Γεωμετρία - Ασκήσεις με γωνίες

♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥

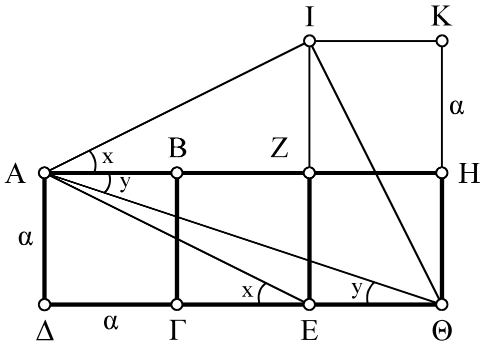
Χαρακτηριστικές ασκήσεις με γωνίες που αρέσουν και γοητεύουν τους μαθητές που ασχολούνται με τους μαθηματικούς διαγωνισμούς !

Μπάμπης Στεργίου – Φεβρουάριος 2012

1.1 Δίνονται στη σειρά τα τετράγωνα ΑΒΓΔ, ΒΓΕΖ και ΕΖΗΘ, τα οποία δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία. Να αποδειχθεί ότι $A\hat{E}\Delta + A\hat{\Theta}\Delta = 45^o$.

Λύση

Θεωρούμε το τετράγωνο ΖΗΚΙ, όπως στο σχήμα.



Έστω $A\hat{E}\Delta = x$ και $A\hat{\Theta}\Delta = y$. Θα αποδείξουμε ότι $x + y = 45^o$. Προφανώς $y = \Theta\hat{A}H$. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΕ και ΙΖΑ είναι ίσα, αφού ισχύει ότι $IZ = A\Delta = \alpha$ και $AZ = E\Delta = 2\alpha$. Άρα:

$$I\hat{A}Z = A\hat{E}\Delta = x$$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι $I\hat{A}\Theta = 45^o$.

Όμως τα τρίγωνα ΙΖΑ και ΘΚΙ είναι ίσα, οπότε:

$$IA = I\Theta$$

Επίσης:

$$A\hat{I}Z + Z\hat{I}\Theta = K\hat{I}\Theta + I\hat{\Theta}K = 90^o$$

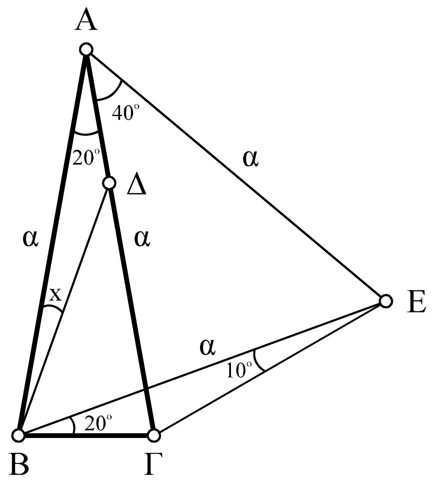
Επομένως το τρίγωνο $IA\Theta$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οπότε $I\hat{A}\Theta = 45^o$.

1.2 Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ είναι $\hat{A} = 20^o$. Στην πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $ΑΔ = ΒΓ$. Να αποδειχθεί ότι $Α\hat{Β}Δ = 10^o$.

(Θέμα πολλών διαγωνισμών)

Λύση

Το θέμα αυτό τίθεται πολύ συχνά σε μαθηματικούς διαγωνισμούς πολλών χωρών. Ας δούμε μια ωραία λύση. Θεωρούμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΕΑΒ. Είναι τότε:



- $Γ\hat{Β}Ε = Α\hat{Β}Γ - Α\hat{Β}Ε = 80^o - 60^o = 20^o$
- $ΑΕ = ΑΓ$ και $Γ\hat{Α}Ε = 60^o - Β\hat{Α}Γ = 40^o$, οπότε:

$$Α\hat{Ε}Γ = Α\hat{Γ}Ε = \frac{180^o - 40^o}{2} = 70^o$$

Έτσι:

$$Β\hat{Ε}Γ = Α\hat{Ε}Γ - Α\hat{Ε}Β = 70^o - 60^o = 10^o$$

Τα τρίγωνα όμως ΒΓΕ και ΑΔΒ είναι ίσα, διότι:

$$ΒΓ = ΑΔ,\ ΒΕ = ΑΒ = α \quad \text{και} \quad Γ\hat{Β}Ε = Δ\hat{Α}Β = 20^o$$

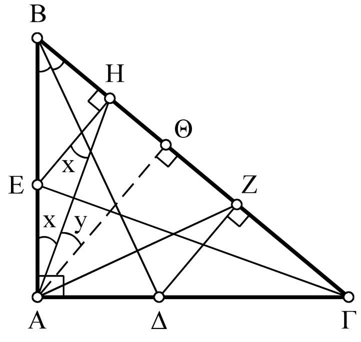
Άρα οι γωνίες x και $Β\hat{Ε}Γ$ είναι ίσες. Επομένως $x = 10^o$.

1.3 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{A} = 90^o)$ και οι διχοτόμοι του ΒΔ και ΓΕ. Αν ΕΗ, $ΔΖ \perp ΒΓ$, να αποδειχθεί ότι $Η\hat{Α}Ζ = 45^o$.

(Αγγλία – 1997)

Λύση

Έστω $ΑΘ \perp ΒΓ$. Επειδή το Ε είναι σημείο της διχοτόμου της $\hat{Γ}$, $ΕΑ \perp ΑΓ$ και $ΕΗ \perp ΗΓ$, θα είναι $ΕΗ = ΕΑ$. Άρα:



$$\hat{A}_x = \hat{H}_x = x \qquad (1)$$

όπου:

$$\hat{A}_x = Ε\hat{Α}Η \quad \text{και} \quad \hat{H}_x = Ε\hat{Η}Α$$

Οι ΕΗ και ΑΘ είναι κάθετες στη ΒΓ, οπότε ΕΗ // ΑΘ. Άρα:

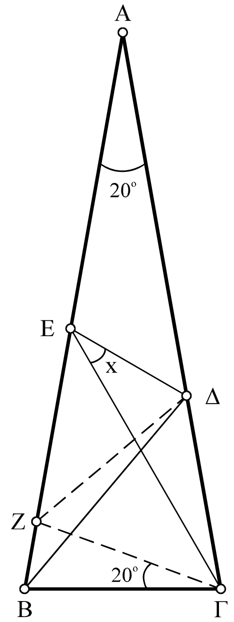
$$Ε\hat{Η}Α = Η\hat{Α}Θ \Leftrightarrow x = y \qquad (2)$$

όπου $y = Η\hat{Α}Θ$. Επομένως η ΑΗ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Theta$. Όμοια, η ΑΖ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Theta\hat{A}\Gamma$. Άρα:

$$H\hat{A}Z = H\hat{A}\Theta + \Theta\hat{A}Z = \frac{B\hat{A}\Theta}{2} + \frac{\Gamma\hat{A}\Theta}{2} = \frac{90^o}{2} = 45^o$$

1.4 **Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 20^o$. Στις πλευρές ΑΓ και ΑΒ παίρνουμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, ώστε $\Delta\hat{B}\Gamma = 50^o$ και $E\hat{\Gamma}B = 60^o$. Να αποδειχθεί ότι $\Gamma\hat{E}\Delta = 30^o$.**

Λύση



Παίρνουμε στην ΑΒ σημείο Ζ, ώστε $Z\hat{\Gamma}B = 20^o$. Τότε:

- $\Gamma B = \Gamma Z$, αφού το τρίγωνο ΓΒΖ είναι ισοσκελές,
- $\Gamma B = \Gamma\Delta$, αφού το τρίγωνο ΓΒΔ είναι ισοσκελές,
- $Z\Gamma = ZE$, αφού το τρίγωνο ΖΕΓ είναι ισοσκελές.

Αλλά το τρίγωνο ΓΔΖ θα είναι τότε ισόπλευρο, διότι $Z\hat{\Gamma}\Delta = 60^o$.
Άρα $Z\Delta = Z\Gamma = ZE$, οπότε:

$$Z\hat{E}\Delta = \frac{180^o - E\hat{Z}\Delta}{2} = \frac{180^o - 40^o}{2} = 70^o$$

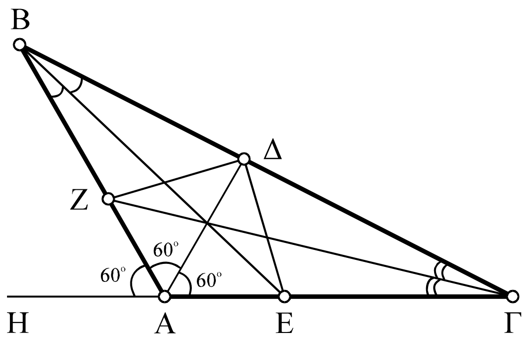
Τελικά έχουμε:

$$\Gamma\hat{E}\Delta = Z\hat{E}\Delta - Z\hat{E}\Gamma = 70^o - 40^o = 30^o$$

1.5 **Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} = 120^o$. Αν ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι οι διχοτόμοι του τριγώνου αυτού, να αποδειχθεί ότι $E\hat{\Delta}Z = 90^o$.**

(Διαγωνισμός ΕΜΕ)

Λύση



Στο τρίγωνο ΔΑΓ οι ΑΖ και ΓΖ είναι αντίστοιχα η εξωτερική και η εσωτερική διχοτόμος. Έτσι το Ζ είναι παράκεντρο του τριγώνου ΔΑΓ.
Συνεπώς, η ΔΖ είναι εξωτερική διχοτόμος, δηλαδή διχοτόμος της $A\hat{\Delta}B$. Όμοια η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{\Delta}\Gamma$, οπότε:

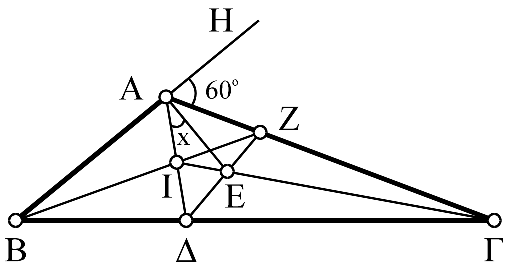
$$E\hat{\Delta}Z = 90^o$$

διότι οι διχοτόμοι δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών τέμνονται κάθετα.

1.6 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με $\hat{A}=120^o$, και οι διχοτόμοι ΑΔ και ΒΖ, που τέμνονται στο Ι. Αν η ΓΙ τέμνει τη ΔΖ στο Ε, να αποδειχθεί ότι $\Delta\hat{A}E=30^o$.

(2η Βαλκανιάδα Μαθηματικών)

Λύση



Επειδή $\Delta\hat{A}\Gamma=60^o$, για να είναι $x=30^o$, αρκεί να αποδείξουμε ότι η ΑΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{A}\Gamma$. Όμως το Ι είναι έγκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, διότι οι ΑΔ και ΒΖ είναι διχοτόμοι. Έτσι και η ΓΙ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΔΓ.

Αφού λοιπόν η ΓΙ είναι διχοτόμος της $\hat{\Gamma}$, για να είναι η ΑΕ διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{A}\Gamma$, αρκεί να είναι η ΔΖ διχοτόμος της γωνίας $A\hat{\Delta}\Gamma$ του τριγώνου ΑΔΓ. Όμως, στο τρίγωνο ΑΔΒ η ΒΖ είναι εσωτερική διχοτόμος και η ΑΖ είναι εξωτερική διχοτόμος, αφού:

$$\Delta\hat{A}\Gamma=\Gamma\hat{A}H=60^o$$

Το Ζ είναι λοιπόν παράκεντρο του τριγώνου ΑΒΔ, οπότε η ΔΖ είναι η (άλλη) εξωτερική διχοτόμος του τριγώνου ΑΔΒ. Έτσι, η ΔΖ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{\Delta}\Gamma$, η ΓΙ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$, οπότε το Ε είναι έγκεντρο του τριγώνου ΑΔΓ. Άρα:

$$x=30^o, \text{ αφού } x=\frac{\Delta\hat{A}\Gamma}{2}=\frac{60^o}{2}=30^o$$

1.7 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΔ εκτός αυτού, καθώς και το ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΕ στο εξωτερικό του $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$, με $E\hat{A}\Gamma=E\hat{\Gamma}A=30^o$. Αν Μ είναι το μέσο του ΒΓ, να αποδειχθεί ότι $\Delta\hat{M}E=90^o$.

Λύση

Έστω Ζ το συμμετρικό του Δ ως προς το Μ. Το ΒΔΓΖ είναι παραλληλόγραμμο, διότι οι διαγώνιες διχοτομούνται. Επομένως είναι:

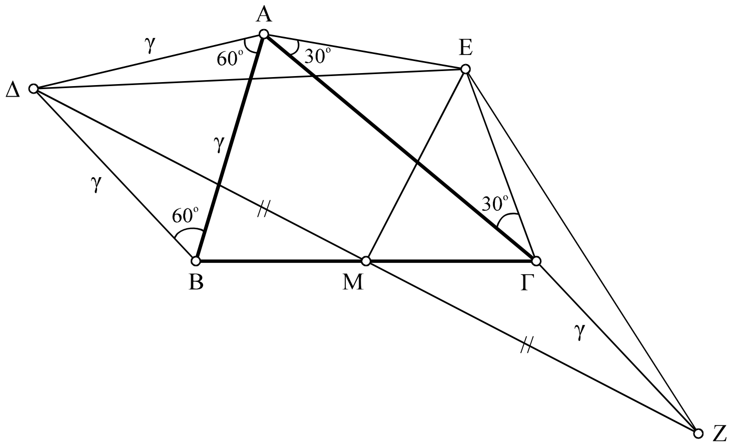
$$\Gamma Z=B\Delta=A\Delta \quad \text{και} \quad B\hat{\Gamma}Z=\Gamma\hat{B}\Delta=60^o+\hat{B}$$

Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΓΕΖ είναι ίσα, διότι:

- $A\Delta=\Gamma Z=\gamma$ και $AE=\Gamma E$

- $E\hat{\Gamma}Z = 360^o - E\hat{\Gamma}A - A\hat{\Gamma}B - B\hat{\Gamma}Z = 360^o - 30^o - \hat{\Gamma} - (60^o + \hat{B}) = 270^o - (\hat{B} + \hat{\Gamma}) =$

  $= 270^o - (180^o - \hat{A}) = 90^o + \hat{A} = \Delta\hat{A}E$



Άρα είναι και $E\Delta = EZ$ και αφού στο ισοσκελές τρίγωνο ΕΔΖ η ΕΜ είναι διάμεσος, είναι και ύψος. Είναι δηλαδή $\Delta\hat{M}E = 90^o$.

1.8 Στο εσωτερικό ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ δίνονται τα σημεία Ε, Ζ, Η έτσι, ώστε $EA = E\Delta$, $ZA = ZB$ και τα τρίγωνα ΑΕΖ, ΗΕΖ να είναι ισόπλευρα. Να αποδειχθεί ότι $\Delta E = \Gamma H$.

(Αυστραλία – 2008)

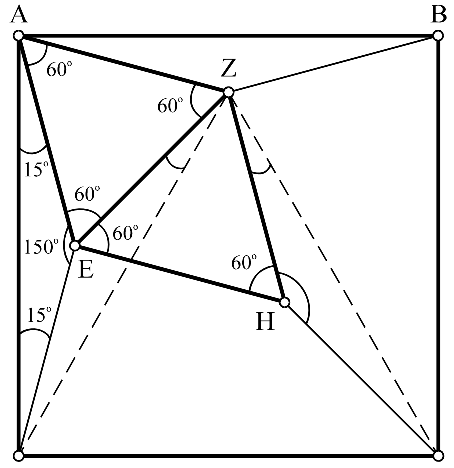
Λύση

Επειδή $\overset{\Delta}{EA\Delta} = \overset{\Delta}{ZAB}$, είναι $E\hat{A}\Delta = 15^o$ και $\Delta\hat{E}A = 150^o$, οπότε:

$$\Delta\hat{E}Z = 360^o - 150^o - 60^o = 150^o$$

Επομένως $\overset{\Delta}{\Delta EA} = \overset{\Delta}{\Delta EZ}$, οπότε:

$$\Delta Z = \Delta A = \Delta\Gamma \text{ και } E\hat{\Delta}Z = E\hat{\Delta}A = 15^o$$



- Είναι $A\hat{\Delta}Z = 30^o$, οπότε το $\overset{\Delta}{Z\Delta\Gamma}$ είναι ισόπλευρο, αφού επιπλέον είναι και $\Delta Z = \Delta A = \Delta\Gamma$. Αφού το $\overset{\Delta}{Z\Delta\Gamma}$ είναι ισόπλευρο είναι $\Gamma Z = Z\Delta$. Όμως:

$$E\hat{Z}\Delta = E\hat{Z}H - \Delta\hat{Z}H = \Delta\hat{Z}\Gamma - \Delta\hat{Z}H = H\hat{Z}\Gamma$$

- Τα τρίγωνα ΕΔΖ και ΗΖΓ είναι ίσα, διότι

$\Delta Z = Z\Gamma$, $EZ = ZH$, $E\hat{Z}\Delta = H\hat{Z}\Gamma$.

Άρα είναι και $\Delta E = \Gamma H$.

1.9 Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ, με $\hat{A} = 45^o$ και $\hat{\Gamma} = 30^o$, φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ. Να αποδειχθεί ότι $M\hat{A}B = 30^o$.

Λύση

Φέρουμε $BN \perp A\Gamma$. Τότε:

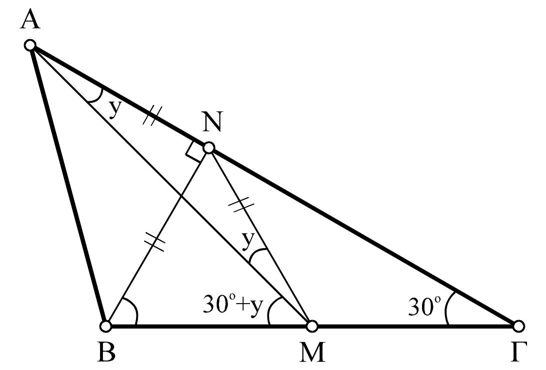
$$BN = \frac{B\Gamma}{2} = BM$$

και έτσι το τρίγωνο ΒΜΝ είναι ισόπλευρο. Επειδή $\hat{B} = 105^o$ και $N\hat{B}M = 60^o$, είναι:

$$A\hat{B}N = 45^o = \hat{A}$$

Άρα $NA = NB = NM$. Το τρίγωνο λοιπόν ΝΑΜ είναι ισοσκελές και επειδή:

$$A\hat{M}B = M\hat{A}\Gamma + M\hat{\Gamma}A = 30^o + y$$



έχουμε:

$$N\hat{M}B = 60^o \Leftrightarrow y + (30^o + y) = 60^o \Leftrightarrow y = 15^o$$

Αφού $M\hat{A}\Gamma = y = 15^o$ και $\hat{A} = 45^o$, είναι $M\hat{A}B = 30^o$.

Άλλος τρόπος

Φέρουμε το ύψος ΑΔ και τη διάμεσο ΔΝ του $\overset{\Delta}{A\Delta\Gamma}$. Είναι ΜΝ // ΑΒ, οπότε:

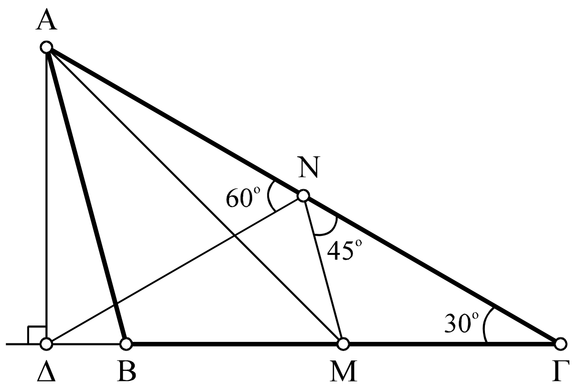
$$M\hat{N}\Gamma = 45^o \text{ και } \Delta\hat{M}N = 45^o + 30^o = 75^o$$

Το τρίγωνο ΑΔΝ είναι ισόπλευρο, αφού

$\Delta N = \frac{A\Gamma}{2} = AN$ και $\Delta\hat{A}N = 60^o$. Άρα:

$$\Delta\hat{N}M = 75^o = \Delta\hat{M}N$$

Επομένως $\Delta A = \Delta M$ και αφού $A\hat{\Delta}M = 90^o$ είναι:



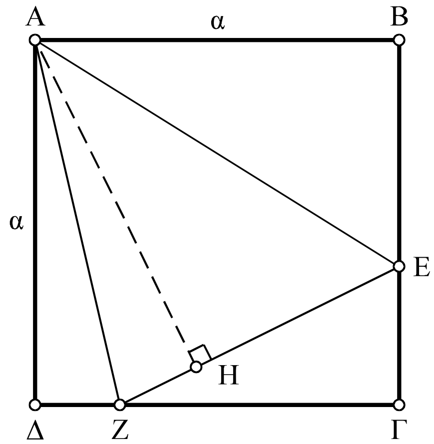
$$\Delta\hat{M}A = 45^o \Leftrightarrow \hat{\Gamma} + M\hat{A}\Gamma = 45^o \Leftrightarrow M\hat{A}\Gamma = 15^o \Leftrightarrow M\hat{A}B = 30^o$$

1.10 Στις πλευρές ΒΓ, ΓΔ ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ με $AB = \alpha$, παίρνουμε τα σημεία Ε, Ζ αντίστοιχα. Αν η περίμετρος του τριγώνου ΓΕΖ είναι ίση με 2α, να αποδειχθεί ότι $E\hat{A}Z = 45^o$.

Λύση

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΕΖ είναι:

- $\Gamma Z + ZE + E\Gamma = 2\alpha$
- $A\Delta = AB = \alpha = \dfrac{\Gamma Z + ZE + E\Gamma}{2}$



Άρα το Α είναι παράκεντρο της γωνίας $\hat{\Gamma}$ του $\overset{\Delta}{\Gamma EZ}$. Αν λοιπόν $AH \perp ZE$, τότε:

$$Z\hat{A}E = Z\hat{A}H + H\hat{A}E = \frac{\Delta\hat{A}H}{2} + \frac{H\hat{A}B}{2} = \frac{\Delta\hat{A}B}{2} = 45^o$$

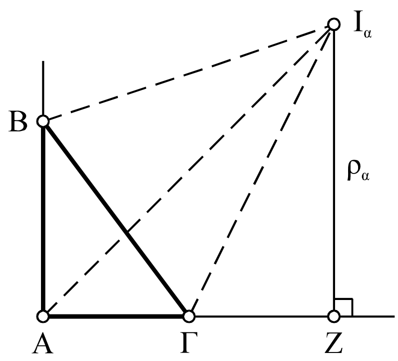
Μπορούμε επίσης απευθείας να πούμε ότι:

$$Z\hat{A}E = 90^o - \frac{\hat{\Gamma}}{2} = 45^o$$

με βάση γνωστή ιδιότητα των διχοτόμων των γωνιών τριγώνου.

Σχόλιο

Αν I_α είναι το παράκεντρο ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ $(\hat{A} = 90^o)$, τότε είναι:



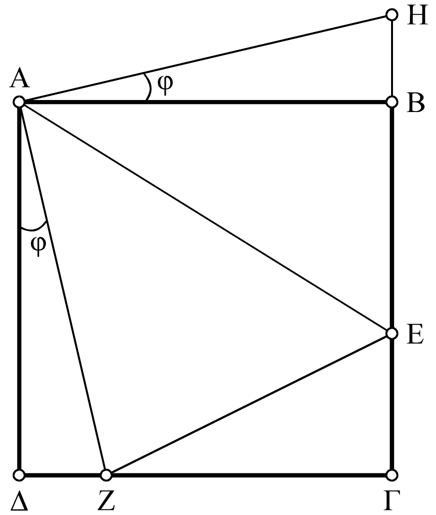
$$\rho_\alpha = AZ = \tau = \frac{AB + B\Gamma + \Gamma A}{2}$$

Αντίστροφα, αν ισχύει η παραπάνω σχέση, τότε το I_α είναι παράκεντρο του $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$.

Άλλος τρόπος

Στην προέκταση του ΓΒ παίρνουμε τμήμα $BH = \Delta Z$. Είναι τότε $\overset{\Delta}{ABH} = \overset{\Delta}{A\Delta Z}$, οπότε:

$$AH = AZ \quad \text{και} \quad Z\hat{A}H = 90^o$$



Είναι οπότε:

- $EZ = 2\alpha - E\Gamma - Z\Gamma = (\alpha - E\Gamma) + (\alpha - Z\Gamma) =$

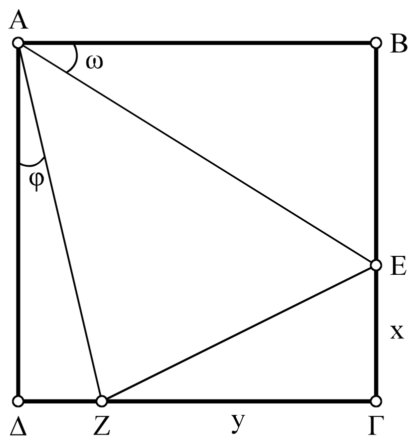
  $= BE + \Delta Z = BE + BH = EH$

- $\overset{\Delta}{AEH} = \overset{\Delta}{AEZ}$, διότι $AH = AZ$, $EH = EZ$ και ΑΕ κοινή.

Άρα παίρνουμε:

$$Z\hat{A}E = \frac{Z\hat{A}H}{2} = \frac{90^o}{2} = 45^o$$

Άλλος τρόπος



Έστω $\Gamma E = x$ και $\Gamma Z = y$. Είναι τότε:

- $\Gamma E + \Gamma Z + EZ = 2\alpha \Leftrightarrow x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 2\alpha \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow x^2 + y^2 = [2\alpha - (x+y)]^2 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow x^2 + y^2 = (\alpha - x)^2 + (\alpha - y)^2 + 2(\alpha - x)(\alpha - y) \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow x^2 + y^2 = (\alpha^2 - 2\alpha x + x^2) + (\alpha^2 - 2\alpha y + y^2) +$

  $+2(\alpha - x)(\alpha - y) \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow (\alpha - x)(\alpha - y) = \alpha x + \alpha y - \alpha^2 \quad (1)$

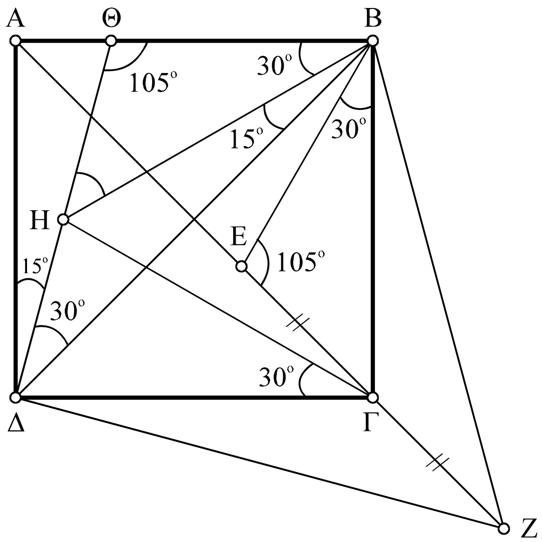
- $$\varepsilon\varphi(\omega + \varphi) = \frac{\varepsilon\varphi\omega + \varepsilon\varphi\varphi}{1 - \varepsilon\varphi\omega \cdot \varepsilon\varphi\varphi} = \frac{\frac{\alpha - x}{\alpha} + \frac{\alpha - y}{\alpha}}{1 - \frac{\alpha - x}{\alpha} \cdot \frac{\alpha - y}{\alpha}} = \frac{\frac{2\alpha - x - y}{\alpha}}{\frac{\alpha^2 - (\alpha - x)(\alpha - y)}{\alpha^2}} \overset{(1)}{=} \frac{\alpha(2\alpha - x - y)}{\alpha^2 - \alpha x - \alpha y + \alpha^2} = 1.$$

Άρα $\omega + \varphi = 45^o$, οπότε $E\hat{A}Z = 45^o$.

1.11 Στη διαγώνιο ΑΓ ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ παίρνουμε σημείο Ε έτσι, ώστε $\Gamma\hat{B}E = 30^o$. Στην προέκταση της διαγωνίου ΑΓ, προς το Γ, παίρνουμε σημείο Ζ, ώστε $\Gamma Z = \Gamma E$. Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο ΖΒΔ είναι ισόπλευρο.

Λύση

Θεωρούμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΒΓΗ. Αν η ευθεία ΔΗ τέμνει την ΑΒ στο σημείο Θ, τότε:



- Το σημείο Η βρίσκεται στη μεσοκάθετη του ΒΓ, άρα και του ΑΔ, και έτσι το Η είναι μέσο του ΔΘ, αφού $H\Delta = HA$ και $\hat{A} = 90^o$.
- Επειδή $\Gamma H = \Gamma\Delta$ και η γωνία $\Delta\hat{\Gamma}H$ είναι ίση με 30^o, η γωνία ΑΔΘ είναι ίση με $90^o - 75^o = 15^o$. Άρα η γωνία ΘΗΒ είναι ίση με 45^o.
- Τα τρίγωνα ΒΓΕ και ΘΒΗ είναι ίσα, διότι $B\Gamma = BH$ και οι προσκείμενες σε αυτές γωνίες είναι ίσες (οι γωνίες αυτές είναι 45^o και 30^o αντίστοιχα). Επομένως $BE = B\Theta$, $E\Gamma = H\Theta$ και έτσι:

  $$ZE = 2E\Gamma = 2H\Theta = \Delta\Theta$$

  δηλαδή $ZE = \Delta\Theta$.
- Τα τρίγωνα ΘΒΔ και ΕΒΖ είναι τώρα ίσα, διότι $\Theta\Delta = EZ$, $\Theta B = EB$ και οι γωνίες $B\hat{\Theta}\Delta$, $B\hat{E}Z$ είναι ίσες με 105^o η καθεμιά. Άρα $B\Delta = BZ$. Αλλά $BZ = Z\Delta$, οπότε $B\Delta = BZ = Z\Delta$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

1.12 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΔ εκτός αυτού, καθώς και το ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΕ στο εξωτερικό του $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$, με $E\hat{A}\Gamma = E\hat{\Gamma}A = 30^o$. Αν Μ είναι το μέσο του ΒΓ, να αποδειχθεί ότι $\Delta\hat{M}E = 90^o$.

Λύση

Έστω Ζ το συμμετρικό του Δ ως προς το Μ. Το ΒΔΓΖ είναι παραλληλόγραμμο, διότι οι διαγώνιες διχοτομούνται. Επομένως είναι:

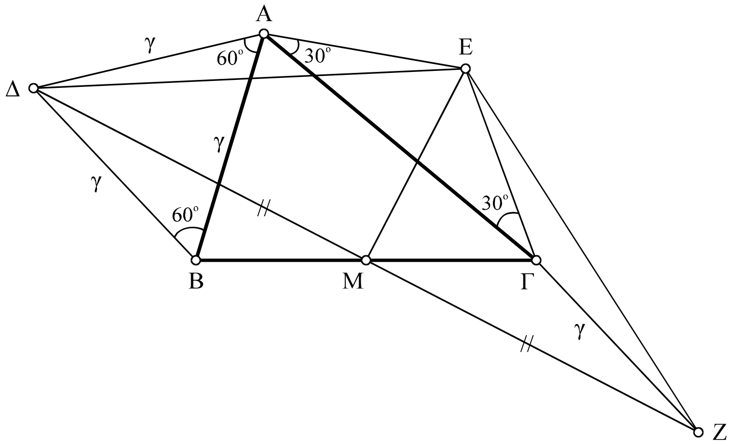
$$\Gamma Z = B\Delta = A\Delta \quad \text{και} \quad B\hat{\Gamma}Z = \Gamma\hat{B}\Delta = 60^o + \hat{B}$$

Τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $\Gamma E Z$ είναι ίσα, διότι:

- $A\Delta = \Gamma Z = \gamma$ και $AE = \Gamma E$

- $E\hat{\Gamma}Z = 360^o - E\hat{\Gamma}A - A\hat{\Gamma}B - B\hat{\Gamma}Z = 360^o - 30^o - \hat{\Gamma} - (60^o + \hat{B}) = 270^o - (\hat{B} + \hat{\Gamma}) =$

  $= 270^o - (180^o - \hat{A}) = 90^o + \hat{A} = \Delta\hat{A}E$



Άρα είναι και $E\Delta = EZ$ και αφού στο ισοσκελές τρίγωνο ΕΔΖ η ΕΜ είναι διάμεσος, είναι και ύψος. Είναι δηλαδή $\Delta\hat{M}E = 90^o$.

1.13 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ με γωνία $\hat{A} = 20^o$. Πάνω στην πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $\Delta\hat{B}\Gamma = 70^o$ και πάνω στην πλευρά ΑΒ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $E\hat{\Gamma}B = 60^o$. Να αποδειχθεί ότι $E\hat{\Delta}B = 20^o$.

Λύση

Η παράλληλη από το Ε προς την πλευρά ΒΓ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Η και οι ΒΗ και ΓΕ τέμνονται στο Ο. Τότε είναι $B\hat{O}\Gamma = 60^o = 2B\hat{\Delta}\Gamma$, οπότε το Ο είναι περίκεντρο στο τρίγωνο ΒΔΓ. Άρα:

$O\hat{\Delta}\Gamma = O\hat{\Gamma}\Delta = 20^o$, $E\hat{O}\Delta = 40^o$

$\Delta\hat{O}H = 20^o$ και $O\hat{\Delta}B = O\hat{B}\Delta = 10^o$

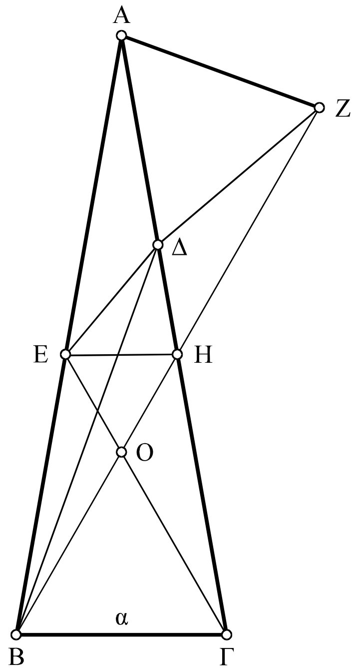
Επομένως έχουμε ότι $OH = H\Delta$, οπότε $HE = H\Delta$ (αφού το τρίγωνο ΟΕΗ είναι ισόπλευρο), και:

$$E\hat{\Delta}H = \frac{180^o - 80^o}{2} = 50^o$$

Τέλος:

$$E\hat{\Delta}B = E\hat{\Delta}H - O\hat{\Delta}H - O\hat{\Delta}B = 50^o - 20^o - 10^o = 20^o$$

Άλλος τρόπος



Παίρνουμε σημείο Ζ, με $B\hat{A}Z = 80^o$, και $AZ = B\Gamma = \alpha$. Τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒΖ είναι ίσα (ΑΒ – κοινή, $A\hat{B}\Gamma = B\hat{A}Z = 80^o$, $B\Gamma = AZ = \alpha$). Άρα $A\hat{B}Z = 20^o$, οπότε:

$$\Delta\hat{B}Z = 10^o = \Delta\hat{B}A$$

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΒΑΖ η ΒΔ διχοτομεί, λοιπόν, τη γωνία $\hat{B}$, άρα είναι μεσοκάθετος της ΑΖ. Έτσι $\Delta A = \Delta Z$ και το τρίγωνο ΔΑΖ είναι ισόπλευρο με πλευρά α (είναι και $Z\hat{A}\Delta = 60^o$). Ίσο με το $\overset{\Delta}{\Delta A Z}$ είναι και το ισόπλευρο τρίγωνο ΟΒΓ. Ακόμη είναι $B\hat{\Delta}\Gamma = 30^o$, από το τρίγωνο ΔΒΓ.

Τα τρίγωνα ΕΟΒ, ΔΗΖ είναι ίσα ($E\hat{B}O = \Delta\hat{Z}H = 20^o$, $OB = \Delta Z = \alpha$, $E\hat{O}B = H\hat{\Delta}Z = 120^o$), οπότε $EO = \Delta H$. Οι ΕΗ, ΒΓ είναι παράλληλες, διότι από τα ίσα τρίγωνα ΑΕΓ, ΑΗΒ παίρνουμε ότι $AE = AH$, οπότε το ΑΗΕ είναι ισοσκελές με $A\hat{E}H = 80^o = A\hat{B}\Gamma$. Άρα το τρίγωνο ΕΟΗ είναι ισόπλευρο, οπότε τελικά παίρνουμε:

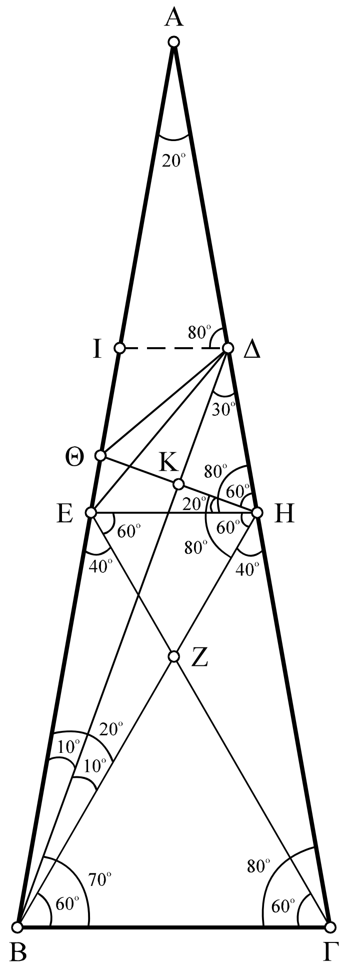
$$\Delta H = EO = EH$$

Το τρίγωνο ΔΕΗ είναι ισοσκελές τρίγωνο, με γωνία κορυφής $E\hat{H}\Delta = 80^o$. Θα είναι λοιπόν:

$$E\hat{\Delta}H = 50^o \quad \text{και} \quad E\hat{\Delta}B = 50^o - 30^o = 20^o$$

Η λύση αυτή έγινε από τον Λεωνίδα Θαρραλίδη.

Άλλος τρόπος



Φέρνουμε την ΒΗ έτσι, ώστε $\Gamma\hat{B}H = E\hat{\Gamma}B = 60^o$. Από το σχήμα προκύπτει εύκολα ότι $B\hat{\Delta}\Gamma = 30^o$ (ως τρίτη γωνία του τριγώνου ΒΔΓ, στο οποίο $\Gamma\hat{B}\Delta = 70^o$ εκ κατασκευής και $\Delta\hat{\Gamma}B = 80^o$, ως γωνία της βάσης του ισοσκελούς $\overset{\Delta}{BA\Gamma}$, του οποίου η γωνία της κορυφής είναι 20^o). Τα τρίγωνα ΒΖΓ και ΕΖΗ είναι ισόπλευρα.

Στην ΑΒ θεωρούμε το σημείο Θ έτσι, ώστε $B\Theta = BH$. Τότε:

$$B\hat{H}\Theta = H\hat{\Theta}B = 80^o$$

επειδή το $\overset{\Delta}{BH\Theta}$ είναι ισοσκελές και η γωνία της κορυφής του είναι $\Theta\hat{B}H = 20^o$. Είναι όμως και:

$$\Theta\hat{E}H = E\hat{B}\Gamma = 80^o = E\hat{\Theta}H = B\hat{H}\Theta$$

Συνεπώς το $\overset{\Delta}{\Theta HE}$ είναι ισοσκελές, με:

$$H\Theta = HE \qquad (1)$$

Στο τρίγωνο ΕΘΗ είναι $\Theta\hat{H}E = 20^o$, οπότε $\Theta\hat{H}\Delta = 60^o$ και επειδή:

$$K\hat{H}\Delta + K\hat{\Delta}H = 60^o + 30^o = 90^o$$

προκύπτει ότι η ΒΔ είναι κάθετη στη ΒΘ. Επειδή $BH = B\Theta$, η ΒΔ είναι μεσοκάθετος της ΘΗ. Άρα $\Delta\Theta = \Delta H$, οπότε $\Theta\hat{\Delta}K + H\hat{\Delta}K = 30^o + 30^o = 60^o$ και έτσι το $\overset{\Delta}{\Theta\Delta H}$ είναι ισόπλευρο. Επομένως $\Theta\Delta = \Theta H = \Delta H = EH,$ από τη σχέση (1). Συνεπώς το $\overset{\Delta}{\Delta HE}$ είναι ισοσκελές, οπότε:

$$E\hat{\Delta}H = H\hat{E}\Delta = \frac{180^o - E\hat{H}\Delta}{2} = \frac{180^o - 80^o}{2} = 50^o$$

Αφού $E\hat{\Delta}H = 50^o$, παίρνουμε τελικά ότι:

$$E\hat{\Delta}B = E\hat{\Delta}H - B\hat{\Delta}H = 50^o - 30^o = 20^o$$

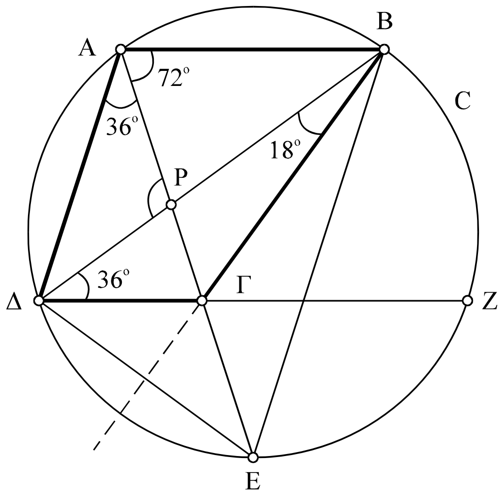
Η λύση αυτή έγινε από τον καλό φίλο και συνάδελφο Πάνο Γιαννόπουλο.

1.14 Σε ένα κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι $\Gamma\hat{B}\Delta = 18^o$, $B\hat{A}\Gamma = 72^o$ και $\Delta\hat{A}\Gamma = B\hat{\Delta}\Gamma = 36^o$. Αν οι διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο σημείο Ρ, να υπολογιστεί η γωνία $A\hat{P}\Delta$.

(JBMO – 2007)

Λύση

Θεωρούμε τον περιγεγραμμένο κύκλο C του τριγώνου ΑΒΔ. Έστω ότι οι ΑΓ, ΔΓ τέμνουν τον C στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα.



- Αφού $\Delta\hat{B}E = \Delta\hat{A}E = 36^o$ και

  $$\Delta\hat{B}\Gamma = 18^o = \frac{1}{2}\Delta\hat{B}\Gamma$$

  η ΒΓ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{B}E$.

- Αφού $B\hat{\Delta}E = B\hat{A}E = 72^o$ και

  $$B\hat{\Delta}Z = 36^o = \frac{1}{2}B\hat{\Delta}E$$

  η ΔΖ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{\Delta}E$.

- Αφού οι ΒΓ, ΔΖ είναι διχοτόμοι των γωνιών $\Delta\hat{B}E$, $B\hat{\Delta}E$ αντίστοιχα προκύπτει ότι το Γ είναι το έγκεντρο του τριγώνου ΒΔΕ. Είναι όμως:

  $$\overset{\frown}{\Delta AB} = 360^o - 2\cdot(36^o + 72^o) = 144^o$$

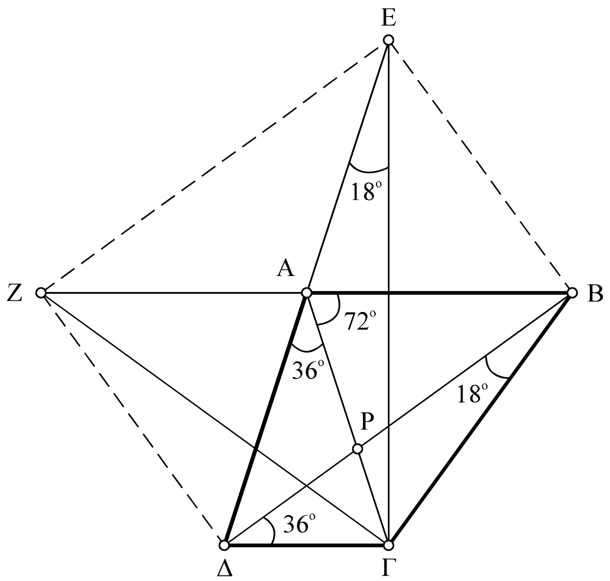
  οπότε $\Delta\hat{E}B = 72^o$. Επομένως βρίσκουμε ότι:

  $$\Delta\hat{E}A = B\hat{E}A = \frac{72^o}{2} = 36^o$$

  Αφού $\overset{\frown}{A\Delta} = 2\cdot 36^o = 72^o$ και $\overset{\frown}{BZE} = 2\cdot 72^o = 144^o$, είναι:

  $$A\hat{P}\Delta = \frac{\overset{\frown}{A\Delta} + \overset{\frown}{BZE}}{2} = \frac{72^o + 144^o}{2} = 108^o$$

Άλλος τρόπος



Στις ημιευθείες ΔΑ, ΒΑ παίρνουμε σημεία Ε, Ζ αντιστοίχως τέτοια, ώστε $ΑΓ = ΑΕ = ΑΖ$. Επειδή:

$$Δ\hat{Ε}Γ = \frac{Δ\hat{Α}Γ}{2} = 18^o = Γ\hat{Β}Δ$$

το τετράπλευρο ΔΕΒΓ είναι εγγράψιμο. Όμοια, επειδή:

$$Α\hat{Ζ}Γ = \frac{Β\hat{Α}Γ}{2} = 36^o = Β\hat{Δ}Γ$$

το τετράπλευρο ΓΒΖΔ είναι εγγράψιμο. Άρα τα σημεία Β, Γ, Δ, Ζ, Ε βρίσκονται στον κύκλο (Α, ΑΓ). Άρα $ΑΓ = ΑΔ$ και έτσι:

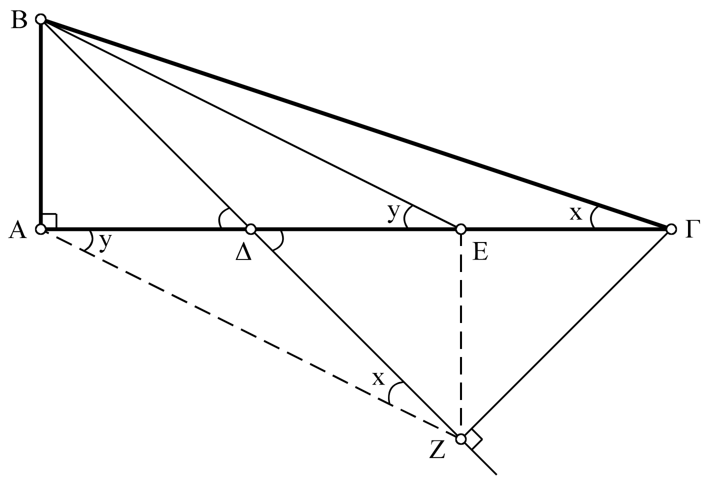
$$Α\hat{Γ}Δ = Α\hat{Δ}Γ = \frac{180^o - 36^o}{2} = 72^o$$

Άρα $Α\hat{Δ}Ρ = 36^o$ και $Α\hat{Ρ}Δ = 108^o$.

1.15 Στην πλευρά ΑΓ ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ $(\hat{Α} = 90^o)$, με $ΑΓ = 3ΑΒ$, παίρνουμε σημεία Δ και Ε, ώστε $ΑΔ = ΔΕ = ΕΓ$. Να αποδειχθεί ότι:

$$\mathbf{Α\hat{Γ}Β + Α\hat{Ε}Β = 45^o}$$

Λύση



Φέρουμε $ΓΖ \perp ΒΔ$, οπότε το ΑΖΓΒ είναι εγγράψιμο. Άρα $Α\hat{Ζ}Β = Α\hat{Γ}Β = x$. Επειδή $Ζ\hat{Δ}Γ = Α\hat{Δ}Β = 45^o$, το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΖΓ είναι ισοσκελές και επειδή η ΖΕ είναι διάμεσος, είναι:

$ΖΕ \perp ΓΔ$ και

$ΖΕ = ΔΕ = ΑΒ$

Αφού $AB = // EZ$, το ABEZ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $A\hat{E}B = E\hat{A}Z = y$. Έχουμε οπότε:

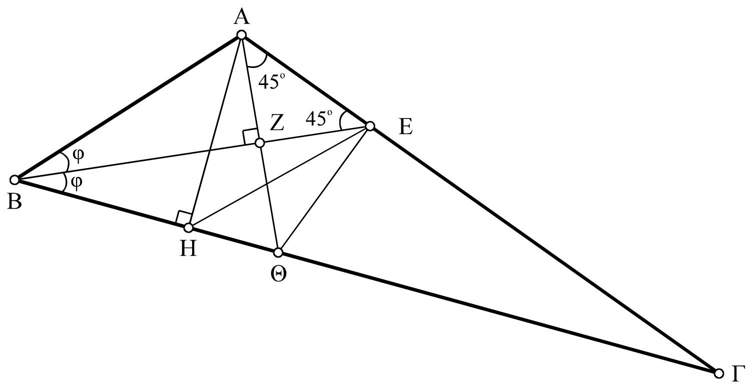
$$A\hat{\Delta}B = 45^o \Leftrightarrow \Delta\hat{A}Z + \Delta\hat{Z}A = 45^o \Leftrightarrow x + y = 45^o$$

δηλαδή $A\hat{\Gamma}B + A\hat{E}B = 45^o$.

Στην άσκηση αυτή μπορούν να βρεθούν και άλλες λύσεις με πιο στοιχειώδη μέσα.

1.16 Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε το ύψος ΑΗ και τη διχοτόμο ΒΕ. Αν $B\hat{E}A = 45^o$, να αποδειχθεί ότι $\Gamma\hat{H}E = 45^o$.

Λύση

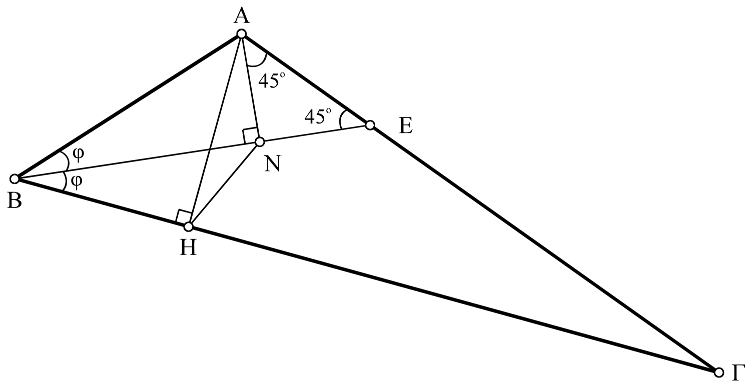


Αν $AZ \perp BE$, τότε $ZE = ZA = Z\Theta$, οπότε:

$$A\hat{E}\Theta = 90^o = A\hat{H}\Gamma$$

Το ΑΗΘΕ είναι επομένως εγγράψιμο, οπότε $E\hat{H}\Theta = E\hat{A}\Theta = 45^o$.

Άλλος τρόπος



Αν $AN \perp BE$, το ΑΝΗΒ είναι εγγράψιμο. Άρα $NA = NH$ (αφού $N\hat{B}A = \varphi = N\hat{B}H$). Επειδή $NH = NA = NE$, το Ν είναι περίκεντρο στο τρίγωνο ΑΗΕ, οπότε:

$$A\hat{H}E = \frac{1}{2} A\hat{N}E = 45^o$$

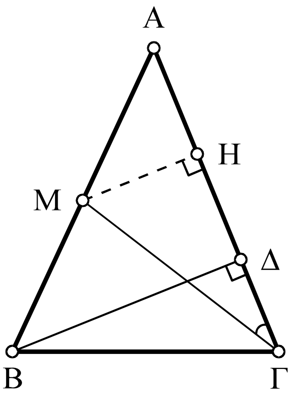
Και άρα $\Gamma\hat{H}E = 45^o$, αφού $A\hat{H}\Gamma = 90^o$.

1.17 Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε το ύψος ΒΔ και τη διάμεσο ΓΜ. Αν ισχύει $B\Delta = \Gamma M$, να αποδειχθεί ότι $A\hat{\Gamma}M = 30^o$ και αντιστρόφως.

Λύση

Φέρνουμε τη $MH \perp A\Gamma$. Επειδή το Μ είναι μέσο του ΑΒ και ΜΗ // ΒΔ, είναι:

$$MH = \frac{B\Delta}{2} = \frac{\Gamma M}{2}$$



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΗΓΜ είναι $MH = \frac{M\Gamma}{2}$. Άρα:

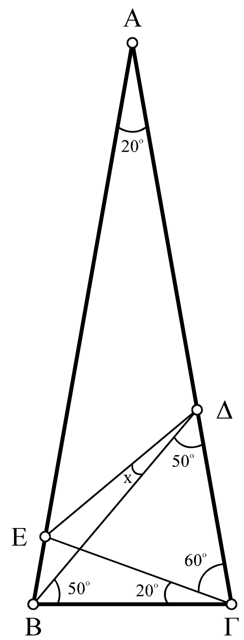
$$M\hat{\Gamma}A = 30^o$$

Το αντίστροφο αποδεικνύεται παρόμοια. Αφού $M\hat{\Gamma}A = 30^o$, είναι $MH = \frac{M\Gamma}{2}$. Αλλά $MH = \frac{B\Delta}{2}$. Άρα $M\Gamma = B\Delta$.

1.18 Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, με $AB = A\Gamma$, είναι $\hat{A} = 20^o$. Αν Δ και Ε είναι σημεία των πλευρών ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα τέτοια, ώστε:

$\Delta\hat{B}\Gamma = 50^o$ και $E\hat{\Gamma}B = 20^o$, να αποδειχθεί ότι $E\hat{\Delta}B = 10^o$.

Λύση



- Στο τρίγωνο ΓΕΒ είναι:

  $$\hat{\Gamma} = 20^o \text{ και } \hat{B} = 80^o$$

  οπότε:

  $$B\hat{E}\Gamma = 180^o - 20^o - 80^o = 80^o = E\hat{B}\Gamma$$

  Το τρίγωνο αυτό είναι λοιπόν ισοσκελές, οπότε $\Gamma B = \Gamma E$.

- Στο τρίγωνο ΓΒΔ είναι:

  $$\hat{\Gamma} = 80^o \text{ και } \Gamma\hat{B}\Delta = 50^o$$

  οπότε:

$$B\hat{\Delta}\Gamma = 180^o - 80^o - 50^o = 50^o = \Delta\hat{B}\Gamma$$

Το τρίγωνο λοιπόν αυτό είναι ισοσκελές, οπότε $\Gamma\Delta = \Gamma B$.
Από τις σχέσεις $\Gamma B = \Gamma E$ και $\Gamma\Delta = \Gamma B$ συμπεραίνουμε ότι:

$$\Gamma E = \Gamma\Delta$$

Επειδή:

$$E\hat{\Gamma}\Delta = B\hat{\Gamma}A - B\hat{\Gamma}E = 80^o - 20^o = 60^o$$

το τρίγωνο ΕΓΔ είναι ισόπλευρο. Άρα $E\hat{\Delta}\Gamma = 60^o$ και έτσι:

$$x = 60^o - 50^o = 10^o$$

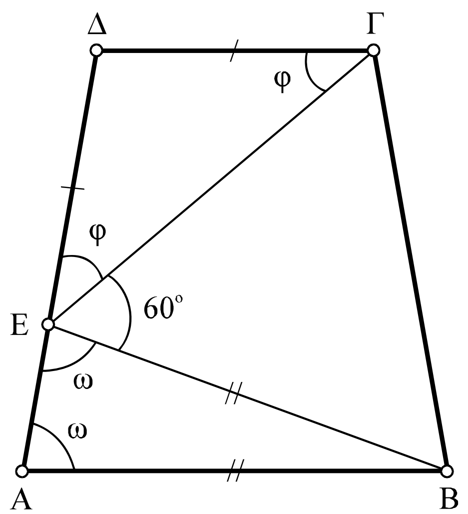
1.19 Στο διπλανό σχήμα, δίνεται ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ και σημείο Ε στην πλευρά ΑΔ τέτοιο, ώστε το τρίγωνο ΒΕΓ να είναι ισόπλευρο και τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΓΔΕ να είναι ισοσκελή, με $AB = BE$ και $\Delta\Gamma = \Delta E$. Να υπολογιστεί η γωνία $B\hat{A}\Delta = \omega$.

(Διαγωνισμός ΕΜΕ, Θαλής – 2001)

Λύση

Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΓΔΕ είναι ισοσκελή, με $AB = BE$ και $\Delta\Gamma = \Delta E$, θα έχουμε:

$$A\hat{E}B = B\hat{A}E = \omega \quad \text{και} \quad \Delta\hat{E}\Gamma = \Delta\hat{\Gamma}E = \varphi$$



Επιπλέον έχουμε:

$$\omega + \varphi + 60^o = A\hat{E}\Delta = 180^o$$

οπότε $\varphi = 120^o - \omega$. Επίσης:

$$E\hat{\Delta}\Gamma = 180^o - 2\varphi = 180^o - 2(120^o - \omega) =$$

$$= 180^o - 240^o + 2\omega = 2\omega - 60^o$$

Επειδή ΑΒ // ΔΓ, παίρνουμε:

$$E\hat{A}B + E\hat{\Delta}\Gamma = 180^o \Leftrightarrow \omega + (2\omega - 60^o) = 180^o \Leftrightarrow 3\omega = 240^o \Leftrightarrow \omega = 80^o$$

1.20 Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ είναι $\hat{Α} = 108^o$. Φέρνουμε τη διχοτόμο ΓΔ της $\hat{Γ}$ και την κάθετη στη διχοτόμο στο Δ, που τέμνει τη ΒΓ στο Ε. Να αποδειχθεί ότι $ΒΕ = ΑΔ$.

(ΕΜΕ, Ευκλείδης – 1997)

Λύση

Είναι $\hat{Α} = 108^o$, οπότε:

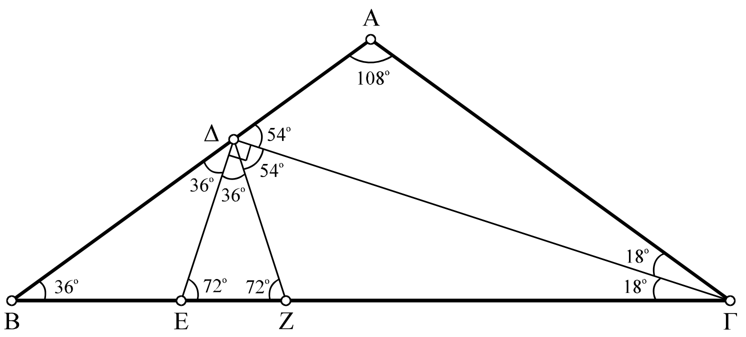
$$\hat{Β} + \hat{Γ} = 180^o - 108^o = 72^o$$

Όμως $\hat{Β} = \hat{Γ}$, οπότε:

$$\hat{Β} = \hat{Γ} = 36^o$$

Επειδή η ΓΔ είναι διχοτόμος, θα είναι:

$$Δ\hat{Γ}Α = Δ\hat{Γ}Ε = 18^o$$



Άρα:

$$Α\hat{Δ}Γ = 180^o - 108^o - 18^o = 180^o - 126^o = 54^o$$

Επίσης:

$$Β\hat{Δ}Ε = 180^o - 54^o - 90^o = 180^o - 144^o = 36^o$$

Επειδή $\hat{Β} = Β\hat{Δ}Ε = 36^o$, το τρίγωνο ΕΔΒ είναι ισοσκελές, οπότε $ΒΕ = ΕΔ$. Θεωρούμε τώρα το σημείο Ζ, ώστε $Γ\hat{Δ}Ζ = 54^o$. Επομένως είναι:

- $Ε\hat{Δ}Ζ = 90^o - 54^o = 36^o$
- $Δ\hat{Ζ}Ε = Ζ\hat{Δ}Γ + Ζ\hat{Γ}Δ = 54^o + 18^o = 72^o$

Επειδή $\Delta\hat{E}Z = \Delta\hat{Z}E = 72^o$, το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισοσκελές. Άρα $\Delta E = \Delta Z$. Όμως τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΖΔΓ είναι ίσα, διότι:

- ΔΓ - κοινή
- $A\hat{\Delta}\Gamma = Z\hat{\Delta}\Gamma = 54^o$
- $A\hat{\Gamma}\Delta = Z\hat{\Gamma}\Delta = 18^o$

Άρα $\Delta Z = \Delta A$. Από τις σχέσεις:

$$BE = E\Delta\ ,\ E\Delta = \Delta Z \text{ και } \Delta Z = \Delta A$$

προκύπτει ότι: $BE = A\Delta$

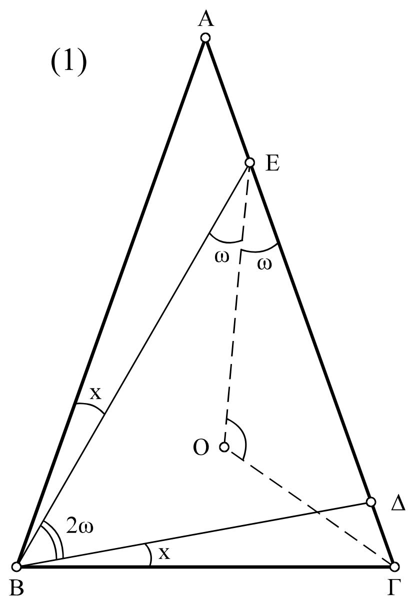
1.21 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ και δύο εσωτερικά σημεία Δ, Ε της πλευράς ΑΓ τέτοια, ώστε $\Delta B = \Delta E$ και $\Gamma\hat{B}\Delta = A\hat{B}E$. Αν Ο είναι το έγκεντρο του τριγώνου ΕΒΓ, να αποδειχθεί ότι $\Gamma\hat{O}E = 120^o$.

(JBMO – 2006)

Λύση

Έστω $\Delta\hat{E}B = 2\omega$. Επειδή $\Delta E = \Delta B$, είναι $\Delta\hat{B}E = 2\omega$. Αλλά:

$$E\hat{O}\Gamma = 90^o + \frac{E\hat{B}\Gamma}{2} = 90^o + \frac{2\omega + x}{2} \qquad (1)$$



Στο τρίγωνο ΒΕΑ είναι:

$$B\hat{E}\Gamma = B\hat{A}E + E\hat{B}A \Leftrightarrow 2\omega = \hat{A} + x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\omega = (180^o - 2\hat{B}) + x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\omega = 180^o - 2(2x + 2\omega) + x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6\omega = 180^o - 3x \Leftrightarrow 3x + 6\omega = 180^o \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + 2\omega = 60^o \qquad (2)$$

Έτσι η (1) δίνει:

$$E\hat{O}\Gamma = 90^o + \frac{E\hat{B}\Gamma}{2} =$$

$$= 90^o + \frac{x + 2\omega}{2} \overset{(2)}{=} 90^o + \frac{60^o}{2} = 120^o$$