Γεωμετρία

ΓΙΑ ΘΑΛΗ - ΕΥΚΛΕΙΔΗ

Β΄ και Γ΄ Λυκείου

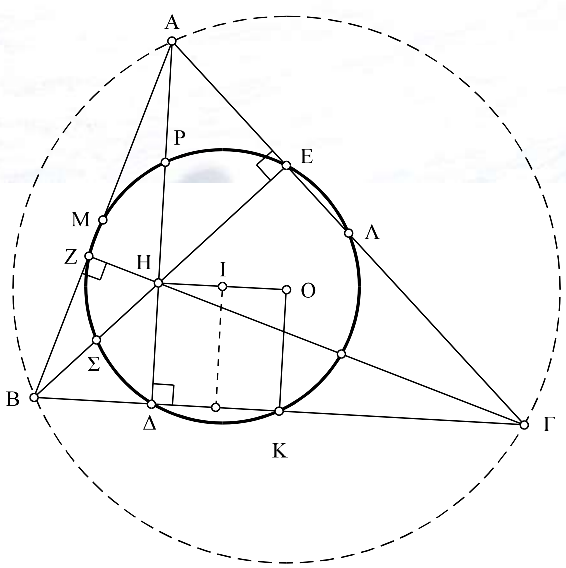
Σιλουανός Μπραζιτίκος - Μπάμπης Στεργίου

Α. Χρήσιμα Θεωρήματα και Προτάσεις

Θεώρημα 1ο

Σε κάθε τρίγωνο, τα μέσα των πλευρών του, τα ίχνη των υψών του και τα μέσα των τμημάτων που συνδέουν το ορθόκεντρο με τις κορυφές του τριγώνου είναι ομοκυκλικά σημεία.

(Κύκλος του Euler)



Σχόλια

- *Ο κύκλος που διέρχεται από τα 9 αυτά σημεία, λέγεται **κύκλος του Euler.***
- *Το κέντρο του κύκλου του Euler είναι το μέσο Ι του τμήματος που συνδέει το ορθόκεντρο Η με το περίκεντρο Ο του τριγώνου ΑΒΓ. Αυτό συμβαίνει διότι, για παράδειγμα, η μεσοκάθετος της χορδής ΔΚ του κύκλου του Euler διέρχεται από το μέσο Ι της μη παράλληλης πλευράς ΟΗ του τραπεζίου ΗΔΚΟ (ΗΔ // ΟΚ, διότι ΗΔ,* $OK \perp B\Gamma$).
- *Η ακτίνα του κύκλου του Euler είναι ίση με το μισό της ακτίνας R του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.*

  Πραγματικά, από το τρίγωνο ΗΟΑ προκύπτει ότι:

$$R_9 = IP = \frac{OA}{2} \Leftrightarrow IP = \frac{R}{2}$$

  Αλλά η ΙΡ είναι ακτίνα του κύκλου του Euler και έτσι ο ισχυρισμός μας αποδείχθηκε.

Εφαρμογή 1

Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία Α και Β. Έστω ΓΔ μια κοινή εφαπτομένη των δύο κύκλων έτσι, ώστε το Β να είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου ΑΓΔ. Αν Η είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΓΔ, να αποδειχθεί ότι $HB \perp AB$.

Λύση

Έστω Ε, Ζ, Μ, Ν τα μέσα των ΑΓ, ΑΔ, ΑΗ, ΑΒ αντίστοιχα. Έστω επίσης ότι η ΑΒ τέμνει τη ΓΔ στο Κ. Τότε:

$$K\Gamma^2 = KB \cdot KA = K\Delta^2 \Leftrightarrow K\Gamma = K\Delta$$

Επειδή ΕΝ // ΓΒ και ΝΖ // ΒΔ, είναι:

$$E\hat{N}Z = \Gamma\hat{B}\Delta = 180^o - x - y = 180^o - (x+y) = 180^o - \hat{A} = 180^o - E\hat{K}Z$$

διότι το ΑΕΚΖ είναι παραλληλόγραμμο. Είναι λοιπόν:

$$E\hat{N}Z + E\hat{K}Z = 180^o$$

οπότε το τετράπλευρο ΝΕΚΖ είναι εγγράψιμο. Έτσι, ο κύκλος που διέρχεται από τα μέσα Κ, Ε, Ζ των πλευρών του τριγώνου ΑΓΔ διέρχεται από το Ν. Αλλά ο κύκλος (Κ,Ε,Ζ) διέρχεται από το ίχνος Λ του ύψους ΑΛ και από το μέσο Μ του ΑΗ, διότι είναι ο κύκλος Euler του τριγώνου ΑΓΔ. Επειδή $M\hat{A}K = 90^o$, είναι και $M\hat{N}K = 90^o$. Αλλά ΜΝ // ΗΒ, οπότε $HB \perp AB$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Θεώρημα 2ο

Οι προβολές τυχαίου σημείου του περιγεγραμμένου κύκλου ενός τριγώνου πάνω στις πλευρές του τριγώνου αυτού, είναι συνευθειακά σημεία.

(Ευθεία Simson)

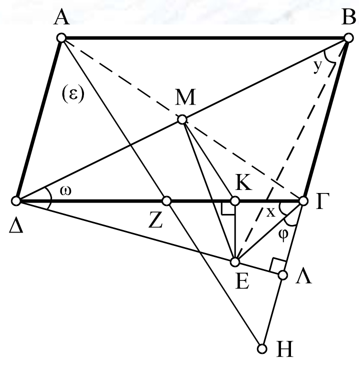
Εφαρμογή 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και μια ευθεία (ε), που τέμνει την πλευρά ΓΔ στο Ζ και την ευθεία ΒΓ στο Η. Αν Ε είναι το περίκεντρο του τριγώνου ΓΖΗ και το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι εγγράψιμο, να αποδειχθεί ότι η (ε) είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

(ΙΜΟ – 2007)

Λύση

Αν $EK \perp Z\Gamma$ και $E\Lambda \perp \Gamma H$, τότε τα Κ, Λ είναι μέσα των ΓΖ, ΓΗ αντίστοιχα. Έτσι, στο τρίγωνο ΓΑΗ, η ΚΛ περνάει από το μέσο Μ του ΑΓ (αφού ΚΛ // ΑΗ). Στο τρίγωνο ΒΔΓ, η ευθεία ΚΛ είναι η ευθεία Simson για το Ε, οπότε θα είναι $EM \perp B\Delta$. Επειδή το Μ είναι μέσο του ΒΔ και $EM \perp B\Delta$, θα είναι $EB = E\Delta$. Επομένως:



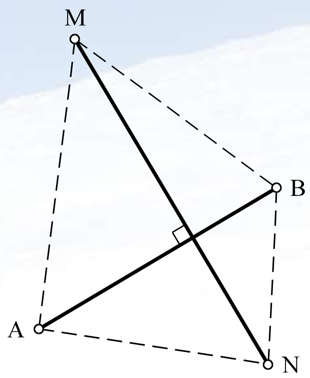
- $E\hat{B}\Delta = E\hat{\Delta}B \quad (y = \omega)$,

- $E\hat{B}\Delta = E\hat{\Gamma}\Delta \quad (y = x)$, από το εγγράψιμο ΒΓΕΔ,

- $E\hat{\Delta}B = E\hat{\Gamma}\Lambda \quad (\omega = \varphi)$, από το εγγράψιμο ΒΓΕΔ.

Άρα $y = \omega$, $y = x$ και $\omega = \varphi$, δηλαδή $x = \varphi$. Επειδή το Ε είναι περίκεντρο του $\overset{\Delta}{\Gamma H Z}$ και $E\hat{\Gamma}Z = E\hat{\Gamma}H$ $(x = \varphi)$, το τρίγωνο $\overset{\Delta}{\Gamma Z H}$ είναι ισοσκελές. Άρα $\Gamma\hat{Z}H = \Gamma\hat{H}Z$, δηλαδή $B\hat{A}H = \Delta\hat{A}H$.

Θεώρημα 3ο (Συνθήκη Καθετότητας)



Ορισμένα θέματα καθετότητας αντιμετωπίζονται μετρικά, δηλαδή με τη βοήθεια μετρικών σχέσεων. Για την απόδειξη τέτοιων θεμάτων, εκτός από το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος ή τον συνδυασμό άλλων θεωρημάτων, χρησιμοποιούμε και την εξής θεμελιώδη **πρόταση**:

Τα τμήματα ΜΝ και ΑΒ είναι κάθετα, αν και μόνο αν ισχύει η σχέση:

$$\mathbf{MA^2 - MB^2 = NA^2 - NB^2}$$

Εφαρμογή 3

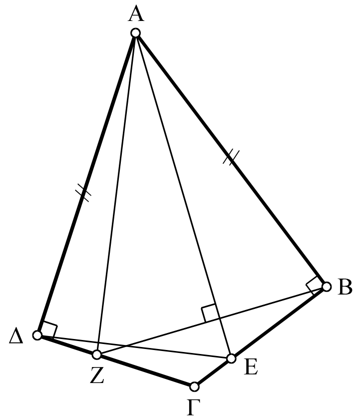
Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ, με $AB = A\Delta$ και $\hat{B} = \hat{\Delta} = 90^o$. Έστω σημείο Ε στην πλευρά ΓΒ και σημείο Ζ στην πλευρά ΓΔ, ώστε $AE \perp BZ$. Να αποδειχθεί ότι $AZ \perp \Delta E$.

(Ρωσία – 1995)

Λύση

Για να είναι $AZ \perp \Delta E$, αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$AE^2 - A\Delta^2 = ZE^2 - Z\Delta^2 \qquad (1)$$



Όμως $AE \perp BZ$, οπότε:

$$AZ^2 - AB^2 = EZ^2 - EB^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A\Delta^2 + \Delta Z^2 - AB^2 = EZ^2 - (AE^2 - AB^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta Z^2 = EZ^2 - AE^2 + AB^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AE^2 - AB^2 = ZE^2 - \Delta Z^2 \overset{AB=A\Delta}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow AE^2 - A\Delta^2 = ZE^2 - Z\Delta^2$$

Αποδείχθηκε λοιπόν η (1), οπότε $AZ \perp \Delta E$.

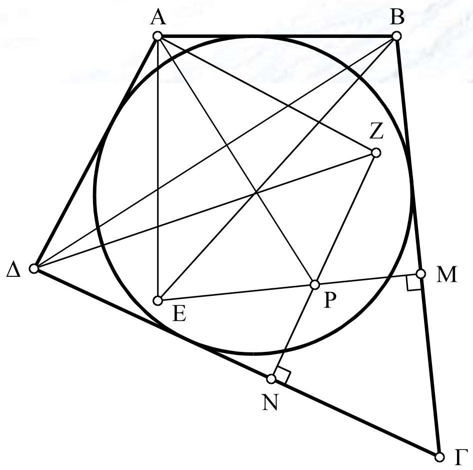
Εφαρμογή 4

Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ περιγεγραμμένο σε κύκλο. Οι κάθετες από το Α προς τις ΑΒ, ΑΔ τέμνουν τις διχοτόμους των γωνιών $\hat{B}$, $\hat{\Delta}$ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Η κάθετη από το Ε προς τη ΒΓ και η κάθετη από το Ζ προς τη ΓΔ τέμνονται στο σημείο Ρ. Να αποδειχθεί ότι $AP \perp B\Delta$.

Λύση

Αφού το Ε είναι σημείο της διχοτόμου της γωνίας $\hat{B}$, $EA \perp AB$ και $EP \perp B\Gamma$, είναι $BA = BM$. Για τον ίδιο λόγο, αφού το Ζ είναι σημείο της διχοτόμου της $\hat{\Delta}$, $ZA \perp A\Delta$ και $ZP \perp \Gamma\Delta$, είναι $\Delta A = \Delta N$.

Για να είναι $AP \perp B\Delta$, αρκεί να ισχύει ότι:



$$BP^2 - BA^2 = \Delta P^2 - \Delta A^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow BP^2 - BM^2 = \Delta P^2 - \Delta N^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow PM^2 = PN^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\Gamma^2 - \Gamma M^2 = P\Gamma^2 - \Gamma N^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Gamma M^2 = \Gamma N^2 \Leftrightarrow \Gamma M = \Gamma N \qquad (1)$$

Όμως το ΑΒΓΔ είναι περιγεγραμμένο σε κύκλο, οπότε:

$$ΑΒ + ΓΔ = ΒΓ + ΑΔ \quad (2)$$

Άρα έχουμε:

$$ΓΜ = ΓΒ - ΜΒ = ΓΒ - ΑΒ \overset{(2)}{=} ΓΔ - ΑΔ = ΓΔ - ΔΝ = ΓΝ$$

Ισχύει λοιπόν η (1), οπότε πράγματι είναι $ΑΡ \perp ΒΔ$.

Θεώρημα 4ο

Αν οι χορδές $ΑΒ, ΓΔ$ ενός κύκλου ή οι προεκτάσεις τους τέμνονται σ' ένα σημείο Σ, τότε ισχύει ότι

$$ΣΑ \cdot ΣΒ = ΣΓ \cdot ΣΔ .$$

Θεώρημα 5ο

Δίνεται κύκλος (Ο, R) και ένα σημείο Σ που δεν ανήκει στον κύκλο.

α) Αν το σημείο Σ είναι εξωτερικό του κύκλου και $ΣΑΒ$ είναι τυχαία τέμνουσα, τότε

$ΣΑ \cdot ΣΒ = ΣΟ^2 - R^2$.

β) Αν το σημείο Σ είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου και $ΑΣΒ$ είναι χορδή του κύκλου, τότε

$ΣΑ \cdot ΣΒ = R^2 - ΣΟ^2$.

Θεώρημα 6ο

Από σημείο Σ εκτός κύκλου φέρνουμε το εφαπτόμενο τμήμα $ΣΕ$ και μια τέμνουσα ΣΑΒ. Τότε

$$ΣΑ \cdot ΣΒ = ΣΕ^2 .$$

Θεώρημα 7ο

Αν δ_α, δ_β, δ_γ είναι οι διχοτόμοι ενός τριγώνου ΑΒΓ, τότε ισχύουν οι σχέσεις:

$$\delta_\alpha = \frac{2}{\beta+\gamma}\sqrt{\beta\gamma\tau(\tau-\alpha)}\,,\quad \delta_\beta = \frac{2}{\alpha+\gamma}\sqrt{\alpha\gamma\tau(\tau-\beta)}\,,\quad \delta_\gamma = \frac{2}{\alpha+\beta}\sqrt{\alpha\beta\tau(\tau-\gamma)}$$

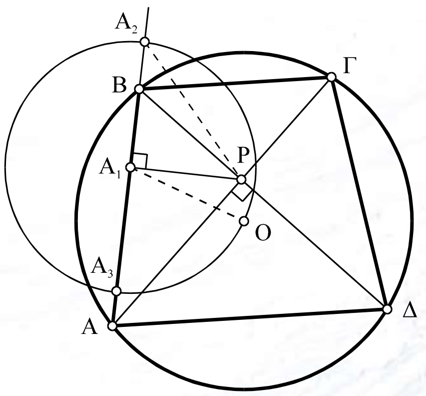
όπου $\tau = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)$ η ημιπερίμετρος του τριγώνου.

Εφαρμογή 5

Ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ με κάθετες διαγώνιες είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο Ο. Οι διαγώνιες ΑΓ, ΒΔ τέμνονται στο σημείο Ρ. Ονομάζουμε A_1, B_1, Γ_1, Δ_1 τις προβολές του Ρ στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Οι κύκλοι με κέντρα τα σημεία A_1, B_1, Γ_1, Δ_1 και ακτίνες A_1O, B_1O, Γ_1O, Δ_1O αντίστοιχα, τέμνουν τις ευθείες ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ στα ζεύγη των σημείων (A_2, A_3), (B_2, B_3), (Γ_2, Γ_3), (Δ_2, Δ_3) αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι τα σημεία A_2, A_3, B_2, B_3, Γ_2, Γ_3, Δ_2, Δ_3 είναι ομοκυκλικά.

Λύση

Εύκολα συμπεραίνουμε ότι το κέντρο του κύκλου που θα βρίσκονται τα A_2, A_3, B_2, B_3, Γ_2, Γ_3, Δ_2, Δ_3 είναι το σημείο Ρ. Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι:



$$PA_2 = PA_3 = PB_2 = PB_3 =$$

$$= P\Gamma_2 = P\Gamma_3 = P\Delta_2 = P\Delta_3$$

δηλαδή να αποδείξουμε ότι $PA_2 = ct$, όπου ct είναι μια σταθερά. Είναι όμως:

$$PA_2^2 = PA_1^2 + A_1A_2^2 = A_1A \cdot A_1B + A_1O^2 =$$

$$= (R^2 - A_1O^2) + A_1O^2 = R^2$$

διότι από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΡΒ παίρνουμε $PA_1^2 = A_1A \cdot A_1B$ και από τη δύναμη του A_1 ως προς τον (Ο) είναι:

$$A_1A \cdot A_1B = R^2 - A_1O^2$$

όπου R είναι η ακτίνα του κύκλου (Ο). Είναι λοιπόν $PA_2^2 = R^2$, δηλαδή $PA_2 = R$. Όλα λοιπόν τα σημεία A_2, A_3, B_2, B_3, Γ_2, Γ_3, Δ_2, Δ_3 βρίσκονται στον κύκλο (P, R).

Θεώρημα 8ο

Τα σημεία του επιπέδου τα οποία έχουν ίσες δυνάμεις ως προς δύο μη ομόκεντρους κύκλους ανήκουν σε μια ευθεία, κάθετη στη διάκεντρο των δύο αυτών κύκλων.

Σημείωση

Αποδεικνύεται ακόμα ότι και κάθε σημείο της ευθείας αυτής έχει ίσες δυνάμεις ως προς τους δύο κύκλους. Η ευθεία αυτή λέγεται **ριζικός άξονας** των δύο κύκλων. Επομένως:

Ο ριζικός άξονας είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που έχουν ίσες δυνάμεις ως προς δύο μη ομόκεντρους κύκλους.

Θεώρημα 9ο

Οι ριζικοί άξονες τριών κύκλων, των οποίων τα κέντρα δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, διέρχονται από το ίδιο σημείο (συντρέχουν).

Ορισμός

Το σημείο στο οποίο συντρέχουν οι ριζικοί άξονες τριών κύκλων, των οποίων τα κέντρα δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, λέγεται **ριζικό κέντρο** των τριών αυτών κύκλων.

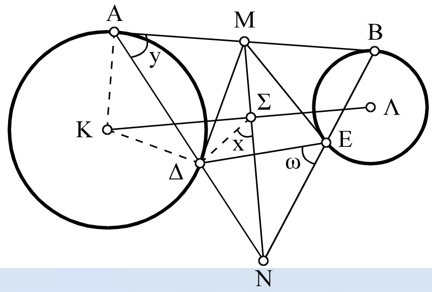
Εφαρμογή 6

Έστω AB η κοινή εφαπτομένη δύο κύκλων (K, R_1) και (Λ, R_2), οι οποίοι δεν τέμνονται (τα Α, Β βρίσκονται στους κύκλους (K, R_1), (Λ, R_2) αντίστοιχα). Από το μέσο Μ του ΑΒ φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΜΔ, ΜΕ προς τους κύκλους (Κ), (Λ) αντίστοιχα. Οι ευθείες ΑΔ, ΒΕ τέμνονται στο Ν. Η ΜΝ

τέμνει την ΚΛ στο Σ. Να αποδειχθεί ότι τα σημεία Δ, Ε, Σ, Ν είναι ομοκυκλικά.

Λύση

Αφού $MA = MB$, $MA = M\Delta$ και $MB = ME$, θα είναι:



$$MA = M\Delta = ME = MB$$

Άρα τα σημεία Α, Δ, Ε, Β είναι ομοκυκλικά και έτσι:

$$N\Delta \cdot NA = NE \cdot NB \quad (1)$$

Το Ν βρίσκεται λοιπόν στον ριζικό άξονα των κύκλων (Κ) και (Λ). Αλλά $MA = MB$, οπότε το Μ βρίσκεται επίσης στον ριζικό άξονα των κύκλων (Κ) και (Λ). Επομένως $MN \perp K\Lambda$. Επειδή:

$$K\hat{A}M = K\hat{\Delta}M = K\hat{\Sigma}M = 90^o$$

τα σημεία Α, Κ, Δ, Σ, Μ είναι ομοκυκλικά.

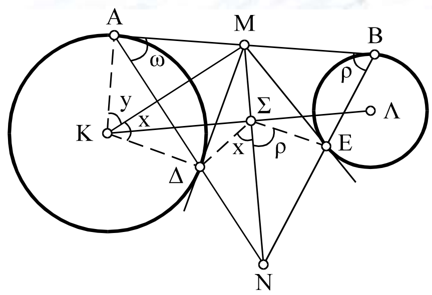
Επομένως:

- Το ΑΔΣΜ είναι εγγράψιμο, οπότε $\Delta\hat{\Sigma}N = \Delta\hat{A}M \quad (x = y)$.
- Το ΑΔΕΒ είναι εγγράψιμο, οπότε $\Delta\hat{A}B = \Delta\hat{E}N \quad (y = \omega)$.

Αφού $x = \omega$, το τετράπλευρο ΔΣΕΝ είναι εγγράψιμο.

Άλλος τρόπος

Επειδή $KM \perp AN$, είναι:



$$NK^2 - NM^2 = AK^2 - AM^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow NK^2 = NM^2 + AK^2 - AM^2$$

Επειδή $M\Lambda \perp NB$, είναι:

$$N\Lambda^2 - NM^2 = B\Lambda^2 - BM^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow N\Lambda^2 = NM^2 + B\Lambda^2 - BM^2$$

Θα αποδείξουμε ότι $K\Lambda \perp MN$. Για να είναι $K\Lambda \perp MN$, αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$NK^2 - N\Lambda^2 = MK^2 - M\Lambda^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (NM^2 + AK^2 - AM^2) - (NM^2 + B\Lambda^2 - BM^2) = (MA^2 + AK^2) - (MB^2 + B\Lambda^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AK^2 - B\Lambda^2 = AK^2 - B\Lambda^2$$

η οποία ισχύει. Άρα πραγματικά είναι $MN \perp K\Lambda$.

Από το εγγράψιμο ΚΔΣΜ παίρνουμε:

$$\Delta\hat{\Sigma}N = \Delta\hat{K}M = M\hat{K}A = N\hat{A}M \quad (x = y = \omega)$$

Όμοια είναι και $E\hat{\Sigma}N = N\hat{B}M = \rho$, οπότε:

$$\Delta\hat{\Sigma}E = \Delta\hat{\Sigma}N + E\hat{\Sigma}N = N\hat{A}B + N\hat{B}A = 180^o - \hat{N}$$

δηλαδή $\Delta\hat{\Sigma}E + \hat{N} = 180^o$. Άρα το ΔΣΕΝ είναι εγγράψιμο.

Σχόλιο

Αφού τα Α, Δ, Ε, Β είναι ομοκυκλικά, παίρνουμε:

$$NK^2 - KA^2 = N\Delta \cdot NA = NE \cdot NB = N\Lambda^2 - \Lambda B^2$$

οπότε

$$NK^2 - N\Lambda^2 = KA^2 - \Lambda B^2 = (KM^2 - AM^2) - (\Lambda M^2 - MB^2) = KM^2 - \Lambda M^2$$

και έτσι $K\Lambda \perp MN$.

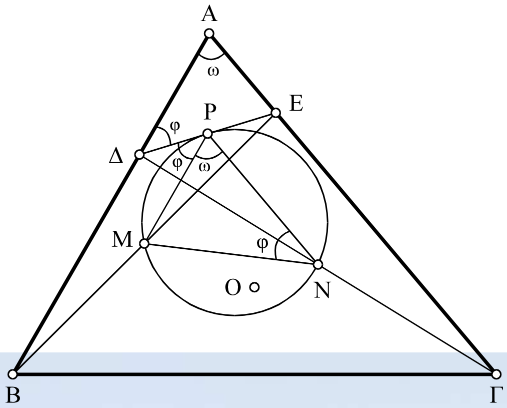
Εφαρμογή 7

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ, Ε των πλευρών ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Αν Μ είναι το μέσο του ΒΕ, Ν το μέσο του ΓΔ, Ρ το μέσο του ΔΕ και ο κύκλος (Μ,Ν,Ρ), που διέρχεται από τα Μ, Ν, Ρ, εφάπτεται με τη ΔΕ, να αποδειχθεί ότι $O\Delta = OE$, όπου Ο είναι το περίκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.

(ΙΜΟ – 2009)

Λύση

Αφού τα M, N , P είναι μέσα των BE, ΓΔ, ΔE, είναι PM // ΔB και PN // AΓ. Άρα:



$$M\hat{P}N = \hat{A} \quad \text{και} \quad P\hat{N}M = M\hat{P}\Delta = A\hat{\Delta}E$$

Τα τρίγωνα λοιπόν AΔE, PMN είναι όμοια, οπότε:

$$\frac{A\Delta}{PN} = \frac{AE}{PM} \Leftrightarrow A\Delta \cdot PM = AE \cdot PN \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A\Delta \cdot \frac{\Delta B}{2} = AE \cdot \frac{E\Gamma}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A\Delta \cdot \Delta B = AE \cdot E\Gamma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow R^2 - O\Delta^2 = R^2 - OE^2 \Leftrightarrow O\Delta = OE$$

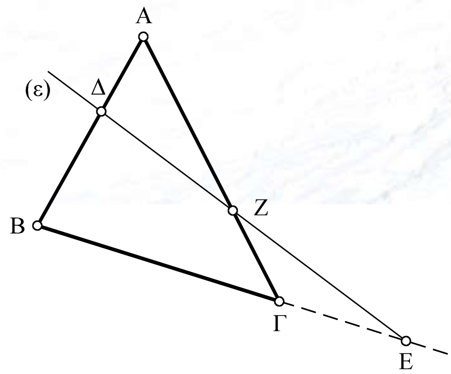
διότι από το θεώρημα της δύναμης σημείου για τα σημεία Δ, E ισχύει ότι:

$$\Delta A \cdot \Delta B = R^2 - O\Delta^2 \quad \text{και} \quad EA \cdot EB = R^2 - OE^2$$

όπου βέβαια R είναι η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABΓ.

Θεώρημα 10ο (Μενελάου)

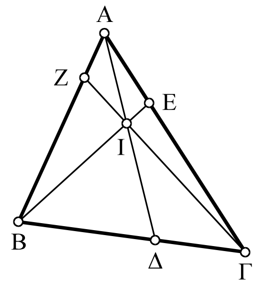
Αν μια ευθεία (ε) τέμνει τις πλευρές AB, BΓ, AΓ (ή τις προεκτάσεις τους) στα σημεία Δ, E και Z, τότε:



$$\frac{\Delta A}{\Delta B} \cdot \frac{EB}{E\Gamma} \cdot \frac{Z\Gamma}{ZA} = 1$$

Αντιστρόφως, αν ισχύει η παραπάνω σχέση και το ένα τουλάχιστον από τα Δ, E, Z βρίσκεται πάνω στην προέκταση μιας πλευράς, τότε τα σημεία Δ, E, Z βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

Θεώρημα 11ο (Cevá)



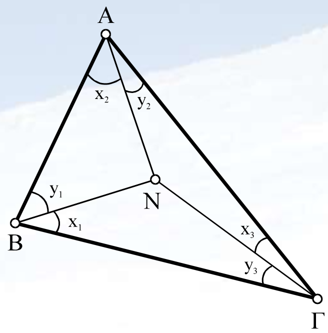
Αν Ι είναι εσωτερικό σημείο ενός τριγώνου ΑΒΓ και οι ευθείες ΑΙ, ΒΙ, ΓΙ τέμνουν τις (απέναντι) πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ στα σημεία Δ, Ε, Ζ αντίστοιχα, τότε:

$$\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma}\cdot\frac{E\Gamma}{EA}\cdot\frac{ZA}{ZB}=1$$

και αντιστρόφως.

Θεώρημα 12ο

(Τριγωνομετρική μορφή Cevá)



Αν στο εσωτερικό ενός τριγώνου ΑΒΓ θεωρήσουμε σημείο Ν, τότε ισχύει:

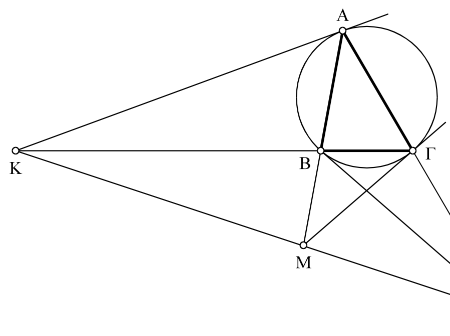
$$\frac{\eta\mu N\hat{B}\Gamma}{\eta\mu N\hat{B}A}\cdot\frac{\eta\mu N\hat{A}B}{\eta\mu N\hat{A}\Gamma}\cdot\frac{\eta\mu N\hat{\Gamma}A}{\eta\mu N\hat{\Gamma}B}=1$$

Εφαρμογή 8

Δίνεται σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο. Οι εφαπτομένες του κύκλου στα σημεία Α, Β, Γ τέμνουν τις ευθείες των απέναντι πλευρών στα σημεία Κ, Λ, Μ. Να αποδειχθεί ότι τα σημεία Κ, Λ, Μ είναι συνευθειακά.

(Σιγκαπούρη – 1989)

Λύση



Σύμφωνα με το αντίστροφο του θεωρήματος Μενελάου για το τρίγωνο ΑΒΓ, αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\frac{KB}{K\Gamma}\cdot\frac{\Lambda\Gamma}{\Lambda A}\cdot\frac{MA}{MB}=1$$

Όμως $\overset{\Delta}{K A B} \sim \overset{\Delta}{K A \Gamma}$, αφού η $A\hat{K}\Gamma$ είναι κοινή και $K\hat{A}B = K\hat{\Gamma}A$. Επομένως:

$$\frac{KA}{K\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{KB}{KA} \Leftrightarrow \left(\frac{KA}{K\Gamma} = \frac{\gamma}{\beta} \quad \text{και} \quad \frac{KB}{KA} = \frac{\gamma}{\beta} \right)$$

Οι δύο τελευταίες σχέσεις, με πολλαπλασιασμό, δίνουν:

$$\frac{KA}{K\Gamma} \cdot \frac{KB}{KA} = \frac{\gamma^2}{\beta^2} \Leftrightarrow \frac{KB}{K\Gamma} = \frac{\gamma^2}{\beta^2}$$

Χωρίς δυσκολία τώρα (εντελώς ανάλογα ή κυκλικά) παίρνουμε:

$$\frac{\Lambda\Gamma}{\Lambda A} = \frac{\alpha^2}{\gamma^2} \quad \text{και} \quad \frac{MA}{MB} = \frac{\beta^2}{\alpha^2}$$

Άρα:

$$\frac{KB}{K\Gamma} \cdot \frac{\Lambda\Gamma}{\Lambda A} \cdot \frac{MA}{MB} = \frac{\gamma^2}{\beta^2} \cdot \frac{\alpha^2}{\gamma^2} \cdot \frac{\beta^2}{\alpha^2} = 1$$

Εφαρμογή 9

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διάμεσος ΑΜ, το βαρύκεντρο Θ και η ευθεία από το Θ, παράλληλη προς τη ΒΓ, που τέμνει τις ΑΒ, ΑΓ στα σημεία Δ, Ε αντίστοιχα. Οι ΒΘ, ΓΔ τέμνονται στο Κ και οι ΓΘ, ΒΕ τέμνονται στο Λ. Να αποδειχθεί ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ είναι όμοια.

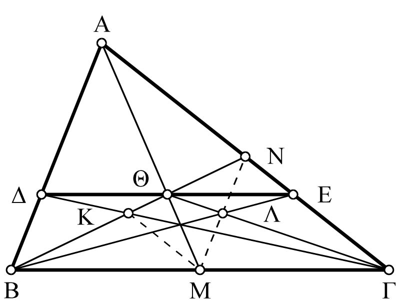
(Asian Pacific MO – 1991)

Λύση

Έστω ΒΝ μια ακόμη διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ. Αφού ΔΕ // ΒΓ και $MB = M\Gamma$, είναι και $\Theta\Delta = \Theta E$.

Έτσι:

$$\frac{K\Theta}{KB} = \frac{\Theta\Delta}{B\Gamma} = \frac{\Theta E}{B\Gamma} = \frac{\Theta\Lambda}{\Lambda\Gamma}$$



διότι $\overset{\Delta}{K\Delta\Theta} \sim \overset{\Delta}{KB\Gamma}$ και $\overset{\Delta}{\Lambda\Theta E} \sim \overset{\Delta}{\Lambda B\Gamma}$. Αφού $\frac{K\Theta}{KB} = \frac{\Theta\Lambda}{\Lambda\Gamma}$,

συμπεραίνουμε ότι στο τρίγωνο ΘΒΓ θα είναι

ΚΛ // ΒΓ. Θα αποδείξουμε τώρα ότι τα σημεία Μ, Λ, Ν είναι συνευθειακά.

Επειδή $\frac{ΘΒ}{ΘΝ}=\frac{ΕΓ}{ΕΝ}$, είναι:

$$\frac{ΜΒ}{ΜΓ}\cdot\frac{ΕΓ}{ΕΝ}\cdot\frac{ΘΝ}{ΘΒ}=1$$

Σύμφωνα λοιπόν με το αντίστροφο του θεωρήματος Cevá παίρνουμε ότι οι ΝΜ, ΒΕ, ΓΘ συντρέχουν. Αφού ΜΝ // ΑΒ, είναι και ΜΛ // ΑΒ. Όμοια είναι και ΜΚ // ΑΓ, οπότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ έχουν τις πλευρές τους παράλληλες. Συνεπώς αυτά είναι όμοια.

Θεώρημα 13ο (Leibniz)

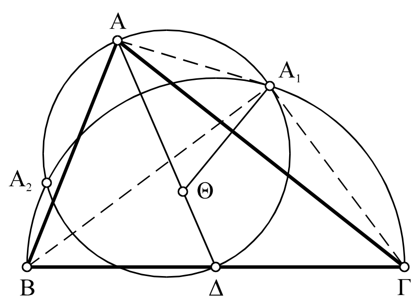
Αν Σ είναι τυχαίο σημείο του επιπέδου ενός τριγώνου ΑΒΓ με βαρύκεντρο Θ, τότε ισχύει ότι

$ΣΑ^2+ΣΒ^2+ΣΓ^2=3ΣΘ^2+\frac{1}{3}(α^2+β^2+γ^2)$.

Εφαρμογή 10

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και οι διάμεσοι ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ. Ο κύκλος διαμέτρου ΑΔ τέμνει τον κύκλο διαμέτρου ΒΓ στα σημεία A_1, A_2. Ο κύκλος διαμέτρου ΒΕ και ο κύκλος διαμέτρου ΑΓ τέμνονται στα σημεία B_1, B_2, ενώ ο κύκλος διαμέτρου ΓΖ και ο κύκλος διαμέτρου ΑΒ τέμνονται στα σημεία $Γ_1$, $Γ_2$. Να αποδειχθεί ότι τα σημεία A_1, A_2, B_1, B_2, $Γ_1$, $Γ_2$ είναι ομοκυκλικά.

Λύση



Το κέντρο του ζητούμενου κύκλου θα βρίσκεται στις μεσοκαθέτους των A_1A_2, B_1B_2, $Γ_1Γ_2$, δηλαδή θα είναι το βαρύκεντρο Θ του τριγώνου ΑΒΓ, διότι π.χ. η ΑΔ είναι η διακεντρική ευθεία των δύο κύκλων (το ένα κέντρο είναι το Δ και το άλλο είναι το μέσο του ΑΔ).

Θα αποδείξουμε λοιπόν ότι $ΘA_1=ΘA_2=ΘB_1=ΘB_2=ΘΓ_1=ΘΓ_2$.

Για το σημείο A_1 και το τρίγωνο ΑΒΓ το θεώρημα Leibniz δίνει:

$$A_1A^2 + A_1B^2 + A_1\Gamma^2 = 3A_1\Theta^2 + \frac{1}{3}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (A\Delta^2 - A_1\Delta^2) + B\Gamma^2 = 3A_1\Theta^2 + \frac{1}{3}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4} - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \alpha^2 = 3A_1\Theta^2 + \frac{1}{3}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3A_1\Theta^2 = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - 2\alpha^2 + 4\alpha^2}{4} - \frac{1}{3}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3A_1\Theta^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{2} - \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{3} \Leftrightarrow A_1\Theta^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{12} = \mathrm{ct}$$

Είναι λοιπόν:

$$A_1\Theta^2 = A_2\Theta^2 = B_1\Theta^2 = B_2\Theta^2 = \Gamma_1\Theta^2 = \Gamma_2\Theta^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{12}$$

οπότε τα σημεία A_1, A_2, B_1, B_2, Γ_1, Γ_2 ισαπέχουν από το Θ και έτσι είναι ομοκυκλικά.

Σχόλιο

Θυμίζουμε ότι:

$$A\Delta^2 = \mu_\alpha^2 = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - 2\alpha^2}{4}$$

Γράφουμε επίσης ότι $A_1B^2 + A_1\Gamma^2 = B\Gamma^2$, *διότι το τρίγωνο* $A_1B\Gamma$ *είναι ορθογώνιο, αφού η ΒΓ είναι διάμετρος και* $A_1A^2 = A\Delta^2 - A_1\Delta^2$, *διότι και το τρίγωνο* $AA_1\Delta$ *είναι ορθογώνιο στο* A_1.

Θεώρημα 14ο (Carnot)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Κ, Λ, Μ του επιπέδου του. Τότε οι κάθετες από τα Κ, Λ, Μ προς τις ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ, αντιστοίχως, διέρχονται από το ίδιο σημείο, αν και μόνο αν:

$$(\text{KB}^2-\text{K}\Gamma^2)+(\Lambda\Gamma^2-\Lambda\text{A}^2)+(\text{MA}^2-\text{MB}^2)=0$$

δηλαδή, αν και μόνο αν:

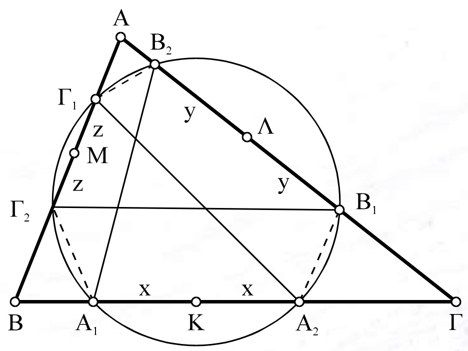
$$\text{KB}^2+\Lambda\Gamma^2+\text{MA}^2=\text{K}\Gamma^2+\Lambda\text{A}^2+\text{MB}^2$$

Εφαρμογή 11

Στις πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ενός τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε ανά δύο τα σημεία $(\text{A}_1,\ \text{A}_2)$, $(\text{B}_1,\ \text{B}_2)$ και $(\Gamma_1,\ \Gamma_2)$ αντίστοιχα. Αν οι τετράδες $(\text{A}_1,\ \text{A}_2,\ \text{B}_1,\ \text{B}_2)$, $(\text{A}_1,\ \text{A}_2,\ \Gamma_1,\ \Gamma_2)$ και $(\text{B}_1,\ \text{B}_2,\ \Gamma_1,\ \Gamma_2)$ είναι ομοκυκλικά σημεία, να αποδειχθεί ότι τα έξι σημεία $\text{A}_1,\ \text{A}_2,\ \text{B}_1,\ \text{B}_2,\ \Gamma_1,\ \Gamma_2$ είναι ομοκυκλικά.

Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι οι μεσοκάθετες των τμημάτων A_1A_2, B_1B_2, $\Gamma_1\Gamma_2$ διέρχονται από το ίδιο σημείο. Για τον σκοπό αυτό, αρκεί να αποδείξουμε ότι ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος Carnot, δηλαδή ότι:



$$(\text{KB}^2-\text{K}\Gamma^2)+(\Lambda\Gamma^2-\Lambda\text{A}^2)+$$

$$+(\text{MA}^2-\text{MB}^2)=0 \qquad (1)$$

όπου Κ, Λ, Μ είναι τα μέσα των A_1A_2, B_1B_2, $\Gamma_1\Gamma_2$ αντίστοιχα. Θέτουμε για ευκολία $\text{KA}_1=\text{KA}_2=\text{x}$, $\Lambda\text{B}_1=\Lambda\text{B}_2=\text{y}$ και $\text{M}\Gamma_1=\text{M}\Gamma_2=\text{z}$.

Από τα εγγράψιμα τετράπλευρα $\Gamma_1\Gamma_2\text{A}_1\text{A}_2$, $\text{B}_1\text{B}_2\Gamma_1\Gamma_2$, $\text{A}_1\text{A}_2\text{B}_1\text{B}_2$ παίρνουμε:

$$\text{BA}_1\cdot\text{BA}_2=\text{B}\Gamma_1\cdot\text{B}\Gamma_2 \Leftrightarrow (\text{BK}-\text{x})(\text{BK}+\text{x})=(\text{BM}+\text{z})(\text{BM}-\text{z}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow BK^2 - x^2 = BM^2 - z^2 \qquad (2)$$

Όμοια προκύπτει ότι:

$$\Gamma\Lambda^2 - y^2 = \Gamma K^2 - x^2, \quad AM^2 - z^2 = A\Lambda^2 - y^2 \qquad (3)$$

Με πρόσθεση των σχέσεων (2) και (3), παίρνουμε:

$$BK^2 + \Gamma\Lambda^2 + AM^2 = BM^2 + A\Lambda^2 + \Gamma K^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (KB^2 - K\Gamma^2) + (\Lambda\Gamma^2 - \Lambda A^2) + (MA^2 - MB^2) = 0$$

Ισχύει λοιπόν η (1), οπότε η απόδειξη ολοκληρώνεται.

Να σημειώσουμε ότι αφού οι μεσοκάθετοι των A_1A_2, B_1B_2, $\Gamma_1\Gamma_2$ συντρέχουν, οι κύκλοι (A_1, A_2, B_1, B_2), $(B_1, B_2, \Gamma_1, \Gamma_2)$ και $(\Gamma_1, \Gamma_2, A_1, A_2)$ έχουν το ίδιο κέντρο. Άρα τα έξι σημεία A_1, A_2, B_1, B_2, Γ_1, Γ_2 είναι ομοκυκλικά.

Άλλος τρόπος

Η ΒΓ είναι ο ριζικός άξονας των κύκλων (A_1, A_2, B_1, B_2) και $(A_1, A_2, \Gamma_1, \Gamma_2)$. Η ΑΓ είναι ο ριζικός άξονας των κύκλων $(B_1, B_2, \Gamma_1, \Gamma_2)$ και (B_1, B_2, A_1, A_2). Η ΑΒ είναι ο ριζικός άξονας των κύκλων $(\Gamma_1, \Gamma_2, A_1, A_2)$ και $(\Gamma_1, \Gamma_2, B_1, B_2)$. Αν τα έξι σημεία δεν είναι ομοκυκλικά, τότε οι ριζικοί άξονες είτε συντρέχουν (στο ριζικό τους κέντρο) είτε είναι παράλληλοι είτε ταυτίζονται. Τίποτα όμως από όλα αυτά δεν συμβαίνει, οπότε πράγματι τα έξι σημεία A_1, A_2, B_1, B_2, Γ_1, Γ_2 είναι ομοκυκλικά.

Θεώρημα 15ο (1ο θεώρημα του Πτολεμαίου)

Αν ΑΒΓΔ είναι ένα τετράπλευρο εγγεγραμμένο σε κύκλο, τότε:

$$A\Gamma \cdot B\Delta = AB \cdot \Gamma\Delta + A\Delta \cdot B\Gamma$$

Σχόλιο

Ισχύει και το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος.

Θεώρημα 16ο (2ο θεώρημα του Πτολεμαίου)

Αν το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο, τότε:

$$\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{B\Delta}}=\frac{\mathrm{AB\cdot A\Delta+\Gamma B\cdot \Gamma\Delta}}{\mathrm{BA\cdot B\Gamma+\Delta A\cdot \Delta\Gamma}}$$

Θεώρημα 17ο

Αν ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με ακτίνα R, τότε:

$$\mathrm{R}=\frac{\sqrt{(\alpha\beta+\gamma\delta)(\alpha\gamma+\beta\delta)(\alpha\delta+\beta\gamma)}}{4\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)(\tau-\delta)}}\ ,\quad \tau=\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}$$

Εφαρμογή 12

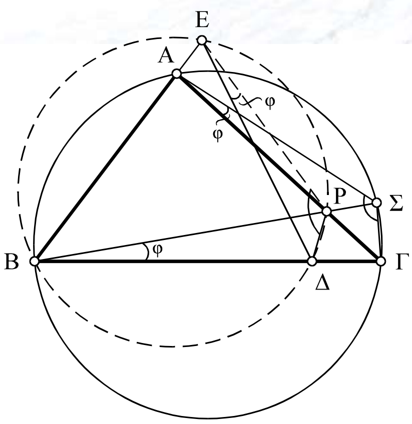
Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\mathrm{AB<A\Gamma<B\Gamma}$. Στην πλευρά ΒΓ παίρνουμε σημείο Δ και στην προέκταση της ΒΑ παίρνουμε σημείο Ε έτσι, ώστε $\mathrm{B\Delta=BE=A\Gamma}$. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΒΔΕ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ρ. Η ευθεία ΒΡ τέμνει τον κύκλο (Α,Β,Γ) στο σημείο Σ. Να αποδειχθεί ότι:

$$\mathrm{A\Sigma+\Gamma\Sigma=BP}$$

Λύση

Φέρουμε την ΕΡ και τη ΡΔ. Είναι τότε:

- $\mathrm{P\hat{E}\Delta=P\hat{B}\Delta=\Sigma\hat{B}\Gamma=\Sigma\hat{E}\Gamma}$
- $\mathrm{A\hat{\Sigma}\Gamma=180^o-A\hat{B}\Gamma=180^o-E\hat{B}\Delta=E\hat{P}\Delta}$



Τα τρίγωνα λοιπόν ΑΓΣ και ΕΡΔ είναι όμοια, οπότε:

$$\frac{\mathrm{A\Sigma}}{\mathrm{A\Gamma}}=\frac{\mathrm{PE}}{\mathrm{\Delta E}}\quad \text{και}\quad \frac{\mathrm{\Gamma\Sigma}}{\mathrm{A\Gamma}}=\frac{\mathrm{P\Delta}}{\mathrm{\Delta E}}$$

Οι σχέσεις αυτές γράφονται:

$$A\Sigma \cdot \Delta E = A\Gamma \cdot PE \quad \text{και} \quad \Gamma\Sigma \cdot \Delta E = P\Delta \cdot A\Gamma$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων αυτών, προκύπτει:

$$(A\Sigma + \Gamma\Sigma) \cdot \Delta E = (PE + P\Delta) \cdot A\Gamma \qquad (1)$$

Όμως, από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΕΡΔΒ και το 1^{o} θεώρημα Πτολεμαίου, παίρνουμε:

$$BP \cdot \Delta E = PE \cdot B\Delta + P\Delta \cdot BE = (PE + P\Delta) \cdot A\Gamma \qquad (2)$$

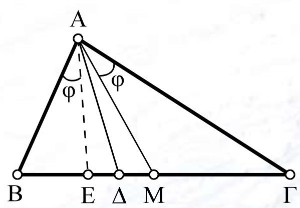
Οι σχέσεις (1) και (2) δίνουν:

$$(A\Sigma + \Gamma\Sigma) \cdot \Delta E = BP \cdot \Delta E \Leftrightarrow A\Sigma + \Gamma\Sigma = BP$$

Τη λύση αυτή έκανε ο Ολυμπιονίκης Γιώργος Καλατζής.

Η συμμετροδιάμεσος

Ορισμός



Έστω τρίγωνο ΑΒΓ, η διχοτόμος ΑΔ, η διάμεσος ΑΜ και η συμμετρική ευθεία ΑΕ της διαμέσου ΑΜ ως προς την ΑΔ, που τέμνει τη ΒΓ στο Ε. Το τμήμα ΑΕ λέγεται συμμετροδιάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ, που αντιστοιχεί στην κορυφή Α.

Παρατήρηση

- Αν η ΑΕ είναι συμμετροδιάμεσος του $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$, τότε οι ευθείες ΑΜ, ΑΕ είναι ισογώνιες ως προς τη γωνία $\hat{A}$.
- Είναι φανερό ότι κάθε τρίγωνο έχει τρεις συμμετροδιαμέσους για τις οποίες ισχύει το εξής

θεώρημα:

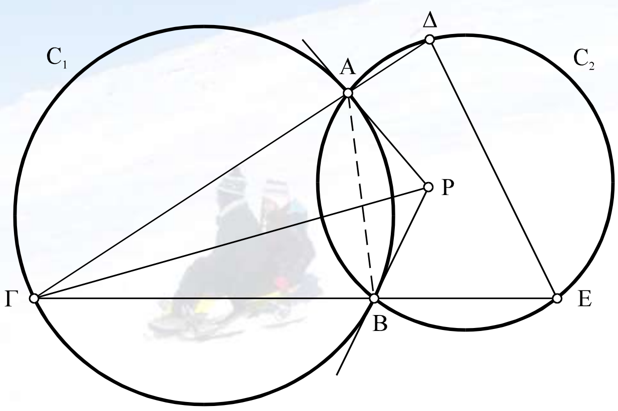
Θεώρημα 18ο (Σημείο Lemoine)

Οι συμμετροδιάμεσοι κάθε τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Εφαρμογή 13

Δύο κύκλοι C_1 και C_2 τέμνονται στα σημεία Α και Β. Από το σημείο Γ του κύκλου C_1, που είναι εξωτερικό του κύκλου C_2, φέρουμε τις τέμνουσες ΓΑΔ και ΓΒΕ προς τον C_2. Οι εφαπτομένες του C_1 στα σημεία Α, Β τέμνονται στο σημείο Ρ. Να αποδειχθεί ότι η ΓΡ διχοτομεί τη ΔΕ.

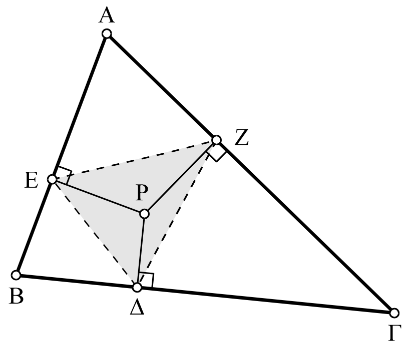
Λύση

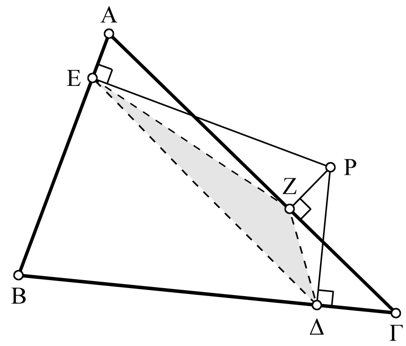


Φέρουμε την ΑΒ. Στο τρίγωνο ΓΑΒ η ΓΡ είναι συμμετροδιάμεσος. Όμως η ΔΕ είναι αντιπαράλληλος της ΑΒ, διότι το ΑΔΕΒ είναι εγγεγραμμένο. Άρα η ΓΡ είναι ευθεία διαμέσου του τριγώνου ΓΔΕ, δηλαδή διχοτομεί την πλευρά ΔΕ.

Το ποδικό τρίγωνο

- Έστω Ρ ένα σημείο που βρίσκεται στο επίπεδο ενός τριγώνου ΑΒΓ. Φέρνουμε $Ρ\Delta \perp ΒΓ$, $ΡΕ \perp ΑΒ$ και $ΡΖ \perp ΑΓ$.





Το τρίγωνο ΔΕΖ, που έχει ως κορυφές τις προβολές του Ρ στις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ, ονομάζεται **ποδικό τρίγωνο** του σημείου Ρ ως προς το τρίγωνο ΑΒΓ.

- Έχει μεγάλη σημασία να μπορούμε να εκφράσουμε τις πλευρές του ποδικού τριγώνου ΔΕΖ ως συνάρτηση των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ και των αποστάσεων ΡΑ, ΡΒ, ΡΓ του Ρ από τις κορυφές του $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$. Τις ισότητες αυτές τις περιγράφουμε στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 19ο

Αν Δ, Ε, Ζ είναι οι προβολές τυχαίου σημείου Ρ στις πλευρές ΒΓ, ΑΒ, ΑΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ, τότε ισχύουν οι σχέσεις:

$$\mathrm{EZ} = \frac{\mathrm{B\Gamma} \cdot \mathrm{AP}}{2\mathrm{R}}, \quad \mathrm{Z\Delta} = \frac{\mathrm{AB} \cdot \mathrm{\Gamma P}}{2\mathrm{R}}, \quad \mathrm{\Delta E} = \frac{\mathrm{A\Gamma} \cdot \mathrm{BP}}{2\mathrm{R}}$$

όπου R είναι η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$.

Εφαρμογή 14

Έστω ABCD εγγράψιμο τετράπλευρο και P, Q, R οι προβολές του D στις ευθείες BC, CA, AB αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι $\mathrm{PQ} = \mathrm{QR}$, αν και μόνο αν οι διχοτόμοι των γωνιών $\mathrm{A\hat{B}C}$ και $\mathrm{A\hat{D}C}$ τέμνονται πάνω στην AC.

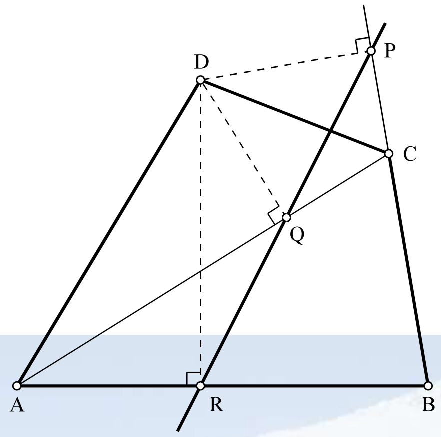
(IMO – 2003)

Λύση

Τα σημεία P, Q, R βρίσκονται στην ευθεία Simson του τριγώνου ABC. Σύμφωνα με τις βασικές σχέσεις του θεωρήματος για το ποδικό τρίγωνο που παράγει το σημείο D στο τρίγωνο ABC, είναι:

$$PQ = \frac{AB \cdot CD}{2R} \quad \text{και} \quad QR = \frac{BC \cdot AD}{2R}$$

Επομένως είναι:



$$PQ = QR \Leftrightarrow AB \cdot CD = BC \cdot AD \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} \qquad (1)$$

Σύμφωνα όμως με το θεώρημα της εσωτερικής διχοτόμου, η (1) ισχύει αν και μόνο αν οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{D}$ τέμνονται επί της AC.

Πραγματικά, αν BM είναι διχοτόμος του $\overset{\Delta}{BAC}$, τότε:

$$\frac{BA}{BC} = \frac{MA}{MC}$$

Αφού $\frac{BA}{BC} \overset{(1)}{=} \frac{DA}{DC}$, είναι και $\frac{DA}{DC} = \frac{MA}{MC}$. Άρα από το τρίγωνο DAC συμπεραίνουμε ότι η DM είναι διχοτόμος του τριγώνου DAC, δηλαδή αν ισχύει η (1), τότε οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{D}$ τέμνονται επί της AC.

Αντιστρόφως, αν BM και DM είναι διχοτόμοι των $\hat{B}$ και $\hat{D}$, τότε:

$$\frac{BA}{BC} = \frac{MA}{MC} = \frac{DA}{DC} \quad \text{ή} \quad \frac{BA}{BC} = \frac{DA}{DC}$$

Θεώρημα 20ο (Stewart)

Αν Μ είναι τυχαίο σημείο στην πλευρά ΒΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ, τότε:

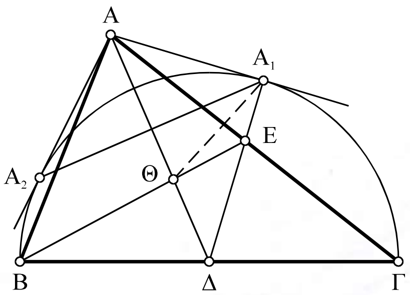
$$MB \cdot A\Gamma^2 + M\Gamma \cdot AB^2 = \alpha \cdot AM^2 + B\Gamma \cdot MB \cdot M\Gamma$$

Εφαρμογή 15

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και οι κύκλοι C_1, C_2, C_3 με διαμέτρους τις ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ αντιστοίχως. Έστω $ΑΑ_1$, $ΑΑ_2$ τα εφαπτόμενα τμήματα προς τον C_1, $ΒΒ_1$, $ΒΒ_2$ τα εφαπτόμενα τμήματα προς τον C_2 και $ΓΓ_1$, $ΓΓ_2$ τα εφαπτόμενα τμήματα προς τον κύκλο C_3. Να αποδειχθεί ότι τα σημεία $Α_1$, $Α_2$, $Β_1$, $Β_2$, $Γ_1$, $Γ_2$ είναι ομοκυκλικά.

Λύση

Ας προσπαθήσουμε να εντοπίσουμε το κέντρο του κύκλου που ορίζουν τα σημεία $Α_1$, $Α_2$, $Β_1$, $Β_2$, $Γ_1$, $Γ_2$. Το κέντρο λοιπόν του κύκλου αυτού βρίσκεται στη μεσοκάθετο του $Α_1Α_2$, που είναι η διάμεσος ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ. Όμοια, το κέντρο του κύκλου θα βρίσκεται στις μεσοκαθέτους των $Β_1Β_2$, $Γ_1Γ_2$, που είναι οι διάμεσοι ΒΕ, ΓΖ του $\overset{\Delta}{ΑΒΓ}$. Επομένως το κέντρο του κύκλου θα είναι το βαρύκεντρο Θ του τριγώνου ΑΒΓ. Φέρουμε λοιπόν τη διάμεσο ΒΕ και έστω Θ το σημείο τομής των ΑΔ, ΒΕ. Θα αποδείξουμε ότι:



$$ΘΑ_1 = ΘΑ_2 = ΘΒ_1 = ΘΒ_2 = ΘΓ_1 = ΘΓ_2$$

Στο τρίγωνο $ΑΑ_1Δ$ το θεώρημα Stewart δίνει:

$$ΘΔ \cdot ΑΑ_1^2 + ΘΑ \cdot Α_1Δ^2 = ΑΔ \cdot Α_1Θ^2 + ΘΑ \cdot ΘΔ \cdot ΑΔ$$

Επομένως, λύνοντας ως προς $Α_1Θ^2$, παίρνουμε:

$$ΘΑ_1^2 = \frac{ΘΔ}{ΑΔ} \cdot ΑΑ_1^2 + \frac{ΘΑ}{ΑΔ} \cdot Α_1Δ^2 - ΘΑ \cdot ΘΔ = \frac{1}{3}ΑΑ_1^2 + \frac{2}{3}Α_1Δ^2 - \frac{2}{3}ΑΔ \cdot \frac{1}{3}ΑΔ =$$

$$= \frac{1}{3}(ΑΔ^2 - Α_1Δ^2) + \frac{2}{3}Α_1Δ^2 - \frac{2}{9}ΑΔ^2 = \frac{1}{3}ΑΔ^2 - \frac{1}{3}Α_1Δ^2 + \frac{2}{3}Α_1Δ^2 - \frac{2}{9}ΑΔ^2 =$$

$$= \frac{1}{9}ΑΔ^2 + \frac{1}{3}Α_1Δ^2 = \frac{1}{9}ΑΔ^2 + \frac{1}{3}ΔΒ^2 = \frac{1}{9} \cdot \frac{2β^2 + 2γ^2 - α^2}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{α^2}{4} =$$

$$= \frac{2β^2 + 2γ^2 - α^2 + 3α^2}{36} = \frac{2(α^2 + β^2 + γ^2)}{36} = \frac{α^2 + β^2 + γ^2}{18} = ct$$

Είναι λοιπόν $ΘA_1^2 = ΘA_2^2 = ΘB_1^2 = ΘB_2^2 = ΘΓ_1^2 = ΘΓ_2^2 = ct$, οπότε $ΘA_1 = ΘA_2 = ΘB_1 =$

$= ΘB_2 = ΘΓ_1 = ΘΓ_2$. Άρα τα σημεία A_1, A_2, B_1, B_2, $Γ_1$, $Γ_2$ είναι ομοκυκλικά.

Θεώρημα 21ο (Πάππου)

Σε μια ευθεία (ε) παίρνουμε τα σημεία Ε, Γ, Α και σε μια ευθεία (η) τα σημεία Β, Ζ, Δ. Τα τμήματα ΒΓ, ΖΕ τέμνονται στο Ν, τα τμήματα ΖΑ, ΔΓ τέμνονται στο Μ και τα τμήματα ΒΑ, ΔΕ τέμνονται στο Λ. Τα σημεία τότε Ν, Λ, Μ βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

Σχόλιο

Ας παρατηρήσουμε ότι το ΑΒΓΔΕΖ είναι μη κυρτό τετράπλευρο που οι κορυφές του εναλλάξ βρίσκονται στις ευθείες (ε) και (η). Το ίδιο συμπέρασμα ισχύει και στην περίπτωση που το ΑΒΓΔΕΖ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (θεώρημα του Pascal).

Θεώρημα 22^ο (Pascal για κύκλο)

Αν (Α, Β, Γ), (Δ, Ε, Ζ) είναι δύο τριάδες σημείων ενός κύκλου και Κ, Μ, Λ είναι τα σημεία τομής των (ΑΕ, ΒΔ), (ΑΖ, ΔΓ), (ΒΖ, ΕΓ) αντίστοιχα, τότε τα σημεία Κ, Μ, Λ είναι συνευθειακά.

Θεώρημα 23ο (Pascal)

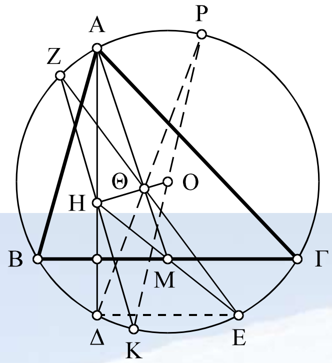
Αν ένα εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο, τότε τα σημεία τομής των απέναντι πλευρών του είναι συνευθειακά.

Εφαρμογή 16

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο και έστω Η, Θ το ορθόκεντρο και το βαρύκεντρο αντίστοιχα. Καλούμε Δ, Ε τα συμμετρικά του Η ως προς τη ΒΓ και ως προς το μέσο Μ της ΒΓ αντίστοιχα. Η ΕΘ τέμνει

τον περίκυκλο του $\overset{\Delta}{\text{ΑΒΓ}}$ στο Ζ και η ΖΗ τέμνει τον περίκυκλο στο Κ. Να αποδειχθεί ότι η ΘΔ είναι κάθετη στη ΔΚ.

Λύση



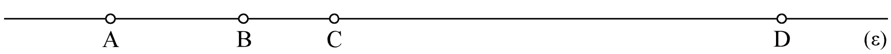
Τα σημεία Δ, Ε είναι σημεία του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ. Η γωνία $\text{Α}\hat{\Delta}\text{Ε}$ είναι ορθή, διότι η ΔΕ είναι παράλληλη στη ΒΓ. Έτσι η ΑΕ είναι διάμετρος του κύκλου. Άρα αυτή περνάει από το περίκεντρο Ο του τριγώνου ΑΒΓ. Όμως, από το θεώρημα Euler, τα σημεία Η, Θ, Ο είναι συνευθειακά. Αν Ρ λοιπόν είναι το σημείο τομής του κύκλου με τη ΔΘ, τότε τα σημεία Ρ, Ο, Κ είναι συνευθειακά από το θεώρημα του Pascal για τις τριάδες (Ζ, Α, Ρ) και (Δ, Κ, Ε). Αφού το τμήμα ΡΟΚ είναι διάμετρος, η γωνία $\text{Ρ}\hat{\Delta}\text{Κ}$ είναι ορθή και έτσι η ΘΔ είναι κάθετη στη ΔΚ.

Συζυγή αρμονικά σημεία – Αρμονικές δέσμες – Αρμονικό τετράπλευρο

Θεωρούμε μια ευθεία (ε) του επιπέδου και έστω A, B, C, D σημεία της (ε). Τα σημεία A, C είναι **συζυγή αρμονικά** των σημείων B, D, αν και μόνο αν $\frac{AB}{AD}=\frac{CB}{CD}$. Βέβαια, χρησιμοποιούνται πολλοί συμβολισμοί για το προηγούμενο. Ο πιο γνωστός, τον οποίο θα υιοθετήσουμε για ευκολία, είναι αυτός που χρησιμοποιεί τον διπλό λόγο. Ο διπλός λόγος ορίζεται ως εξής:

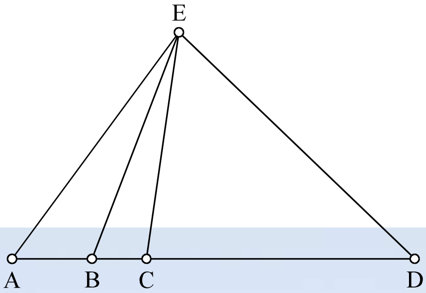
$$(A,C,B,D)=\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BC}}:\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DC}}$$

Επομένως, όταν τα σημεία A, C είναι συζυγή αρμονικά των σημείων B, D (ή τα A, B, C, D σχηματίζουν αρμονική τετράδα), τότε $(A,C,B,D)=-1$.



Αν τώρα τα σημεία A, C είναι συζυγή αρμονικά των σημείων B, D και E είναι ένα σημείο του επιπέδου, τότε **η δέσμη EA, EB, EC, ED είναι αρμονική** και τη συμβολίζουμε με:

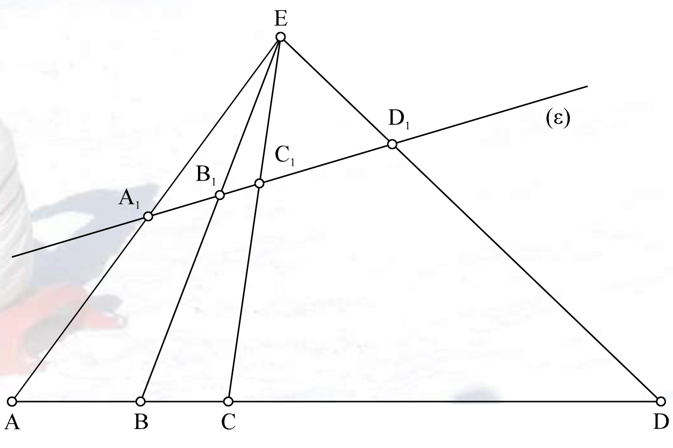
$$E(A,C,B,D)=(EA,EC,EB,ED)=-1$$



Τέλος, θα δώσουμε τον ορισμό του αρμονικού τετραπλεύρου. Έστω ABCD ένα τετράπλευρο εγγεγραμμένο σε κύκλο. Το τετράπλευρο ABCD ονομάζεται **αρμονικό**, αν και μόνο αν το σημείο τομής των εφαπτομένων στα σημεία B, D ανήκει πάνω στην ευθεία AC.

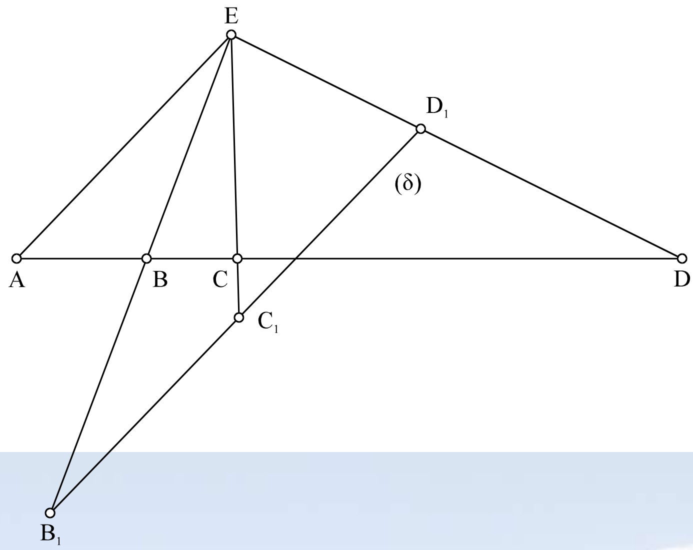
Βασικές ιδιότητες

Εάν μια αρμονική δέσμη τμηθεί από ευθεία (ε) του επιπέδου, τότε τα σημεία τομής της



(ε) με τη δέσμη σχηματίζουν αρμονική τετράδα (δηλαδή τα σημεία A_1, B_1, C_1, D_1 του σχήματος, σχηματίζουν αρμονική τετράδα).

Μια ειδική, πολύ χρήσιμη, περίπτωση του παραπάνω είναι ότι όταν έχουμε μια αρμονική δέσμη και φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μια ευθεία της δέσμης, τότε, καθώς αυτές οι δύο παράλληλες τέμνονται θεωρητικά στο άπειρο και το συζυγές αρμονικό σημείου στο άπειρο είναι το μέσο του τμήματος, ορίζονται τρία σημεία τομής εκ των οποίων το ένα είναι το μέσο του τμήματος που ορίζουν τα άλλα δύο.



(Για παράδειγμα, στο προηγούμενο σχήμα είναι $(EA, EC, EB, ED) = -1$ και $\delta // EA$. Άρα το C_1 είναι το μέσο του B_1D_1 .)

Ένα ίσως από τα πιο γνωστά σχήματα στο οποίο έχουμε συζυγή αρμονικά σημεία είναι το παρακάτω.

Πρόταση 1

Έστω τρίγωνο ABC και τρεις συντρέχουσες ευθείες AD, BE, CZ, με $D \in (BC)$, $E \in (AC)$ και $Z \in (AB)$, καθώς και $(EZ) \cap (BC) = P$. Τότε τα σημεία P, D είναι συζυγή αρμονικά των σημείων B, C.

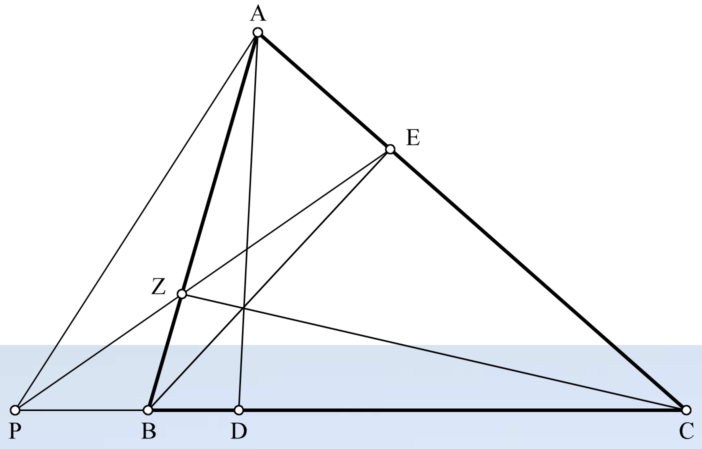
Απόδειξη

Από το θεώρημα του Cevà έχουμε ότι:

$$\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{ZA}{ZB} = 1 \qquad (1)$$

και από το θεώρημα του Μενελάου έχουμε ότι:

$$\frac{PB}{PC}\cdot\frac{EC}{EA}\cdot\frac{ZA}{ZB}=1 \qquad (2)$$



Από τις (1), (2) έχουμε:

$$\frac{PB}{PC}=\frac{DB}{DC}$$

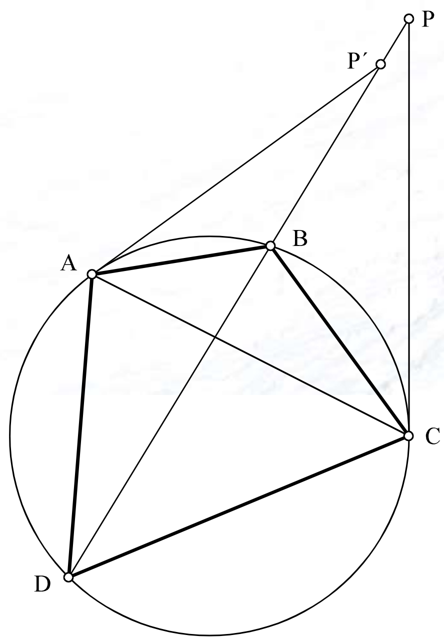
το οποίο είναι και το ζητούμενο.

Πρόταση 2

Ένα τετράπλευρο ABCD είναι αρμονικό,

αν και μόνο αν $\frac{AD}{AB}=\frac{CD}{CB}$, αν δηλαδή

$\mathbf{AD\cdot BC = AB\cdot CD}$.



Απόδειξη

Έστω ότι οι εφαπτομένες στα σημεία A, C τέμνουν

την ευθεία BD στα σημεία P′, P αντίστοιχα.

Έχουμε ότι τα τρίγωνα P′AB, P′AD είναι όμοια.

Επομένως θα είναι:

$$\frac{AD}{AB}=\frac{P'A}{P'B} \quad (1) \quad \text{και} \quad \frac{AD}{AB}=\frac{P'D}{P'A} \quad (2)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις (1), (2) έχουμε:

$$\left(\frac{AD}{AB}\right)^2 = \frac{P'D}{P'B} \qquad (3)$$

Εντελώς όμοια βγάζουμε ότι:

$$\left(\frac{CD}{CB}\right)^2 = \frac{PD}{PB} \qquad (4)$$

Επομένως έχουμε ότι:

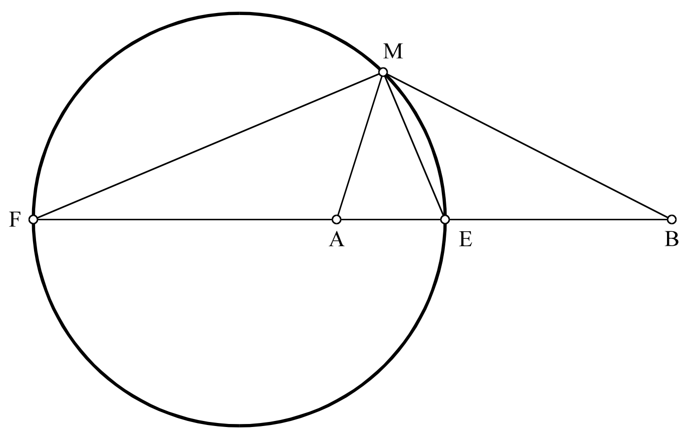
$$P' \equiv P \Leftrightarrow \frac{P'D}{P'B} = \frac{PD}{PB} \overset{(3)}{\underset{(4)}{\Leftrightarrow}} \left(\frac{AD}{AB}\right)^2 = \left(\frac{CD}{CB}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{CD}{CB}$$

Θεώρημα 24ο (Απολλώνιος κύκλος)

Δοθέντος τμήματος AB και θετικού αριθμού k, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου που είναι τέτοια, ώστε $\frac{MA}{MB} = k$, είναι κύκλος, του οποίου το κέντρο ανήκει στην AB.

Απόδειξη

Θεωρούμε δύο σημεία E, F (το ένα εσωτερικό και το άλλο εξωτερικό, αντίστοιχα, του τμήματος AB) έτσι, ώστε $\frac{EA}{EB} = \frac{FA}{FB} = k$ (τα σημεία είναι μοναδικά και δοθέντων των A, B και του k εύκολα κατασκευάζονται). Παρακάτω θα θεωρήσουμε ότι $M \neq E, F$, καθώς στην περίπτωση που $M \equiv E$ ή $M \equiv F$ παίρνουμε εύκολα το ζητούμενο.



Αν Μ είναι σημείο του επιπέδου τέτοιο, ώστε $\frac{MA}{MB} = k$, θα είναι:

$$\frac{EA}{EB} = \frac{FA}{FB} = \frac{MA}{MB}$$

Έτσι στο τρίγωνο ΜΑΒ οι ευθείες ΜΕ, MF αποτελούν την εσωτερική και την εξωτερική διχοτόμο αντίστοιχα της γωνίας $A\hat{M}B$. Επομένως η γωνία $F\hat{M}E$ είναι ορθή . Άρα το Μ ανήκει σε κύκλο διαμέτρου EF, του οποίου προφανώς το κέντρο είναι πάνω στην ΑΒ.

Αντίστροφα τώρα, θεωρούμε τον κύκλο με διάμετρο EF. Θα αποδείξουμε ότι κάθε σημείο Μ αυτού του κύκλου ικανοποιεί τη σχέση $\frac{MA}{MB} = k$. Από τον νόμο ημιτόνων στα τρίγωνα ΜΕΑ, ΜΕΒ αντίστοιχα, έχουμε:

$$\frac{AE}{\sin A\hat{M}E} = \frac{MA}{\sin M\hat{E}A} \quad \text{και} \quad \frac{BE}{\sin B\hat{M}E} = \frac{MB}{\sin M\hat{E}B}$$

Διαιρώντας αυτές τις δύο σχέσεις, παίρνουμε:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{AE \cdot \sin B\hat{M}E}{BE \cdot \sin A\hat{M}E} \qquad (1)$$

Όμοια, από τον νόμο ημιτόνων στα τρίγωνα MFA, MFB, παίρνουμε:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{AF \cdot \sin B\hat{M}F}{BF \cdot \sin A\hat{M}F} = \frac{AF \cdot \sin(90^o + B\hat{M}E)}{BF \cdot \sin(90^o - A\hat{M}E)} = \frac{AF \cdot \cos B\hat{M}E}{BF \cdot \cos A\hat{M}E} \qquad (2)$$

Επειδή $\frac{EA}{EB} = \frac{FA}{FB} = k$, οι σχέσεις (1), (2) δίνουν:

$$\frac{\sin B\hat{M}E}{\sin A\hat{M}E} = \frac{\cos B\hat{M}E}{\cos A\hat{M}E} \Rightarrow \tan B\hat{M}E = \tan A\hat{M}E \Rightarrow B\hat{M}E = A\hat{M}E$$

Άρα η ευθεία ΜΕ είναι η διχοτόμος της γωνίας $A\hat{M}B$ και άρα:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{EA}{EB} = k$$

το οποίο είναι και το ζητούμενο.

Θεώρημα 25ο (Newton)

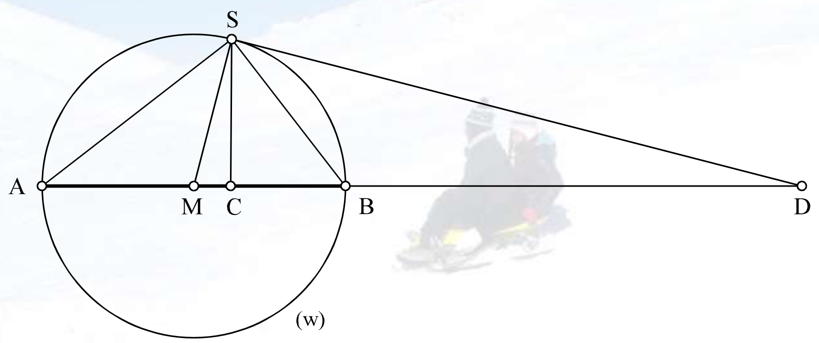
Θεωρούμε δύο σημεία A, B και δύο σημεία C, D που είναι συζυγή αρμονικά ως προς τα A, B. Αν M είναι το μέσο του AB, τότε:

$$\mathbf{MA^2 = MC \cdot MD}$$

Απόδειξη

Θεωρούμε τον Απολλώνιο κύκλο w των C, D με διάμετρο την AB. Θεωρούμε σημείο $S \in w$, ώστε η DS να είναι η εφαπτομένη από το D στον w. Αφού $S \in w$, θα είναι:

$$\frac{SC}{SD} = \frac{BC}{BD}$$



Άρα η SB είναι διχοτόμος της γωνίας $C\hat{S}D$ και άρα:

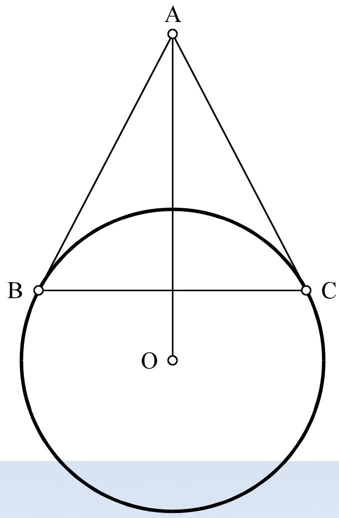
$$C\hat{S}B = B\hat{S}D = S\hat{A}B = 90° - S\hat{B}A$$

το οποίο σημαίνει ότι $C\hat{S}B + S\hat{B}A = 90°$ και άρα $SC \perp AD$. Επομένως από το θεώρημα προβολών έχουμε ότι:

$$SM^2 = MC \cdot MD \Rightarrow MA^2 = MC \cdot MD$$

το οποίο είναι και το ζητούμενο.

Πόλοι και πολικές



Θεωρούμε κύκλο (O) και σημείο A εξωτερικό αυτού (ο ορισμός μπορεί να επεκταθεί και για εσωτερικό σημείο). Έστω AB, AC οι εφαπτομένες από το A στον (O). Η ευθεία BC ονομάζεται **πολική** του σημείου A ως προς τον (O) και το σημείο A ονομάζεται **πόλος** της ευθείας BC. Προφανώς βλέπουμε ότι η ευθεία που ενώνει τον πόλο με το κέντρο του κύκλου είναι κάθετη στην πολική του σημείου-πόλου. Δηλαδή $AO \perp BC$.

Βασικές ιδιότητες πολικών

1) **Δίνεται κύκλος (O) και σημεία A, B του επιπέδου. Αν το B ανήκει στην πολική του A ως προς τον κύκλο (O), τότε και το A ανήκει στην πολική του B ως προς τον (O).**

(Θεώρημα La Hire)

2) **Θεωρούμε κύκλο (O), σημείο A εξωτερικό αυτού και τις εφαπτομένες από το A στα σημεία B, C του κύκλου. Θεωρούμε και τυχαία ευθεία που περνά από το A, η οποία τέμνει τον (O) στα σημεία D, E (με το D να είναι πλησιέστερο στο A) και τη BC στο σημείο K. Τότε τα σημεία A, K είναι συζυγή αρμονικά των D, E.**

Απόδειξη

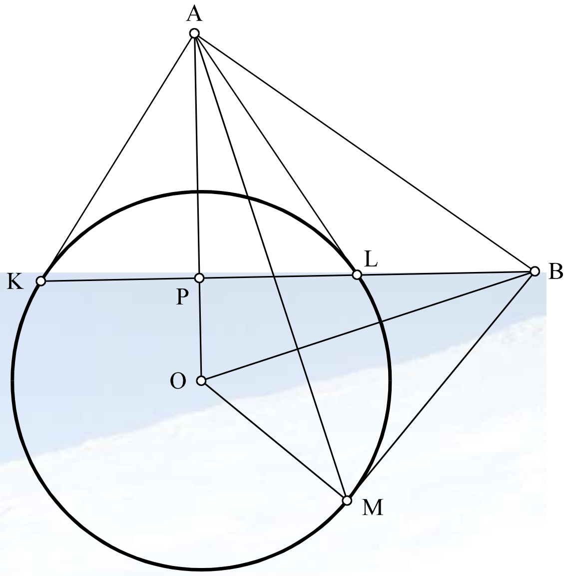
1) Έστω AK, AL οι εφαπτομένες από το A στον κύκλο και έστω BM μια εφαπτομένη από το σημείο B. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $AM \perp BO$. Θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο γνωστό λήμμα του οποίου η απόδειξη επαφίεται στον αναγνώστη καθώς είναι μια απλή χρήση του Πυθαγόρειου θεωρήματος:

Λήμμα

Έστω τετράπλευρο ABCD (κυρτό ή μη κυρτό). Τότε:

$$\mathbf{AC \perp BD \Leftrightarrow AB^2 - AD^2 = CB^2 - CD^2}$$

Χρησιμοποιώντας το λήμμα στο πρόβλημά μας, αρκεί να αποδείξουμε ότι:



$$AB^2 - AO^2 = MB^2 - MO^2$$

Πλέον η ολοκλήρωση της απόδειξης απαιτεί καλή επιλογή τμημάτων και διαδοχική χρήση του Πυθαγόρειου θεωρήματος. Είναι:

$$AB^2 - AO^2 = MB^2 - MO^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AP^2 + PB^2 - AO^2 = MB^2 - MO^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AL^2 - PL^2 + PB^2 - AO^2 = MB^2 - MO^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow PB^2 - PL^2 - LO^2 = MB^2 - MO^2 \Leftrightarrow$$

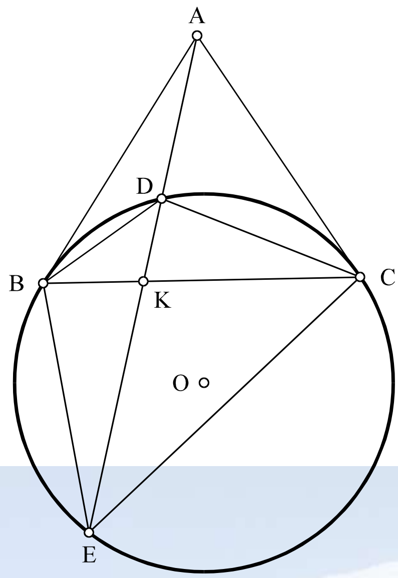
$$\Leftrightarrow PB^2 - 2OL^2 + PO^2 = MB^2 - MO^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow PB^2 + PO^2 = MB^2 + OM^2 = BO^2$$

το οποίο προφανώς ισχύει και άρα η πρόταση αποδείχθηκε.

2) Από τη θεωρία για το αρμονικό τετράπλευρο γνωρίζουμε ότι, αν η διαγώνιος εγγεγραμμένου τετραπλεύρου περνά από το σημείο τομής των εφαπτομένων που φέρνουμε από δύο απέναντι κορυφές, αυτό είναι αρμονικό. Επομένως το BDCE είναι αρμονικό και:

$$\frac{BD}{BE}=\frac{CD}{CE} \qquad (1)$$



Τώρα τα τρίγωνα ADB, ABE είναι όμοια. Άρα

$\frac{BD}{BE}=\frac{AD}{AB}=\frac{AB}{AE}$ και συνεπώς:

$$\frac{AD}{AB}\cdot\frac{AB}{AE}=\left(\frac{BD}{BE}\right)^2 \Rightarrow \frac{AD}{AE}=\left(\frac{BD}{BE}\right)^2$$

Χρησιμοποιώντας την (1) έχουμε:

$$\frac{AD}{AE}=\frac{BD}{BE}\cdot\frac{CD}{CE}=\frac{CD}{BE}\cdot\frac{BD}{CE}=$$

$$=\frac{KD}{KB}\cdot\frac{KB}{KE}=\frac{KD}{KE}$$

το οποίο δίνει το ζητούμενο (στην τελευταία χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι τα τρίγωνα KDC, KBE είναι όμοια, καθώς και τα KBD, KCE).

Ισογώνιες ευθείες

Θεωρούμε μια γωνία $x\hat{O}y$. Οι ημιευθείες Οδ, Οε ονομάζονται **ισογώνιες συζυγείς** ως προς τη γωνία $x\hat{O}y$, αν $x\hat{O}\delta=y\hat{O}\varepsilon$. Προφανώς οι παραπάνω ευθείες είναι συμμετρικές ως προς τη διχοτόμο της γωνίας $x\hat{O}y$.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε κάποιες βασικές ιδιότητες των ισογώνιων ευθειών. Η πρώτη είναι γνωστή και ως **σχέση Steiner**.

Πρόταση Steiner

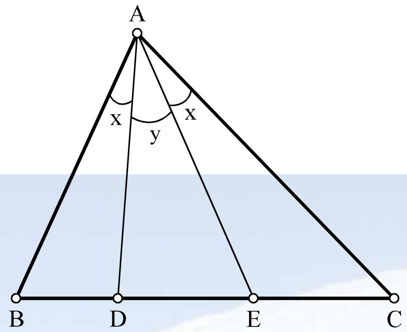
Θεωρούμε τρίγωνο ABC και τα σημεία D, E στη BC, ώστε $B\hat{A}D=C\hat{A}E$. Τότε:

$$\frac{DB}{DC}\cdot\frac{EB}{EC}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^2$$

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε την πρόταση με τη χρήση τριγωνομετρίας, άμεσα, χωρίς τη χρήση κάποιας βοηθητικής. Θέτουμε $B\hat{A}D = E\hat{A}C = x$ και $D\hat{A}E = y$. Τότε από τον νόμο των ημιτόνων στα τρίγωνα DAB, DAC έχουμε:

$$\frac{DB}{\sin x} = \frac{AD}{\sin \hat{B}} \quad \text{και}$$



$$\frac{DC}{\sin(x+y)} = \frac{AD}{\sin \hat{C}}$$

Διαιρώντας τις σχέσεις, παίρνουμε:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{\sin \hat{C} \cdot \sin x}{\sin \hat{B} \cdot \sin(x+y)}$$

Όμοια παίρνουμε ότι:

$$\frac{EB}{EC} = \frac{\sin \hat{C} \cdot \sin(x+y)}{\sin \hat{B} \cdot \sin x}$$

Πολλαπλασιάζοντας παίρνουμε:

$$\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EB}{EC} = \left(\frac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{B}}\right)^2 = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$$

που είναι και το ζητούμενο.

Σημείωση

Αν το E είναι το μέσο του BC, τότε το D είναι το ίχνος της συμμετροδιαμέσου από το A, οπότε προκύπτει η γνωστή σχέση $\frac{DB}{DC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε μια σημαντική πρόταση που καλό είναι κανείς να ξέρει να αποδεικνύει σύντομα, ώστε να την παραθέτει σε τυχόν χρήση της πρότασης.

Πρόταση

Έστω τρίγωνο ABC και τρεις σεβιανές AD, BZ, CK, όπου $D \in (BC)$, $Z \in (CA)$, $K \in (AB)$, οι οποίες συντρέχουν στο σημείο P. Να αποδειχθεί ότι οι ισογώνιες συζυγείς ευθείες AE, BH, CL, ως προς τις AD, BZ, CK αντίστοιχα, συντρέχουν σε ένα σημείο Q που ονομάζεται το ισογώνιο συζυγές του σημείου P.

Απόδειξη

Από τη σχέση Steiner έχουμε διαδοχικά ότι:

$$\frac{DB}{DC}\cdot\frac{EB}{EC}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^2,\ \frac{ZA}{ZC}\cdot\frac{HA}{HC}=\left(\frac{BA}{BC}\right)^2 \text{ και } \frac{KA}{KB}\cdot\frac{LA}{LB}=\left(\frac{CA}{CB}\right)^2$$

Πολλαπλασιάζοντας τις παραπάνω έχουμε ότι:

$$\frac{DB}{DC}\cdot\frac{EB}{EC}\cdot\frac{ZA}{ZC}\cdot\frac{HA}{HC}\cdot\frac{KA}{KB}\cdot\frac{LA}{LB}=1 \qquad (*)$$

Όμως οι ευθείες AD, BZ, CK συντρέχουν. Άρα από το θεώρημα Cevá παίρνουμε ότι:

$$\frac{DB}{DC}\cdot\frac{ZA}{ZC}\cdot\frac{KA}{KB}=1$$

Επομένως η (*) δίνει $\frac{EB}{EC}\cdot\frac{HA}{HC}\cdot\frac{LA}{LB}=1$, από όπου το αντίστροφο του θεωρήματος Cevá δίνει ότι οι AE, BH, CL συντρέχουν, που είναι το ζητούμενο.

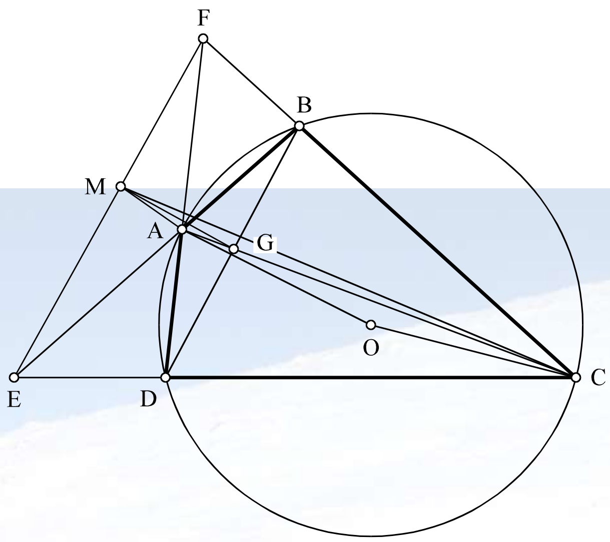
Λήμμα στο σημείο Miquel

Έστω ένα εγγεγραμμένο τετράπλευρο ABCD σε κύκλο (O) και τα σημεία $F \equiv (AD) \cap (CB)$, $E \equiv (BA) \cap (CD)$, $G \equiv (AC) \cap (BD)$. Είναι γνωστό ότι το σημείο Miquel M του πλήρους τετραπλεύρου

CBADFE βρίσκεται πάνω στην EF. Να αποδειχθεί ότι τα σημεία O, G, M είναι συνευθειακά και ότι $OM \perp EF$.

Λύση

Το τετράπλευρο MAOC είναι εγγράψιμο. Πράγματι:



$$A\hat{O}C = 2A\hat{D}C = A\hat{M}E + F\hat{M}C =$$

$$= 180° - A\hat{M}C$$

Επομένως:

$$O\hat{M}E = O\hat{M}A + A\hat{M}E =$$

$$= A\hat{C}O + A\hat{D}C =$$

$$= 90° - \frac{A\hat{O}C}{2} + A\hat{D}C = 90°$$

οπότε $OM \perp EF$. Αφού επιπλέον ισχύει ότι η EF είναι η πολική του G, $OG \perp EF$ και προκύπτει το ζητούμενο.

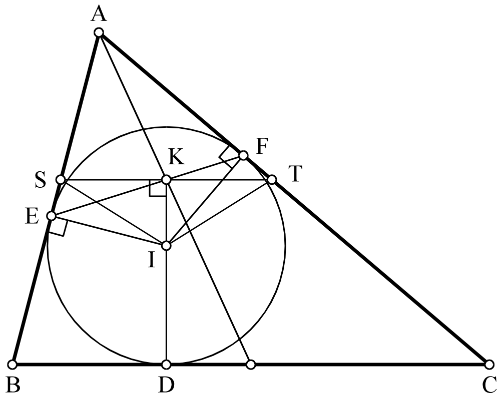
Πρόταση – Λήμμα στον εγγεγραμμένο κύκλο

Θεωρούμε τρίγωνο ABC και τον εγγεγραμμένο κύκλο κέντρου I, που εφάπτεται των AB, BC, CA στα E, D, F αντίστοιχα. Αν η DI τέμνει την EF στο K, να αποδειχθεί ότι η AK είναι διάμεσος στο τρίγωνο ABC.

Απόδειξη

Αν η παράλληλη στη BC από το K τέμνει τις AB, AC στα σημεία S, T, τότε αρκεί να αποδείξουμε ότι το K είναι μέσο του ST.

(Η παραπάνω μέθοδος είναι πολύ χρήσιμη και βοηθάει στο να εκμεταλλευτούμε το μέσο μεταφέροντάς το σε ευθεία παράλληλη.)



Αφού είναι $ID \perp BC$, θα είναι $ID \perp ST$. Άρα αρκεί το τρίγωνο IST να είναι ισοσκελές. Τα τετράπλευρα IESK, IKFT είναι εγγράψιμα, άρα:

$$I\hat{S}T = I\hat{E}F = I\hat{F}E = K\hat{T}I$$

που είναι το ζητούμενο.

Μιγαδικοί στη Γεωμετρία

Κάνουμε αρχικά τη μεταφορά του προβλήματος στο μιγαδικό επίπεδο, όπου σε κάθε σημείο αντιστοιχεί ένας μιγαδικός αριθμός.

Θεώρημα 26ο

α) Τα τμήματα ab, cd είναι παράλληλα, αν και μόνο αν $\dfrac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}} = \dfrac{c-d}{\overline{c}-\overline{d}}$.

β) Τα σημεία a, b, c είναι συνευθειακά, αν και μόνο αν $\dfrac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}} = \dfrac{a-c}{\overline{a}-\overline{c}}$.

γ) Τα τμήματα ab και cd είναι κάθετα, αν και μόνο αν $\dfrac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}} = -\dfrac{c-d}{\overline{c}-\overline{d}}$.

δ) Αν $\varphi = a\hat{c}b$, τότε και μόνο τότε $\dfrac{c-b}{|c-b|} = e^{i\varphi} \cdot \dfrac{c-a}{|c-a|}$.

Ειδικά, αν το σημείο b προκύπτει με στροφή του a γύρω από το c με γωνία φ, τότε:

$$b - c = e^{i\varphi} \cdot (a - c)$$

Θεώρημα 27ο

Ιδιότητες στον μοναδιαίο κύκλο:

α) Αν a είναι σημείο του κύκλου, τότε $|a|=1 \Leftrightarrow \bar{a}=\frac{1}{a}$.

β) Το σημείο τομής των εφαπτομένων στα a, b είναι το σημείο $\frac{2ab}{a+b}$.

γ) Το σημείο τομής των χορδών ab και cd είναι το $\frac{ab(c+d)-cd(a+b)}{ab-cd}$.

Θεώρημα 28ο

Τα σημεία a, b, c, d ανήκουν σε κύκλο, αν και μόνο αν ο αριθμός $\frac{a-c}{b-c}:\frac{a-d}{b-d}$ είναι πραγματικός.

Θεώρημα 29ο

Τα τρίγωνα abc και pqr είναι όμοια και όμοια προσανατολισμένα, αν και μόνο αν:

$$\frac{a-c}{b-c}=\frac{p-r}{q-r}$$

Θεώρημα 30ο

Το εμβαδόν τριγώνου abc είναι ίσο με

$$E=\frac{i}{4}(a\bar{b}+b\bar{c}+c\bar{a}-\bar{a}b-\bar{b}c-\bar{c}a).$$

Θεώρημα 31ο

α) Το σημείο g είναι το βαρύκεντρο του abc, αν και μόνο αν $g=\frac{a+b+c}{3}$.

β) Αν h είναι το ορθόκεντρο και o είναι το περίκεντρο τριγώνου abc, τότε:

$$h + 2o = a + b + c$$

Θεώρημα 32ο

Αν ο εγγεγραμμένος κύκλος τριγώνου abc είναι ο μοναδιαίος κύκλος και τα σημεία επαφής με τις bc, ac, ab είναι p, q, r, τότε:

α) $a = \dfrac{2+r}{q+r}$, $b = \dfrac{2rq}{r+p}$, $c = \dfrac{2pq}{p+q}$

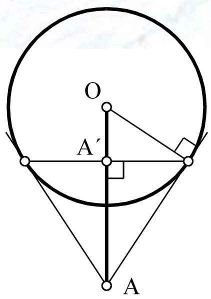
β) Για το ορθόκεντρο h έχουμε $h = \dfrac{2\left(p^2q^2 + q^2r^2 + r^2p^2 + pqr(p+q+r)\right)}{(p+q)(q+r)(r+p)}$.

γ) Για το περίκεντρο o ισχύει $o = \dfrac{2pqr(p+q+r)}{(p+q)(q+r)(r+p)}$.

Θεώρημα 33ο

Για κάθε τρίγωνο abc εγγεγραμμένο στον μοναδιαίο κύκλο υπάρχουν u, v, w τέτοιοι, ώστε $a = u^2$, $b = v^2$, $c = w^2$ και –uv, –vw, –wu να είναι τα μέσα των τόξων ab, bc, ca που δεν περιέχουν τα c, a, b. Τότε για το έγκεντρο I έχουμε $i = -(uv + vw + wu)$.

Αντιστροφή



Αντιστροφή I είναι μια απεικόνιση που προσδιορίζεται από έναν κύκλο με κέντρο O και ακτίνα r και για κάθε σημείο A του επιπέδου, με $A \neq O$, έχουμε ότι $I(A) = A'$, όπου A' είναι σημείο της ημιευθείας OA, ώστε:

$$OA \cdot OA' = r^2$$

Ιδιότητες

α) Για όλα τα σημεία P, $Q \neq O$ έχουμε ότι τα τρίγωνα $P'OQ'$ και QOP είναι όμοια, με λόγο ομοιότητας $\dfrac{r^2}{OP \cdot OQ}$. Έπεται ότι $O\hat{Q}'P' = O\hat{P}Q$ και $P'Q' = \dfrac{r^2}{OP \cdot OQ} \cdot PQ$, όπου P′, Q′ είναι τα αντίστροφα των P και Q.

β) Ο κύκλος της αντιστροφής και κάθε ευθεία που περνά από το O παραμένουν αναλλοίωτα μετά την αντιστροφή.

γ) Κάθε κύκλος που περνά από το O γίνεται ευθεία (η κοινή χορδή του κύκλου με τον κύκλο αντιστροφής). Αυτή η ευθεία είναι κάθετη στη διάμετρο του κύκλου που περνά από το O.

δ) Κάθε ευθεία που δεν περνά από το O γίνεται κύκλος που περνά από το O. Επιπλέον, αυτός ο κύκλος έχει διάμετρο που περνά από το O και είναι κάθετη στην ευθεία.

ε) Κάθε κύκλος που δεν περνά από το O μετασχηματίζεται σε κύκλο που επίσης δεν περνά από το O.

Εφαρμογή 17

Θεωρούμε τρίγωνο ABC και σημείο P στο εσωτερικό του, ώστε:

$$A\hat{P}B - \hat{C} = A\hat{P}C - \hat{B}$$

Αν D, E είναι τα έγκεντρα των τριγώνων APB, APC, να αποδειχθεί ότι οι ευθείες AP, BD, CE συντρέχουν.

(IMO – 1996)

Λύση

Εφαρμόζουμε αντιστροφή I κέντρου A και ακτίνας r. Τότε η δοθείσα σχέση γίνεται:

$$B'\hat{C}'P' = C'\hat{B}'P'$$

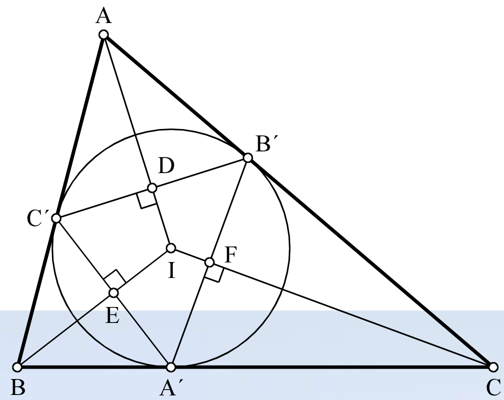
δηλαδή $B'P' = P'C'$. Εφαρμόζοντας την ιδιότητα (α) παίρνουμε ότι $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{PC}{PD}$.

Εφαρμογή 18

Θεωρούμε τρίγωνο ABC με έγκεντρο I και με A', B', C' συμβολίζουμε τα σημεία επαφής του εγγεγραμμένου κύκλου με τις BC, CA, AB αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των

τριγώνων AIA', BIB' και CIC' έχουν δύο κοινά σημεία.

Λύση



Αν r είναι η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου, θεωρούμε αντιστροφή κέντρου I και ακτίνας r. Τότε τα σημεία A, B, C θα πάνε στα μέσα D, E, F των $B'C'$, $A'C'$, $A'B'$. Οι κύκλοι AIA', BIB', CIC' θα γίνουν οι ευθείες $A'D$, $B'E$, $C'F$. Επομένως αρκεί οι ευθείες αυτές να συντρέχουν. Αυτό όμως προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι είναι διάμεσοι στο τρίγωνο $A'B'C'$.

Ομοιοθεσία

Θεωρούμε ένα σταθερό σημείο O του επιπέδου και έναν μη μηδενικό πραγματικό αριθμό.

Ομοιοθεσία κέντρου O με λόγο k ονομάζεται ο μετασχηματισμός του επιπέδου που στέλνει κάθε σημείο A σε ένα σημείο A' στην OA τέτοιο, ώστε $\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}$.

Ιδιότητες

α) Η ομοιοθεσία στέλνει μια ευθεία ℓ, που δεν περνά από το O, σε ευθεία ℓ' τέτοια, ώστε $\ell' // \ell$.

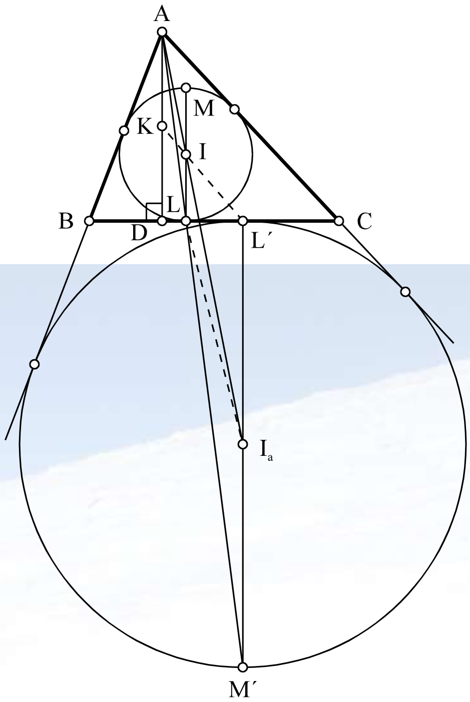
β) Ευθείες που περνούν από το O παραμένουν αμετάβλητες.

γ) Η εικόνα κύκλου μετά την ομοιοθεσία είναι επίσης κύκλος.

δ) Η εικόνα πολυγώνου Π μετά την ομοιοθεσία είναι επίσης πολύγωνο Π′, το οποίο είναι όμοιο προς το Π με λόγο ομοιότητας $|k|$. Επιπλέον τα Π, Π′ ονομάζονται ομοιόθετα με κέντρο ομοιοθεσίας O.

Εφαρμογή 19

Θεωρούμε τρίγωνο ABC με έγκεντρο I, παράκεντρο I_a και συμβολίζουμε με L, L′ τα σημεία επαφής των κύκλων (I), (I_a) με την πλευρά BC. Να αποδειχθεί ότι οι ευθείες IL', I_aL και το ύψος AD συντρέχουν.



Λύση

Αφού τα A, I, I_a είναι συνευθειακά, υπάρχει ομοιοθεσία κέντρου A που στέλνει το I στο I_a και κατ' επέκταση τον εγγεγραμμένο κύκλο στον παρεγγεγραμμένο. Οι ευθείες IL και I_aL' είναι παράλληλες. Άρα η IL πάει στην I_aL'. Επομένως το L πηγαίνει στο αντιδιαμετρικό του L′, έστω M′, και το L′ προέρχεται από το αντιδιαμετρικό του L, έστω M. Αφού τα τρίγωνα MLL′ και ADL′ είναι ομοιόθετα και I είναι το μέσο του LM, προκύπτει ότι η L′I περνά από το μέσο K του AD.

Όμοια, τα τρίγωνα LL′M′, LDA είναι ομοιόθετα και I_a είναι το μέσο του L′M′. Άρα η I_aL περνά και αυτή από το μέσο του AD και το ζητούμενο αποδεικνύεται.

Το θεώρημα της πεταλούδας

Θεωρούμε κύκλο κέντρου O και τα σημεία A, B, C, D πάνω στον κύκλο. Με M συμβολίζουμε το σημείο τομής των AC, BD και θεωρούμε ευθεία (ε) που περνά από το M και είναι κάθετη στην OM. Αν η (ε) τέμνει τις AB, CD στα S, T, τότε το M είναι μέσο του ST.

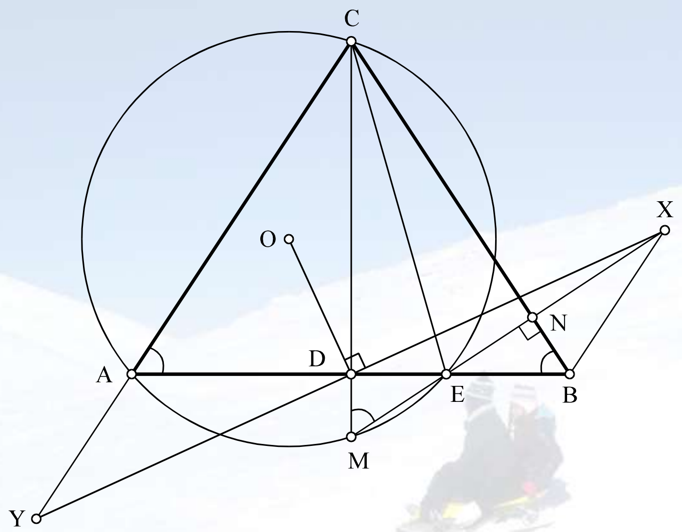
Ισχύει και το αντίστροφο.

Εφαρμογή 20

Θεωρούμε D το μέσο της βάσης AB ισοσκελούς τριγώνου ABC. Θεωρούμε σημείο E στην AB και έστω O το περίκεντρο του τριγώνου ACE. Να αποδειχθεί ότι η κάθετη στην OD στο D, η κάθετη από το E στη BC και η παράλληλη από το B στην AC, συντρέχουν.

(Βουλγαρία – 2000)

Λύση



Έστω ότι η κάθετη ευθεία από το E προς τη BC τέμνει την ευθεία CD στο M και την CB στο N.

Έχουμε τότε ότι:

$$N\hat{M}C = 90^{o} - D\hat{C}B = C\hat{A}B$$

Άρα το CEMA είναι εγγράψιμο. Αν τώρα η κάθετη στην OD στο D τέμνει τις ME, CA στα X, Y, τότε από το θεώρημα της πεταλούδας παίρνουμε ότι $DX = DY$.

Αφού επιπλέον ισχύει ότι $AD = DB$, θα έχουμε ότι το AXBY είναι παραλληλόγραμμο. Άρα BX // AC, που είναι το ζητούμενο.

Το αρχείο είναι μέρος από το βιβλίο :

Μπάμπης Στεργίου – Σιλουανός Μπραζιτίκος :

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί 2, εκδόσεις Σαββάλας.