Ασκήσεις για τον Αρχιμήδη Senior

Στο παρόν αρχείο περιέχονται ασκήσεις και θέματα πάνω στα ειδικά θεωρήματα της Γεωμετρίας, όπως τα θεωρήματα Ceva,Μεναλάου κλπ. Απευθύνονται σε μαθητές Λυκείου που στοχεύουν στο διαγωνισμό Αρχιμήδης της ΕΜΕ. Για τη μελέτη της θεωρίας και των βασικών εφαρμογών που αναφέρονται στα ειδικά αλλά πολύ σημαντικά θεωρήματα των μετρικών σχέσεων, ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο κυρίως βιβλίο που αναγράφεται στο τέλος του αρχείου.

Μπάμπης Στεργίου – Δεκέμβριος 2016

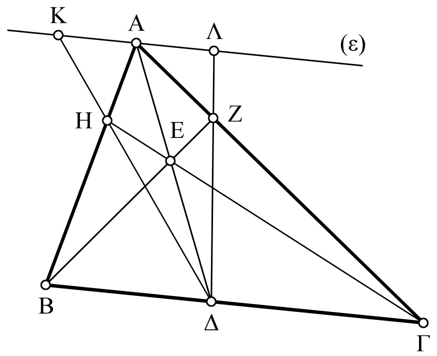
Θέματα στα αξιόλογα θεωρήματα

1.1 **Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, σημείο Δ της πλευράς ΒΓ και σημείο Ε του ΑΔ. Οι ευθείες ΒΕ, ΓΕ τέμνουν τις ΑΓ, ΑΒ στα σημεία Ζ, Η αντιστοίχως. Η παράλληλη από το Α προς τη ΒΓ τέμνει τις ΔΗ, ΔΖ στα σημεία Κ, Λ. Να αποδειχθεί ότι ΑΚ = ΑΛ .**

Λύση

Στο τρίγωνο ΑΒΓ το θεώρημα Cevà δίνει:

$$\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma}\cdot\frac{Z\Gamma}{ZA}\cdot\frac{HA}{HB}=1$$



Είναι:

- $\overset{\Delta}{AHK} \sim \overset{\Delta}{H\Delta B}$, οπότε $\frac{AK}{\Delta B}=\frac{AH}{HB}$ (1)
- $\overset{\Delta}{AZ\Lambda} \sim \overset{\Delta}{Z\Delta\Gamma}$, οπότε $\frac{A\Lambda}{\Delta\Gamma}=\frac{AZ}{Z\Gamma}$ (2)

Με διαίρεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$\frac{\text{AK}}{\text{AΛ}}\cdot\frac{\text{ΔΓ}}{\text{ΔB}}=\frac{\text{AH}}{\text{HB}}\cdot\frac{\text{ZΓ}}{\text{ZA}}\Leftrightarrow\frac{\text{AK}}{\text{AΛ}}=\frac{\text{ΔB}}{\text{ΔΓ}}\cdot\frac{\text{ZΓ}}{\text{ZA}}\cdot\frac{\text{HA}}{\text{HB}}=1$$

Άρα $\text{AK}=\text{AΛ}$.

Σημείωση

Αν $AΔ\perp BΓ$, τότε $AΔ\perp KΛ$ και αφού $AK=AΛ$, το $\overset{Δ}{ΔKΛ}$ είναι ισοσκελές. Άρα $A\hat{Δ}H=A\hat{Δ}Z$.
Αποδείξαμε λοιπόν μια βασική πρόταση:

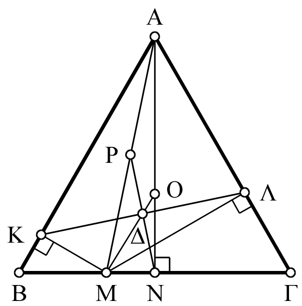
> *Αν E είναι σημείο του ύψους AΔ τριγώνου ABΓ και οι BE, ΓE τέμνουν τις AΓ, AB στα Z και H, τότε η ΔA διχοτομεί τη γωνία $H\hat{Δ}Z$.*

1.2 **Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και Ο το βαρύκεντρο αυτού. Στην πλευρά ΒΓ παίρνουμε σημείο Μ. Έστω Κ, Λ οι προβολές του Μ στις πλευρές ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι η ΟΜ διχοτομεί το τμήμα ΚΛ.**

(JBMO, Ρουμανία – 2007, tst)

Λύση

Έστω Ρ το μέσο του ΑΜ. Επειδή $\text{A}\hat{\text{K}}\text{M}=\text{A}\hat{\text{N}}\text{M}=\text{A}\hat{\Lambda}\text{M}=90^\text{o}$, τα σημεία Α, Κ, Μ, Ν, Λ είναι ομοκυκλικά και το κέντρο του κύκλου αυτού είναι το Ρ.



Αφού $\text{B}\hat{\text{A}}\text{N}=30^\text{o}$, είναι:

$$\text{K}\hat{\text{P}}\text{N}=2\text{K}\hat{\text{A}}\text{N}=60^\text{o},\quad \text{N}\hat{\text{P}}\Lambda=2\text{N}\hat{\text{A}}\Lambda=60^\text{o}$$

Τα τρίγωνα λοιπόν ΡΚΝ, ΡΝΛ είναι ισόπλευρα. Άρα το ΡΚΝΛ είναι ρόμβος και έτσι οι διαγώνιες ΚΛ, ΡΝ διχοτομούνται στο μέσο Δ του ΚΛ.

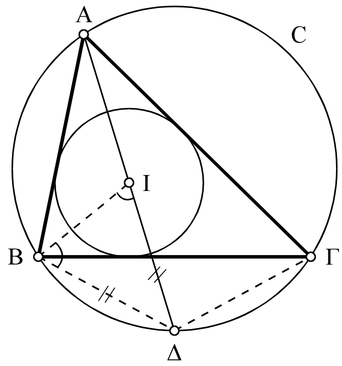
Θα αποδείξουμε ότι τα σημεία Ο, Δ, Μ είναι συνευθειακά. Στο τρίγωνο όμως ΑΡΝ είναι:

$$\frac{\text{MA}}{\text{MP}}\cdot\frac{\text{ΔP}}{\text{ΔN}}\cdot\frac{\text{ON}}{\text{OA}}=2\cdot1\cdot\frac{1}{2}=1$$

Σύμφωνα με το αντίστροφο του θεωρήματος Μενελάου, τα Ο, Δ, Μ είναι συνευθειακά. Άρα η ΟΜ διχοτομεί το τμήμα ΚΛ.

1.3 **Ένα τρίγωνο ΑΒΓ, με $\beta+\gamma=2\alpha$ και έγκεντρο Ι, είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο C. Η ευθεία ΑΙ τέμνει τον C στο σημείο Δ. Να αποδειχθεί ότι $\text{ΙΑ}=\text{ΙΔ}$.**

Λύση



Φέρουμε τις ΓΔ, ΔΒ. Το θεώρημα Πτολεμαίου στο εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΔΓ δίνει:

$$\text{ΑΒ}\cdot\text{ΓΔ}+\text{ΑΓ}\cdot\text{ΒΔ}=\text{ΑΔ}\cdot\text{ΒΓ}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{ΑΒ}\cdot\text{ΔΒ}+\text{ΑΓ}\cdot\text{ΒΔ}=\text{ΑΔ}\cdot\text{ΒΓ}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\text{ΑΒ}+\text{ΑΓ})\cdot\text{ΔΒ}=\text{ΑΔ}\cdot\text{ΒΓ}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\text{ΒΓ}\cdot\text{ΔΒ}=\text{ΑΔ}\cdot\text{ΒΓ}\Leftrightarrow \text{ΑΔ}=2\text{ΔΒ} \qquad (1)$$

διότι η ΙΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\text{Α}}$ και έτσι $\overset{\frown}{\text{ΔΒ}}=\overset{\frown}{\text{ΔΓ}}$, δηλαδή $\text{ΔΒ}=\text{ΔΓ}$. Το τρίγωνο όμως ΔΒΙ είναι ισοσκελές, διότι:

$$\text{Β}\hat{\text{Ι}}\text{Δ}=\text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Ι}+\text{Α}\hat{\text{Β}}\text{Ι}=\frac{\hat{\text{Β}}}{2}+\frac{\hat{\text{Α}}}{2},\quad \text{Ι}\hat{\text{Β}}\text{Δ}=\text{Ι}\hat{\text{Β}}\text{Γ}+\text{Γ}\hat{\text{Β}}\text{Δ}=\frac{\hat{\text{Β}}}{2}+\text{Γ}\hat{\text{Α}}\text{Δ}=\frac{\hat{\text{Β}}}{2}+\frac{\hat{\text{Α}}}{2}$$

Άρα $\text{ΔΒ}=\text{ΔΙ}$. Η σχέση (1) λοιπόν γράφεται:

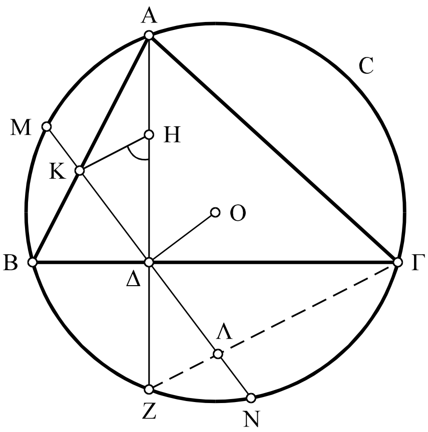
$$\text{ΑΔ}=2\text{ΔΒ}\Leftrightarrow \text{ΑΙ}+\text{ΙΔ}=2\text{ΔΙ}\Leftrightarrow \text{ΑΙ}=\text{ΙΔ}$$

που είναι η ζητούμενη σχέση.

1.4 **Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με $\text{ΑΒ}<\text{ΑΓ}$, το περίκεντρο Ο, το ορθόκεντρο Η και το ύψος ΑΔ. Η κάθετη προς την ΟΔ, στο σημείο Δ, τέμνει την ΑΒ στο Κ. Να αποδειχθεί ότι $\text{Κ}\hat{\text{Η}}\text{Δ}=\text{Α}\hat{\text{Β}}\text{Γ}$.**

(IMO – 1996, short list)

Λύση



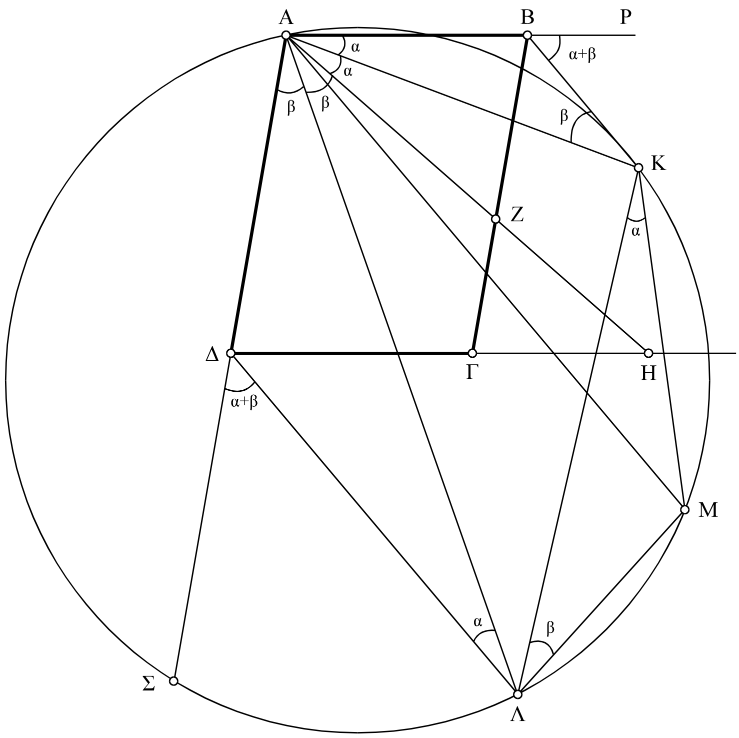
Έστω ότι η ΑΔ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο C του τριγώνου ΑΒΓ στο Ζ. Ας είναι ακόμα Λ το σημείο τομής της ΚΔ με τη ΓΖ. Επειδή $\text{ΟΔ}\perp\text{ΚΛ}$, το Δ είναι μέσο του ΜΝ. Άρα, το θεώρημα της πεταλούδας για τις χορδές ΒΔΓ, ΑΔΖ δίνει ότι $\text{ΔΚ}=\text{ΔΛ}$.

Επειδή τα σημεία Η, Ζ είναι συμμετρικά ως προς το Δ (βασικό θεώρημα), τα τρίγωνα ΔΚΗ και ΔΛΖ είναι ίσα ($\Delta H = \Delta Z$, $\Delta K = \Delta\Lambda$ και $K\hat{\Delta}H = \Lambda\hat{\Delta}Z$). Επομένως:

$$K\hat{H}\Delta = \Delta\hat{Z}\Lambda = A\hat{Z}\Gamma = A\hat{B}\Gamma$$

1.5 **Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Μια ευθεία που περνάει από το Α τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ζ και την ευθεία ΔΓ στο Η. Έστω Κ, Λ τα κέντρα των παρεγγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων ΑΒΖ, ΑΔΗ, που εφάπτονται αντίστοιχα στις πλευρές ΒΖ, ΔΗ. Αν η διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Delta$ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΚΛ στο σημείο Μ, να αποδειχθεί ότι $AM = KB + \Lambda\Delta$.**

Λύση



Έστω $H\hat{A}B = 2\alpha$ και $H\hat{A}\Delta = 2\beta$. Προφανώς είναι:

$$P\hat{B}K = \alpha + \beta = \Sigma\hat{\Delta}\Lambda$$

οπότε $B\hat{K}A = \beta$ και $\Delta\hat{\Lambda}A = \alpha$. Είναι όμως:

- $\Lambda\hat{K}M = \Lambda\hat{A}M = \Delta\hat{A}M - \Delta\hat{A}\Lambda = \dfrac{B\hat{A}\Delta}{2} - \beta = (\alpha+\beta) - \beta = \alpha$
- $K\hat{\Lambda}M = K\hat{A}M = B\hat{A}M - B\hat{A}K = (\alpha+\beta) - \alpha = \beta$

Τα τρίγωνα λοιπόν ΑΒΚ, ΜΚΛ, ΔΑΛ είναι όμοια. Έτσι:

- $\overset{\Delta}{ABK} \sim \overset{\Delta}{MK\Lambda}$, οπότε $\dfrac{AK}{KB} = \dfrac{K\Lambda}{\Lambda M} \Leftrightarrow AK \cdot \Lambda M = KB \cdot K\Lambda \qquad (1)$

- $\overset{\Delta}{\text{MK}\Lambda} \sim \overset{\Delta}{\Lambda\text{A}\Delta}$, οπότε $\frac{\text{KM}}{\text{K}\Lambda} = \frac{\Delta\Lambda}{\text{A}\Lambda} \Leftrightarrow \text{KM}\cdot\text{A}\Lambda = \text{K}\Lambda\cdot\Delta\Lambda \qquad (2)$

Στο εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΚΜΛ το θεώρημα Πτολεμαίου δίνει:

$$\text{AM}\cdot\text{K}\Lambda = \text{AK}\cdot\Lambda\text{M} + \text{KM}\cdot\text{A}\Lambda \overset{(1),\,(2)}{=\!=\!=} \text{KB}\cdot\text{K}\Lambda + \text{K}\Lambda\cdot\Lambda\Delta = \text{K}\Lambda(\text{KB}+\Lambda\Delta)$$

Διαγράφουμε τον παράγοντα ΚΛ, οπότε παίρνουμε: $\text{AM} = \text{KB} + \Lambda\Delta$

που είναι η ζητούμενη σχέση.

Σχόλιο

Αν Ρ είναι το μέσο του ΒΔ και Σ το μέσο του ΚΛ, τότε στο τραπέζιο ΒΚΛΔ είναι $P\Sigma = \frac{BK+\Delta\Lambda}{2} = \frac{AM}{2}$*. Αλλά το Ρ είναι και μέσο του ΑΓ και αφού* $P\Sigma = \frac{AM}{2}$*, από το τρίγωνο ΓΑΜ παίρνουμε ότι το Σ είναι και μέσο του ΓΜ. Άρα το ΓΚΜΛ είναι παραλληλόγραμμο, διότι οι διαγώνιες διχοτομούνται. Άρα:*

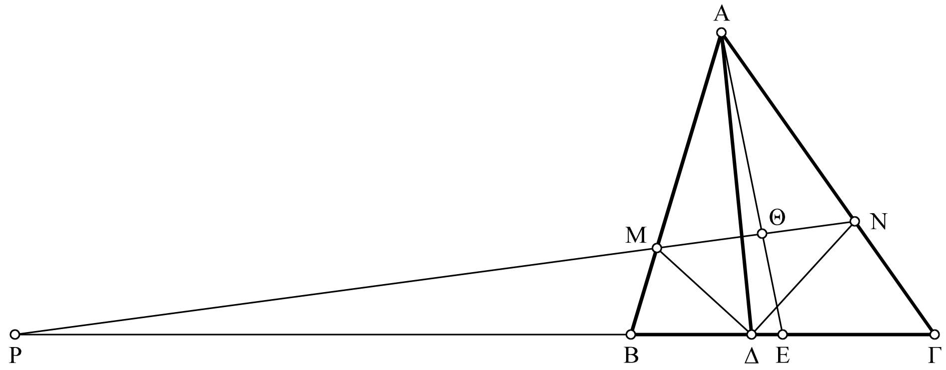
$$\Lambda\hat{\Gamma}K = \Lambda\hat{M}K = 180^o - \Lambda\hat{A}K = 180^o - \frac{\hat{A}}{2}$$

Το συμπέρασμα αυτό είναι και το ζητούμενο στην άσκηση G3, IMO short list – 2005.

1.6 **Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ στην πλευρά ΒΓ τέτοιο, ώστε $\text{A}\Delta = \text{B}\Gamma$. Οι διχοτόμοι των γωνιών $\text{A}\hat{\Delta}\text{B}$, $\text{A}\hat{\Delta}\Gamma$ τέμνουν τις ΑΒ, ΑΓ στα σημεία Μ, Ν. Να αποδειχθεί ότι η ΜΝ διέρχεται από το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.**

(Ρουμανία – 2009)

Λύση



Έστω Ε το μέσο του ΒΓ και Θ η τομή των ΜΝ, ΑΕ. Θα αποδείξουμε ότι $\text{ΘΑ} = 2\text{ΘΕ}$, οπότε το Θ θα είναι το βαρύκεντρο του $\overset{\Delta}{\text{ΑΒΓ}}$.

Έστω ότι η ΜΝ τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Ρ.

- Το θεώρημα Μενελάου στο τρίγωνο ΑΕΒ, με τέμνουσα την ευθεία ΡΜΘ, δίνει:

$$\frac{\text{ΡΕ}}{\text{ΡΒ}}\cdot\frac{\text{ΜΒ}}{\text{ΜΑ}}\cdot\frac{\text{ΘΑ}}{\text{ΘΕ}} = 1 \Leftrightarrow \frac{\text{ΜΒ}}{\text{ΜΑ}} = \frac{\text{ΘΕ}}{\text{ΘΑ}}\cdot\frac{\text{ΡΒ}}{\text{ΡΕ}} \qquad (1)$$

- Το ίδιο θεώρημα στο $\overset{\Delta}{\text{ΑΕΓ}}$, με τέμνουσα τη ΡΘΝ, δίνει:

$$\frac{\text{ΡΓ}}{\text{ΡΕ}}\cdot\frac{\text{ΘΕ}}{\text{ΘΑ}}\cdot\frac{\text{ΝΑ}}{\text{ΝΓ}} = 1 \Leftrightarrow \frac{\text{ΝΓ}}{\text{ΝΑ}} = \frac{\text{ΘΕ}}{\text{ΘΑ}}\cdot\frac{\text{ΡΓ}}{\text{ΡΕ}} \qquad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1), (2) και παίρνουμε:

$$\frac{\text{ΜΒ}}{\text{ΜΑ}} + \frac{\text{ΝΓ}}{\text{ΝΑ}} = \frac{\text{ΘΕ}}{\text{ΘΑ}}\cdot\left(\frac{\text{ΡΒ}}{\text{ΡΕ}} + \frac{\text{ΡΓ}}{\text{ΡΕ}}\right) = \frac{\text{ΘΕ}}{\text{ΘΑ}}\cdot\frac{\text{ΡΒ}+\text{ΡΓ}}{\text{ΡΕ}} = \frac{\text{ΘΕ}}{\text{ΘΑ}}\cdot\frac{2\text{ΡΕ}}{\text{ΡΕ}} = \frac{2\text{ΘΕ}}{\text{ΘΑ}} \qquad (3)$$

διότι $\text{ΡΒ} + \text{ΡΓ} = 2\text{ΡΕ}$, αφού το Ε είναι μέσο του ΒΓ. Επειδή $\frac{\text{ΜΒ}}{\text{ΜΑ}} = \frac{\text{ΔΒ}}{\text{ΔΑ}}$ και $\frac{\text{ΝΓ}}{\text{ΝΑ}} = \frac{\text{ΔΓ}}{\text{ΔΑ}}$, η (3) γίνεται:

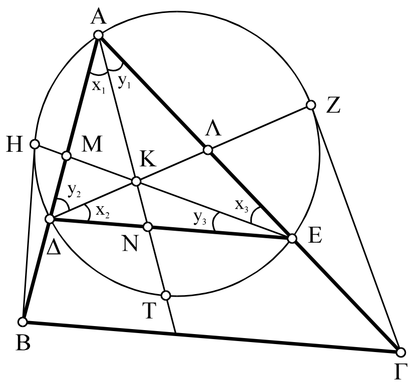
$$\frac{\text{ΔΒ}}{\text{ΔΑ}} + \frac{\text{ΔΓ}}{\text{ΔΑ}} = \frac{2\text{ΘΕ}}{\text{ΘΑ}} \Leftrightarrow \frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΔΑ}} = \frac{2\text{ΘΕ}}{\text{ΘΑ}} \Leftrightarrow \text{ΘΑ} = 2\text{ΘΕ}$$

διότι $\text{ΒΓ} = \text{ΔΑ}$. Άρα όντως το Θ είναι το βαρύκεντρο του $\overset{\Delta}{\text{ΑΒΓ}}$.

1.7 **Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ευθεία ΔΕ παράλληλη προς τη ΒΓ, που τέμνει τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Έστω C ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία Α, Δ, Ε και ΒΗ, ΓΖ τα εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από τα Β, Γ προς τον C και βρίσκονται στο ημιεπίπεδο της ΔΕ που βρίσκεται και το Α. Αν οι ΔΖ, ΕΗ τέμνονται στο σημείο Κ, να αποδειχθεί ότι η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\text{Α}}$ του τριγώνου ΑΒΓ.**

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε τριγωνομετρική μορφή του θεωρήματος Cevà. Ονομάζουμε τις γωνίες όπως δείχνει το σχήμα και έχουμε:



$$\frac{\eta\mu x_2}{\eta\mu y_2} = \frac{\text{ΖΕ}}{\text{ΖΑ}} = \sqrt{\frac{\text{ΓΕ}}{\text{ΓΑ}}}$$

διότι $\frac{\text{ΓΕ}}{\text{ΓΑ}} = \frac{\text{ΖΕ}^2}{\text{ΖΑ}^2}$ (βασική σχέση). Είναι επίσης:

$$\frac{\eta\mu x_3}{\eta\mu y_3} = \frac{HA}{H\Delta} = \sqrt{\frac{BA}{B\Delta}}$$

Επομένως:

$$\frac{N\Delta}{NE} \cdot \frac{\Lambda E}{\Lambda A} \cdot \frac{MA}{M\Delta} = 1 \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x_1}{\eta\mu y_1} \cdot \frac{\eta\mu x_2}{\eta\mu y_2} \cdot \frac{\eta\mu x_3}{\eta\mu y_3} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\eta\mu x_1}{\eta\mu y_1} \cdot \sqrt{\frac{\Gamma E}{\Gamma A}} \cdot \sqrt{\frac{BA}{B\Delta}} = 1 \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x_1}{\eta\mu y_1} = \sqrt{\frac{B\Delta}{BA} \cdot \frac{\Gamma A}{\Gamma E}} = 1 \qquad (1)$$

διότι $\Delta E \,//\, B\Gamma$ και έτσι $\frac{B\Delta}{BA} = \frac{\Gamma E}{\Gamma A}$. Από τη σχέση (1) συμπεραίνουμε ότι:

$$\eta\mu x_1 = \eta\mu y_1 \Leftrightarrow x_1 = y_1$$

αφού οι γωνίες x_1, y_1 δεν μπορεί να είναι παραπληρωματικές. Με άλλα λόγια, η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.

Σχόλιο

Ο νόμος ημιτόνων στα $\overset{\Delta}{\Delta EZ}$, $\overset{\Delta}{\Delta AZ}$ δίνει:

$$\frac{\eta\mu x_2}{ZE} = \frac{\eta\mu \Delta\hat{E}Z}{\Delta Z}, \quad \frac{\eta\mu y_2}{AZ} = \frac{\eta\mu \Delta\hat{A}Z}{\Delta Z}$$

Αυτές με διαίρεση κατά μέλη δίνουν:

$$\frac{\eta\mu x_2}{\eta\mu y_2} \cdot \frac{AZ}{EZ} = \frac{\eta\mu \Delta\hat{E}Z}{\eta\mu \Delta\hat{A}Z} = 1$$

διότι $\Delta\hat{E}Z + \Delta\hat{A}Z = 180^o$. Άρα $\frac{\eta\mu x_2}{\eta\mu y_2} = \frac{ZE}{ZA}$.

1.8 **Σε ένα οξυγώνιο τρίγωνο που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο C είναι $\hat{A} > \hat{B}$. Στην πλευρά ΒΓ παίρνουμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $\Delta\hat{A}\Gamma = \hat{B}$. Ένας κύκλος Ω εφάπτεται με τον C, με το τμήμα ΒΔ στο σημείο Ε και με την πλευρά ΑΔ. Να αποδειχθεί ότι ΓΑ = ΓΕ.**

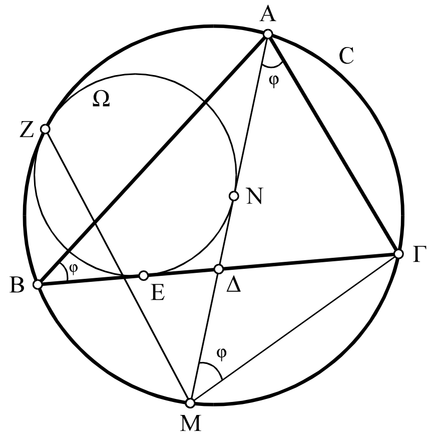
Λύση

Έστω ότι η ΑΔ τέμνει τον C στο Μ και ο Ω εφάπτεται με τον C στο Ζ. Στο τετράπλευρο ΑΖΜΓ το θεώρημα Πτολεμαίου δίνει:

$$AM \cdot \Gamma Z = A\Gamma \cdot MZ + AZ \cdot \Gamma M \qquad (1)$$

Είναι όμως:

$$\Gamma\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{B}A = \Gamma\hat{M}A = \varphi$$



οπότε το τρίγωνο ΓΑΜ είναι ισοσκελές. Άρα $\Gamma A = \Gamma M$. Για τα σημεία Α, Ζ, Μ, Γ θα εφαρμόσουμε το θεώρημα Casey. Έτσι, στη σχέση (1) θα αντικαταστήσουμε το ΓΖ με το ΓΕ, το ΜΖ με το ΜΝ και το ΑΖ με το ΑΝ:

$$AM \cdot \Gamma E = A\Gamma \cdot MN + AN \cdot \Gamma M \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AM \cdot \Gamma E = A\Gamma \cdot MN + AN \cdot \Gamma A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AM \cdot \Gamma E = A\Gamma \cdot (MN + AN) \Leftrightarrow \quad AM \cdot \Gamma E = A\Gamma \cdot AM \Leftrightarrow \Gamma E = A\Gamma$$

Έτσι η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

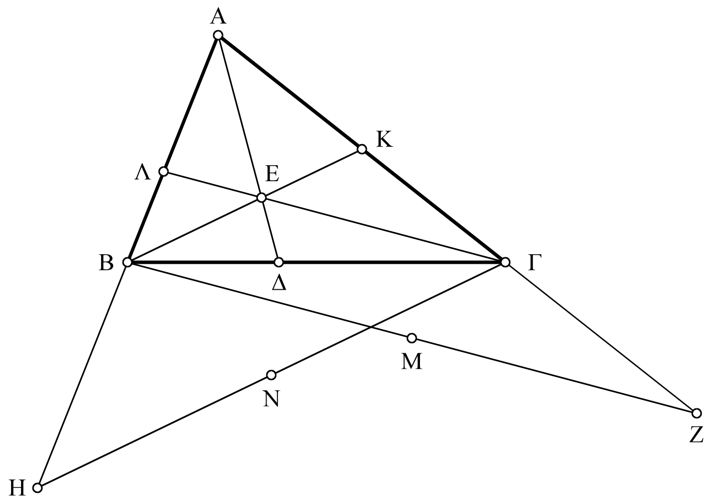
1.9 **Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διχοτόμος του ΑΔ και σημείο Ε του ΕΔ. Η παράλληλη από το Β προς τη ΓΕ τέμνει την ευθεία ΑΓ στο Ζ και η παράλληλη από το Γ προς τη ΒΕ τέμνει την ευθεία ΑΒ στο Η. Να αποδειχθεί ότι:**

α) $BH = \Gamma Z$, β) αν Μ, Ν είναι τα μέσα των ΒΖ, ΓΗ, τότε $MN \perp A\Delta$.

Λύση

α) Έστω ότι οι ΒΕ, ΓΕ τέμνουν τις πλευρές ΑΓ, ΑΒ στα Κ, Λ.

- Αφού ΒΚ // ΗΓ, έχουμε $\dfrac{AB}{BH} = \dfrac{AK}{K\Gamma}$ (1)
- Αφού ΓΛ // ΖΒ, είναι $\dfrac{\Gamma Z}{\Gamma A} = \dfrac{\Lambda B}{\Lambda A}$ (2)
- Αφού η ΑΔ είναι διχοτόμος, προκύπτει $\dfrac{\Delta B}{\Delta\Gamma} = \dfrac{AB}{A\Gamma}$ (3)



Οι (1) και (2), με πολλαπλασιασμό, δίνουν:

$$\frac{ΑΒ}{ΒΗ}\cdot\frac{ΓΖ}{ΓΑ}=\frac{ΑΚ}{ΚΓ}\cdot\frac{ΛΒ}{ΛΑ}\Leftrightarrow\frac{ΓΖ}{ΒΗ}=\frac{ΑΓ}{ΑΒ}\cdot\frac{ΑΚ}{ΚΓ}\cdot\frac{ΛΒ}{ΛΑ}\overset{(3)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow\frac{ΓΖ}{ΒΗ}=\frac{ΔΓ}{ΔΒ}\cdot\frac{ΚΑ}{ΚΓ}\cdot\frac{ΛΒ}{ΛΑ}=1$$

διότι το θεώρημα Cevà στο τρίγωνο ΑΒΓ δίνει:

$$\frac{ΔΓ}{ΔΒ}\cdot\frac{ΛΒ}{ΛΑ}\cdot\frac{ΚΑ}{ΚΓ}=1$$

Είναι λοιπόν $\frac{ΓΖ}{ΒΗ}=1$, οπότε $ΓΖ=ΒΗ$.

β) Στο τετράπλευρο ΒΗΖΓ είναι $ΒΗ=ΓΖ$, οπότε αν Ρ είναι το μέσο του ΗΖ και Σ το μέσο του ΒΓ, τότε το ΣΝΡΜ είναι ρόμβος και έτσι $ΣΡ\perp ΜΝ$. Αλλά $Μ\hat{Σ}Ν=Β\hat{Α}Γ$ και έτσι ΣΡ // ΑΔ. Άρα $ΑΔ\perp ΜΝ$.

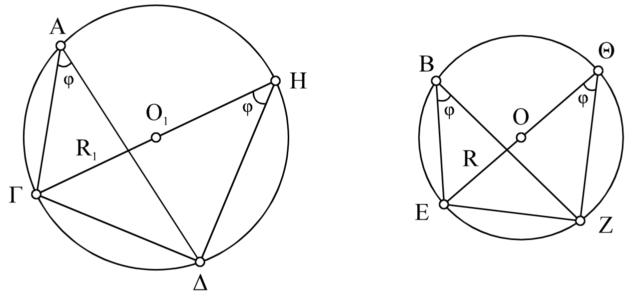
1.10 **Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $ΑΒ<ΑΓ<ΒΓ$. Στην πλευρά ΒΓ παίρνουμε σημείο Δ και στην προέκταση της ΒΑ, προς το Α, παίρνουμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $ΒΔ=ΒΕ=ΑΓ$. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΒΔΕ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ρ. Η ευθεία ΒΡ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ στο Σ. Να αποδειχθεί ότι $ΣΑ+ΣΓ=ΒΡ$.**

Λύση

Λήμμα

Αν δύο εγγεγραμμένες γωνίες δύο κύκλων είναι ίσες, τότε ο λόγος των οριζόμενων χορδών είναι ίσος με τον λόγο των ακτίνων των κύκλων.

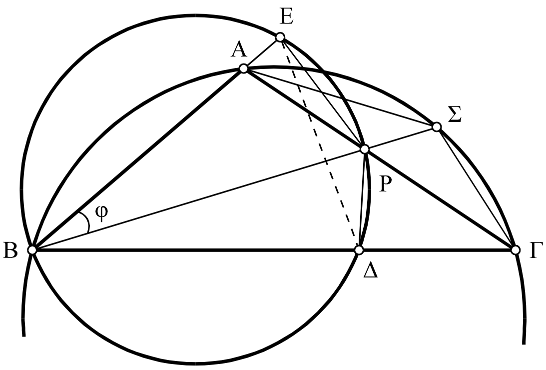
Απόδειξη



Πράγματι, αν $\hat{Α}=\hat{Β}=φ$ και φέρουμε τις διαμέτρους ΓΗ, ΕΘ, τότε από την ομοιότητα των ορθογωνίων τριγώνων ΔΓΗ, ΖΕΘ είναι:

$$\frac{\Gamma\Delta}{EZ}=\frac{\Gamma H}{E\Theta}=\frac{2R_1}{2R}=\frac{R_1}{R}\ \blacksquare$$

Αν R_1 και R είναι οι ακτίνες των κύκλων (Β, Δ, Ε) και (Α, Β, Γ), τότε, σύμφωνα με το λήμμα, ισχύει:



$$\frac{PE}{\Sigma A}=\frac{P\Delta}{\Sigma\Gamma}=\frac{\Delta E}{\Gamma A}=\frac{R_1}{R}=\lambda \quad (1)$$

Από την (1) παίρνουμε ότι:

$PE=\lambda\Sigma A,\ P\Delta=\lambda\Sigma\Gamma,\ \Delta E=\lambda\Gamma A$ (2)

Στο τετράπλευρο ΒΔΡΕ το θεώρημα του Πτολεμαίου δίνει:

$$BP\cdot\Delta E=B\Delta\cdot PE+BE\cdot P\Delta \overset{(2)}{\Leftrightarrow} BP\cdot\lambda\Gamma A=B\Delta\cdot\lambda\Sigma A+BE\cdot\lambda\Sigma\Gamma\Leftrightarrow$$

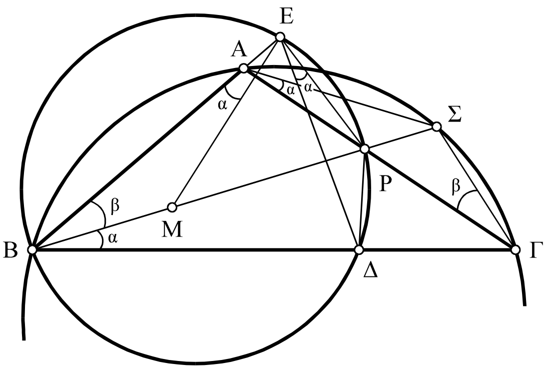
$$\Leftrightarrow BP\cdot\Gamma A=B\Delta\cdot\Sigma A+BE\cdot\Sigma\Gamma \quad (3)$$

Επειδή $\Gamma A=B\Delta=BE$, η (3) δίνει ότι $BP=\Sigma A+\Sigma\Gamma$, που είναι η ζητούμενη σχέση.

Άλλος τρόπος

Έστω $\Gamma\hat{A}\Sigma=\Gamma\hat{B}\Sigma=\alpha$ και $A\hat{\Gamma}\Sigma=A\hat{B}\Sigma=\beta$.

Στη ΒΣ παίρνουμε σημείο Μ τέτοιο, ώστε $B\hat{E}M=\alpha$. Επειδή $BE=A\Gamma$, προκύπτει ότι $\overset{\Delta}{BEM}=\overset{\Delta}{\Gamma A\Sigma}$. Επομένως:



$$BM=\Gamma\Sigma \quad \text{και} \quad ME=\Sigma A \quad (1)$$

Ας παρατηρήσουμε τα τρίγωνα ΡΜΕ και ΔΒΕ. Επειδή:

$$\Delta\hat{E}P=\Delta\hat{B}P=\alpha$$

είναι:

- $M\hat{E}P=M\hat{E}\Delta+\alpha=M\hat{E}\Delta+M\hat{E}B=B\hat{E}\Delta=B\hat{\Delta}E$
- $P\hat{M}E=M\hat{B}E+M\hat{E}B=\beta+\alpha=\Delta\hat{B}E$

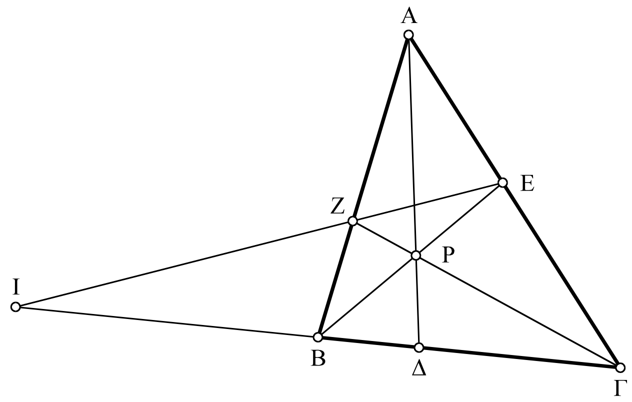
Τα τρίγωνα λοιπόν ΡΜΕ και ΔΒΕ είναι όμοια. Επειδή το $\overset{\Delta}{\Delta BE}$ είναι ισοσκελές, είναι και το $\overset{\Delta}{PME}$ ισοσκελές, οπότε $MP=ME$. Άρα:

$$\Sigma\Gamma + \Sigma A \overset{(1)}{=} BM + ME = BM + MP = BP$$

1.11 **Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, σημείο Δ στην πλευρά ΒΓ, με $\Gamma\Delta = 2\Delta B$, και σημείο Ρ του τμήματος ΑΔ. Οι ΒΡ, ΓΡ τέμνουν τις ΑΓ, ΑΒ στα σημεία Ε, Ζ αντίστοιχα. Αν η ευθεία ΕΖ τέμνει τη ΒΓ στο Ι, να αποδειχθεί ότι $BI = B\Gamma$.**

Λύση

Το θεώρημα Cevà στο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ δίνει:



$$\frac{\Delta\Gamma}{\Delta B}\cdot\frac{ZB}{ZA}\cdot\frac{EA}{E\Gamma} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{ZA}{ZB}\cdot\frac{E\Gamma}{EA} = 2 \qquad (1)$$

Το θεώρημα Μενελάου στο τρίγωνο ΑΒΓ, με τέμνουσα τη ΙΖΕ, δίνει:

$$\frac{I\Gamma}{IB}\cdot\frac{ZB}{ZA}\cdot\frac{EA}{E\Gamma} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{I\Gamma}{IB} = \frac{ZA}{ZB}\cdot\frac{E\Gamma}{EA} \qquad (2)$$

Οι (1) και (2) δίνουν:

$$\frac{I\Gamma}{IB} = 2 \Leftrightarrow I\Gamma = 2IB$$

Άρα το Β είναι μέσο του ΙΓ.

Άλλος τρόπος

Στο πλήρες τετράπλευρο ΑΖΡΕΒΓ, η διαγώνιος ΒΓ διαιρείται αρμονικά από τις ΑΡ και ΖΕ. Άρα η σημειοσειρά (Γ, B, Δ, I) είναι αρμονική. Έτσι:

$$\frac{IB}{I\Gamma} = \frac{\Delta B}{\Delta\Gamma} = \frac{1}{2}$$

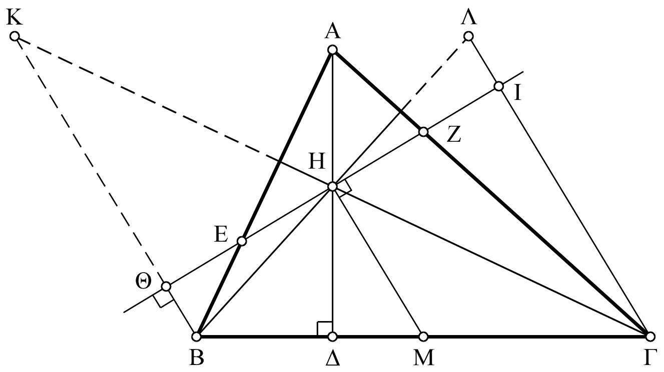
δηλαδή $I\Gamma = 2IB$, που σημαίνει ότι το Β είναι μέσο του ΙΓ.

Σημείωση

Το πρόβλημα θα μπορούσε να δοθεί και ως εξής. Αν το Ρ μεταβάλλεται πάνω στην ΑΔ, τότε η ΖΕ διέρχεται από σταθερό σημείο.

1.12 **Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, το ορθόκεντρο Η και το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ. Μια ευθεία που διέρχεται από το Η και είναι κάθετη στην ΗΜ τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε, Ζ. Να αποδειχθεί ότι $\mathrm{HE}=\mathrm{HZ}$.**

Λύση



Έστω Θ, Ι οι προβολές των Β, Γ πάνω στην ευθεία ΕΖ, Κ το σημείο τομής των ΒΘ, ΓΗ και Λ το σημείο τομής των ΒΗ και ΓΙ. Επειδή ΒΘ, ΜΗ, $\Gamma\mathrm{I}\perp\mathrm{EZ}$ και το Μ είναι μέσο του ΒΓ, το Η είναι μέσο του ΘΙ (από το τραπέζιο ΒΘΙΓ). Άρα $\overset{\Delta}{\mathrm{H\Theta B}}=\overset{\Delta}{\mathrm{HI\Lambda}}$, οπότε $\mathrm{HB}=\mathrm{H\Lambda}$ και $\overset{\Delta}{\mathrm{H\Theta K}}=\overset{\Delta}{\mathrm{HI\Gamma}}$, οπότε $\mathrm{HK}=\mathrm{H\Gamma}$.

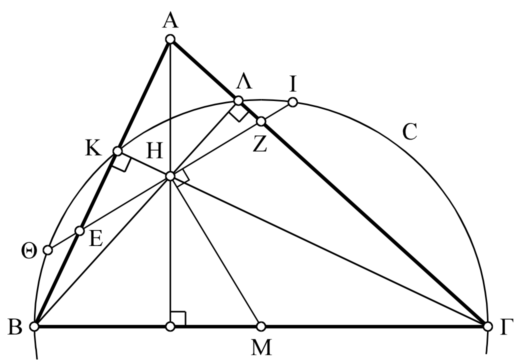
Άρα τα τρίγωνα ΗΒΚ και ΗΓΛ είναι ίσα και επειδή τα Ε, Ζ είναι τα ορθόκεντρα των δύο αυτών τριγώνων, αυτά ισαπέχουν από τις αντίστοιχες κορυφές, δηλαδή το Η. Επομένως $\mathrm{HE}=\mathrm{HZ}$.

Άλλος τρόπος

Είναι $\mathrm{B}\hat{\mathrm{K}}\Gamma=\mathrm{B}\hat{\Lambda}\Gamma=90^{o}$, οπότε το τετράπλευρο ΒΚΛΓ είναι εγγράψιμο. Επειδή:

$$\mathrm{MB}=\mathrm{M\Gamma}=\mathrm{MK}=\mathrm{M\Lambda}$$

(αφού $\mathrm{MK}=\frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}=\mathrm{M\Lambda}$), το κέντρο του κύκλου (Β,Κ,Λ,Γ) είναι το Μ. Αν η ΕΖ τέμνει τον κύκλο C στα Θ, Ι, τότε το Η είναι μέσο του ΘΙ, διότι $\mathrm{MH}\perp\Theta\mathrm{I}$. Εφαρμόζουμε λοιπόν το θεώρημα της πεταλούδας για τη χορδή ΘΙ με μέσο το Η και τέμνουσες τις ΚΓ, ΛΒ, οπότε παίρνουμε ότι $\mathrm{HE}=\mathrm{HZ}$.



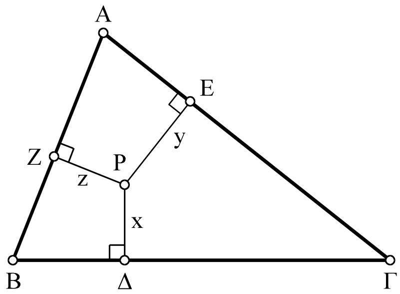
1.13 **Έστω Ρ μεταβλητό σημείο στο εσωτερικό ενός τριγώνου ΑΒΓ και Δ, Ε, Ζ οι προβολές του Ρ στις**

πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ αντίστοιχα. Αν η τιμή της παραστάσεως $S(P)=\frac{B\Gamma}{P\Delta}+\frac{\Gamma A}{PE}+\frac{AB}{PZ}$ είναι η ελάχιστη δυνατή, να αποδειχθεί ότι το Ρ είναι το έγκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.

(IMO – 1981)

Λύση

Ας θέσουμε $P\Delta=x$, $PE=y$, $PZ=z$ και $E=(AB\Gamma)$. Τότε:



$$E=(PB\Gamma)+(P\Gamma A)+(PAB)=\frac{1}{2}(\alpha x+\beta y+\gamma z)$$

δηλαδή $\alpha x+\beta y+\gamma z=2E$.

Από την ανισότητα BCS παίρνουμε:

$$\left(\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{y}+\frac{\gamma}{z}\right)(\alpha x+\beta y+\gamma z)\geq(\alpha+\beta+\gamma)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{y}+\frac{\gamma}{z}\geq\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{2E}$$

Η ελάχιστη λοιπόν τιμή της παράστασης $S(P)=\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{y}+\frac{\gamma}{z}$ είναι η $\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{2E}$ και παρουσιάζεται όταν:

$$\frac{\frac{\alpha}{x}}{\alpha x}=\frac{\frac{\beta}{y}}{\beta y}=\frac{\frac{\gamma}{z}}{\gamma z}\Leftrightarrow\frac{1}{x^2}=\frac{1}{y^2}=\frac{1}{z^2}\Leftrightarrow x=y=z$$

Όταν όμως είναι $x=y=z$, τότε το Ρ ισαπέχει από τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ και (ως εσωτερικό σημείο) είναι το έγκεντρό του.

Σχόλιο

Η ανισότητα Andreescu (ή Cauchy – Bunyakovsky) δίνει:

$$\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{y}+\frac{\gamma}{z}=\frac{\alpha^2}{\alpha x}+\frac{\beta^2}{\beta y}+\frac{\gamma^2}{\gamma z}\geq\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{(\alpha x+\beta y+\gamma z)}=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{2E}$$

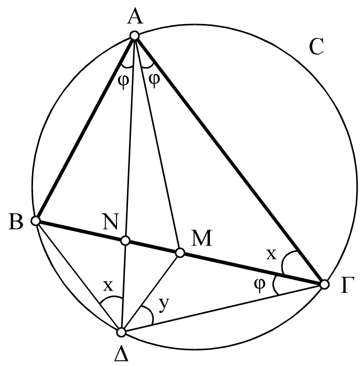
1.14 **Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο C, η διάμεσος ΑΜ και σημείο Ν στην πλευρά ΒΓ, ώστε $N\hat{A}B=M\hat{A}\Gamma$. Η ευθεία ΑΝ τέμνει τον κύκλο C στο Δ. Να αποδειχθεί ότι $B\hat{\Delta}A=\Gamma\hat{\Delta}M$.**

Λύση

Από το θεώρημα Steiner ισχύει:

$$\frac{NB}{N\Gamma}\cdot\frac{MB}{M\Gamma}=\frac{AB^2}{A\Gamma^2}\Leftrightarrow\frac{AB^2}{A\Gamma^2}=\frac{NB}{N\Gamma}$$

Είναι $\overset{\Delta}{B\Delta N}\sim\overset{\Delta}{A\Gamma N}$ και $\overset{\Delta}{\Gamma\Delta N}\sim\overset{\Delta}{ABN}$, οπότε:



$$\frac{\Delta B}{A\Gamma}=\frac{BN}{AN}\quad\text{και}\quad\frac{\Gamma\Delta}{AB}=\frac{\Gamma N}{AN}$$

Επομένως (διαιρώντας) παίρνουμε:

$$\frac{\Delta B}{\Delta\Gamma}=\frac{A\Gamma}{AB}\cdot\frac{BN}{\Gamma N}=\frac{A\Gamma}{AB}\cdot\left(\frac{AB}{A\Gamma}\right)^2=\frac{AB}{A\Gamma}$$

Από τη σχέση αυτή παίρνουμε:

$$\frac{BN}{\Gamma N}=\left(\frac{AB}{A\Gamma}\right)^2=\left(\frac{\Delta B}{\Delta\Gamma}\right)^2=\frac{\Delta B^2}{\Delta\Gamma^2}$$

Άρα (από το θεώρημα Steiner) οι ΔΝ, ΔΜ σχηματίζουν ίσες γωνίες με τις ΔΒ, ΔΓ, δηλαδή $N\hat{\Delta}B=M\hat{\Delta}\Gamma$ ή $B\hat{\Delta}A=\Gamma\hat{\Delta}M$.

1.15 Μια παράλληλη ευθεία προς την πλευρά ΒΓ, τριγώνου ΑΒΓ, τέμνει τις ΑΒ, ΑΓ στα σημεία Μ, Ν αντίστοιχα. Οι ΒΝ, ΓΜ τέμνονται στο Ρ. Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΒΜΡ και ΓΝΡ τέμνονται στο Σ. Να αποδειχθεί ότι $B\hat{A}\Sigma=\Gamma\hat{A}P$.

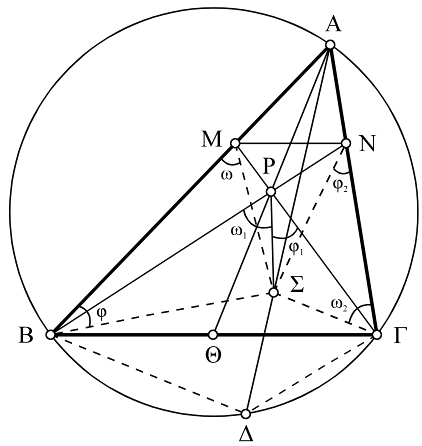
(Βαλκανιάδα – 2009)

Λύση

Έστω ότι η ΑΡ τέμνει τη ΒΓ στο Θ. Από το θεώρημα Cevà παίρνουμε:

$$\frac{\Theta B}{\Theta\Gamma}\cdot\frac{N\Gamma}{NA}\cdot\frac{MA}{MB}=1\Leftrightarrow\frac{\Theta B}{\Theta\Gamma}=1\Leftrightarrow\Theta B=\Theta\Gamma$$

διότι $\frac{N\Gamma}{NA}=\frac{MB}{MA}$, αφού $MN\parallel B\Gamma$.



Από τα σχηματιζόμενα εγγεγραμμένα τετράπλευρα, παίρνουμε:

- $B\hat{M}\Sigma=B\hat{P}\Sigma=\Sigma\hat{\Gamma}N$ $(\omega=\omega_1=\omega_2)$, λόγω των τετραπλεύρων ΒΜΡΣ και ΣΡΝΓ,
- $M\hat{B}\Sigma=\Sigma\hat{P}\Gamma=\Sigma\hat{N}\Gamma$ $(\varphi=\varphi_1=\varphi_2)$, λόγω των ίδιων εγγεγραμμένων τετραπλεύρων.

Επομένως τα τρίγωνα ΣΒΜ και ΣΓΝ είναι όμοια. Αν ΣΚ, ΣΛ είναι οι αποστάσεις του Σ από τις ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα, τότε:

$$\frac{ΣΚ}{ΣΛ}=\frac{ΜΒ}{ΝΓ}=\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$$

διότι ΜΝ // ΒΓ και έτσι:

$$\frac{ΜΒ}{ΑΒ}=\frac{ΝΓ}{ΑΓ}\Leftrightarrow\frac{ΜΒ}{ΝΓ}=\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$$

Άρα η ΑΣ είναι συμμετροδιάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ και αφού η ΑΡ είναι διάμεσος, είναι $Β\hat{Α}Σ = Γ\hat{Α}Ρ$.

Βιβλιογραφία :

Οι ασκήσεις αυτού του άρθρου είναι από το βιβλίο :

Μπάμπης Στεργίου , Γεωμετρία για διαγωνισμούς, τόμος 2,

Εκδόσεις Σαββάλας – 2012