\right)dt=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{e^{\frac{\beta}{t}}-e^{\frac{t}{\alpha}}}{t}dt=-I$$

Άρα $2I=0\Leftrightarrow I=0$.

Εφαρμογή 19

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x}+1 & ,0<x<1\\ 1 & ,x=1\\ \dfrac{\ln x}{x-1} & ,x>1\end{cases}$

Α. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και να βρείτε, αν υπάρχουν, τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Β. Να αποδείξετε ότι το $x_0=1$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f και να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Γ. i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,+\infty)$.

ii) Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα των x και τις ευθείες $x=1$ και $x=x_0$, όπου x_0 η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο $(0,+\infty)$, να αποδείξετε ότι

$$E=\frac{-x_0^2-2x_0+2}{2}$$

Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο $[1,\ +\infty)$, να αποδείξετε ότι

$$(x+1)F(x)\ >\ xF(1)\ +\ F(x^2),\ \text{για κάθε}\ \ x>1\ .$$

Υπόδειξη

Α. Η συνέχεια προκύπτει με τον ορισμό. Ασύμπτωτες είναι η $x=0, y=0$ (στο $+\infty$).

Β. Η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1 , αφού

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(x)}{x-1}=-\frac{1}{2}\quad\text{και}\quad\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(x)}{x-1}=1$$

Για $x>1$ είναι $f'(x)=\dfrac{x-1-x\ln x}{x(x-1)^2}=\dfrac{g(x)}{x(x-1)^2}$. Αλλά με μελέτη της g παίρνουμε ότι αυτή είναι αρνητική για $x>1$ και έτσι δεν υπάρχουν ρίζες της f' στο $(1,+\infty)$. Είναι επίσης $f'(x)\neq 0$ για $0<x<1$. Άρα το $x_0=1$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$, οπότε έχει τελικά σύνολο τιμών το $f((0,+\infty))=(-\infty,1]$.

Γ. Αν $\Delta_1=(0,1]$ είναι $f(\Delta_1)=(-\infty,1]$ και το μηδέν βρίσκεται σε αυτό το διάστημα. Λόγω της μονοτονίας η ρίζα είναι μοναδική.

Είναι επίσης $\ln x_0=-x_0$ και το εμβαδόν δίνεται από τον τύπο : $E=\int_{x_0}^{1}(\dfrac{\ln x}{x}+1)dx$ που οδηγεί στη ζητούμενη μορφή του αποτελέσματος.

Δ. Εφαρμόζουμε για την F το ΘΜΤ στα διαστήματα : $[1,x],[x,x^2]$. Αλλά είναι $F'=f, F''=f'$ και η f' είναι αρνητική για $x>1$.Επομένως $F'(\xi_1)>F'(\xi_2)$ κλπ.

Εφαρμογή 20

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$

Α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.

Β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$.

Γ. Να λυθεί η εξίσωση:

$$f(|\eta\mu x|+2)-f(|\eta\mu x|)=f(x+2)-f(x)$$

Υπόδειξη

Α. Είναι $f'(x)=2xe^{x^2}-2x$ και $f''(x)=2(e^{x^2}-1)+4x^2e^{x^2}$.

Η συνάρτηση f αλλάζει μονοτονία στο $x=0$ και είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Είναι επίσης $f''(x)=2(e^{x^2}-1)+4x^2e^{x^2}\geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο στο $x=0$.Επομένως η f' είναι γνησίως αύξουσα στο R .

Β. Σύνολο τιμών είναι το $[0,+\infty)$. Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα την $x=0$.

Γ. Η εξίσωση παίρνει τη μορφή $g(|\eta\mu x|)=g(x)$, όπου $g(x)=f(x+2)-f(x)$.

Αλλά η συνάρτηση αυτή είναι γνησίως αύξουσα, διότι $g'(x)=f'(x+2)-f'(x)>0$ και η f' είναι γνησίως αύξουσα. Έτσι, από το $1-1$ παίρνουμε ισοδύναμα ότι : $|\eta\mu x|=x \Leftrightarrow x=0$

Ευχαριστήρια :

Ευχαριστούμε τους συναδέλφους Χρήστο Κυριαζή ,Φωτεινή Καλδή , Σταύρο Παπαδόπουλο και Δημήτρη Σκουτέρη για τις εύστοχες παρατηρήσεις και την με οποιοδήποτε τρόπο συμβολή τους στο περιεχόμενο αυτού του αρχείου .