Γεωμετρία - Ασκήσεις με γωνίες

♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥

Χαρακτηριστικές ασκήσεις με γωνίες που αρέσουν και γοητεύουν τους μαθητές που ασχολούνται με τους μαθηματικούς διαγωνισμούς !

Μπάμπης Στεργίου – Φεβρουάριος 2012

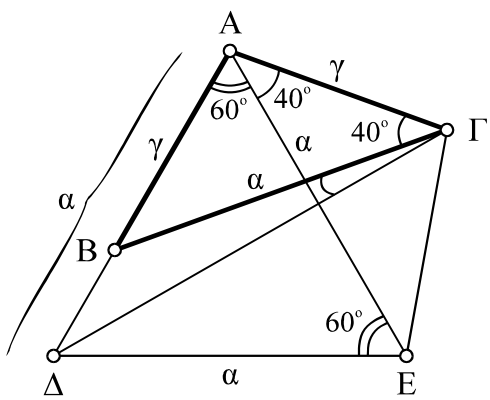
1.22 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$, με $\hat{A} = 100^o$. Στην προέκταση της πλευράς ΑΒ, προς το Β, παίρνουμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $A\Delta = B\Gamma$. Να αποδειχθεί ότι $B\hat{\Gamma}\Delta = 10^o$.

(ΗΠΑ – 1990)

Λύση

Θεωρούμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΔΕ. Προφανώς:

- $E\hat{A}\Gamma = 100^o - 60^o = 40^o$
- $AB = A\Gamma = \gamma$, $A\Delta = AE = \Delta E = B\Gamma = \alpha$



Τα τρίγωνα ΑΓΕ και ΑΒΓ είναι ίσα, διότι ΑΓ κοινή, $AE = \Gamma B$ και $\Gamma\hat{A}E = A\hat{\Gamma}B = 40^o$.

Επομένως $\Gamma E = \Gamma A = \gamma$. Τώρα, τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΕΔΓ είναι ίσα, διότι έχουν τις πλευρές τους ίσες, μία προς μία. Άρα:

$$\Delta\hat{\Gamma}A = \Delta\hat{\Gamma}E = \frac{180^o - 2\cdot 40^o}{2} = 50^o$$

αφού στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΕ $(\Gamma A = \Gamma E = \gamma)$ είναι:

$$A\hat{\Gamma}E = 180^o - 2\cdot 40^o = 100^o$$

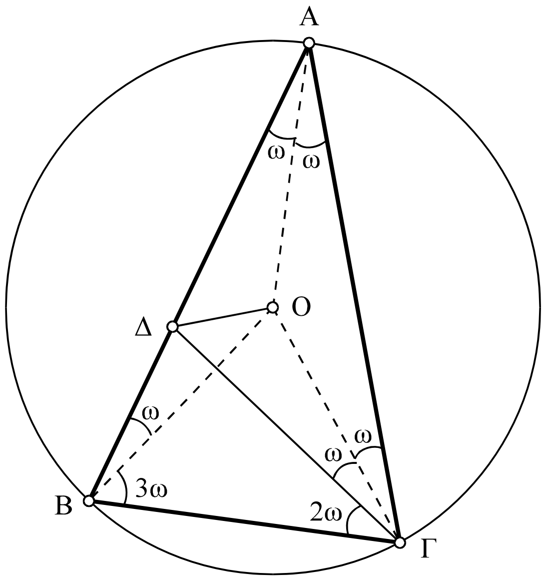
Επομένως:

$$B\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{\Gamma}\Delta - A\hat{\Gamma}B = 50^o - 40^o = 10^o$$

1.23 Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τη διχοτόμο ΓΔ. Αν το περίκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ είναι έγκεντρο του τριγώνου ΑΔΓ, να αποδειχθεί ότι $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 72^o$.

Λύση

Επειδή το Ο είναι το περίκεντρο του $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$, είναι $OA = OB = O\Gamma$. Αν θέσουμε $O\hat{A}\Gamma = \omega$, τότε είναι:



- $O\hat{\Gamma}A = O\hat{A}\Gamma = \omega$, διότι $OA = O\Gamma$,
- $O\hat{\Gamma}\Delta = O\hat{\Gamma}A = \omega$, διότι το Ο είναι έγκεντρο του $\overset{\Delta}{A\Delta\Gamma}$ και έτσι οι ΓΟ, ΑΟ διχοτομούν τις γωνίες $A\hat{\Gamma}\Delta$, $\Gamma\hat{A}\Delta$, αντίστοιχα,
- $B\hat{\Gamma}\Delta = \Delta\hat{\Gamma}A = 2\omega$, διότι η ΓΔ είναι διχοτόμος της $B\hat{\Gamma}A$,
- $O\hat{A}B = O\hat{A}\Gamma = \omega$, διότι η ΑΟ διχοτομεί τη $\Delta\hat{A}\Gamma$,
- $O\hat{B}A = O\hat{A}B = \omega$, διότι $OA = OB$,
- $O\hat{B}\Gamma = O\hat{\Gamma}B = 3\omega$, διότι $OB = O\Gamma$.

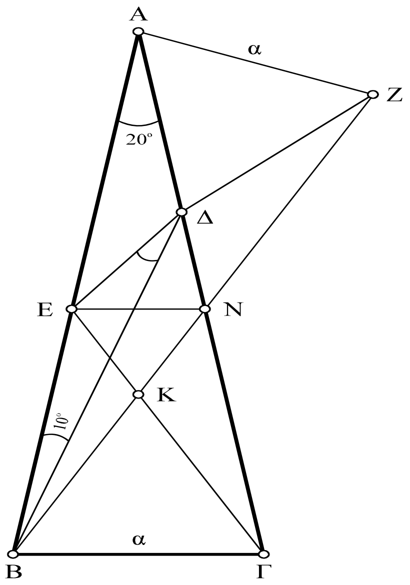
Στο τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ είναι:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 2\omega + 4\omega + 4\omega = 180^o \Leftrightarrow 10\omega = 180^o \Leftrightarrow \omega = 18^o \Leftrightarrow \hat{A} = 36^o$$

Άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 4\omega = 4 \cdot 18^o = 72^o$ και $\hat{A} = 36^o$.

1.24 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = A\Gamma$) με γωνία $\hat{A} = 20^o$. Πάνω στην πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $\Delta\hat{B}\Gamma = 70^o$ και πάνω στην πλευρά ΑΒ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $E\hat{\Gamma}B = 60^o$. Να βρεθεί η γωνία $E\hat{\Delta}B$.

Λύση



Παίρνουμε σημείο Ζ με $B\hat{A}Z = 80^o$ και $AZ = B\Gamma = \alpha$. Τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒΖ είναι ίσα (ΑΒ κοινή, $A\hat{B}\Gamma = B\hat{A}Z = 80^o$ και $B\Gamma = AZ = \alpha$). Άρα $A\hat{B}Z = 20^o$, οπότε $\Delta\hat{B}Z = 10^o = \Delta\hat{B}A$. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΒΑΖ, η ΒΔ διχοτομεί τη γωνία $\hat{B}$. Άρα είναι μεσοκάθετος της ΑΖ. Έτσι:

$$\Delta A = \Delta Z$$

και το τρίγωνο ΔΑΖ είναι ισόπλευρο, πλευράς α (είναι και $Z\hat{A}\Delta = 60^o$). Ίσο του είναι και το ισόπλευρο τρίγωνο ΚΒΓ (διότι δύο γωνίες του είναι ίσες με 60^o). Ακόμη $B\hat{\Delta}\Gamma = 30^o$, από το αντίστοιχο τρίγωνο.

Τα τρίγωνα ΕΚΒ, ΔΝΖ είναι ίσα ($E\hat{B}K = \Delta\hat{Z}N =$ $= 20^o$, $KB = Z\Delta = \alpha$, $E\hat{K}B = Z\hat{\Delta}N = 120^o$). Άρα:

$$EK = \Delta N$$

Οι ΕΝ, ΒΓ είναι παράλληλες, οπότε το τρίγωνο ΕΚΝ είναι ισόπλευρο. Άρα τελικά είναι:

$$\Delta N = EK = EN$$

Το $\overset{\Delta}{\Delta EN}$ είναι επομένως ισοσκελές τρίγωνο, με γωνία κορυφής $E\hat{N}\Delta = 80^o$. Θα είναι λοιπόν $E\hat{\Delta}N = 50^o$, οπότε $E\hat{\Delta}B = 50^o - 30^o = 20^o$.

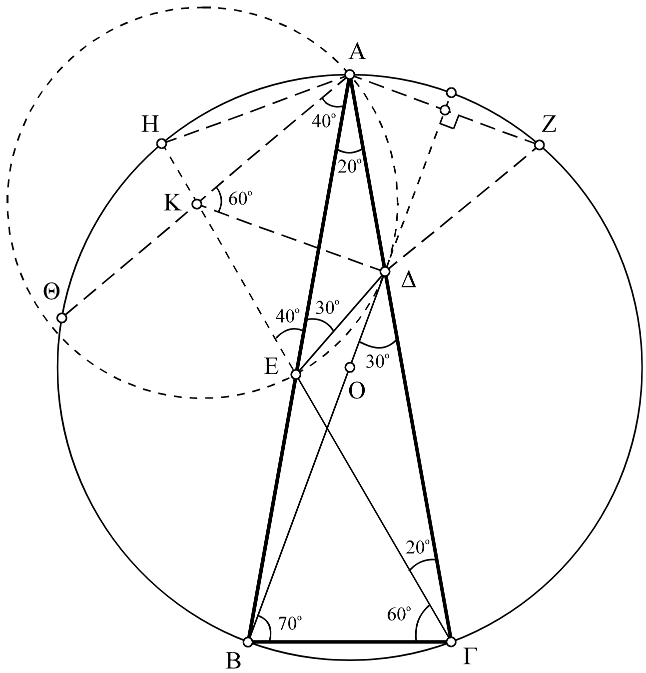
Σημείωση

Από τα ίσα τρίγωνα ΑΕΓ, ΑΝΒ είναι $AE = AN$, οπότε το ΑΝΕ είναι ισοσκελές, με:

$$A\hat{E}N = 80^o = A\hat{B}\Gamma$$

Άλλος τρόπος

Επειδή $20^o = 180^o : 9$, θεωρούμε κανονικό 9-γωνο, του οποίου μια κορυφή είναι το Α και μια πλευρά η ΒΓ. Έστω Θ, Η, Α, Ζ μερικές διαδοχικές κορυφές του 9-γώνου αυτού.



Από τη σχέση:

$$A\hat{B}\Delta = 80^o - 70^o = 10^o$$

προκύπτει ότι η ευθεία ΒΔ διχοτομεί το τόξο ΑΖ και είναι μεσοκάθετη στην πλευρά ΑΖ του κανονικού 9-γώνου. Έτσι το τρίγωνο ΑΔΖ είναι ισόπλευρο (γιατί $\Gamma\hat{A}Z = 60^o$), οπότε έχουμε:

$$A\Delta = AZ \quad (1)$$

- Έστω Κ το σημείο τομής των ΓΕΗ και ΑΘ. Επειδή $H\hat{A}\Theta = 20^o$ και $A\hat{H}K = 80^o$ προκύπτει ότι $A\hat{K}H = 80^o$ και άρα, από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΗΚ, έχουμε $AH = AK$ (2).

Από τις (1) και (2) και από τη σχέση $AZ = AH$, παίρνουμε $AK = A\Delta$ (3).

Από την (3) και επειδή $K\hat{A}\Delta = 80^o - 20^o = 60^o$, προκύπτει ότι το τρίγωνο ΑΚΔ είναι ισόπλευρο. Επομένως έχουμε $KA = K\Delta$ (4).

- Το τρίγωνο ΚΑΕ είναι ισοσκελές, διότι $K\hat{E}A = 40^o = B\hat{A}\Theta \equiv E\hat{A}K$, οπότε:

$$KA = KE \qquad (5)$$

Από (4), (5), συμπεραίνουμε ότι τα σημεία Α, Δ, Ε ανήκουν στον κύκλο (Κ), με κέντρο το Κ, και έτσι παίρνουμε:

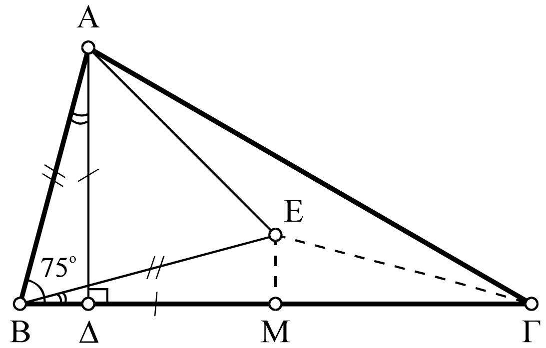
$$A\hat{E}\Delta = \frac{A\hat{K}\Delta}{2} = 30^o \qquad (6)$$

Από τη σχέση (6) και επειδή $\Delta\hat{B}E = 10^o$, από το τρίγωνο ΒΔΕ προκύπτει ότι $E\hat{\Delta}B = 20^o$.

1.25 Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ, με $\hat{B} = 75^o$, φέρνουμε το ύψος ΑΔ. Αν $B\Gamma = 2A\Delta$, να αποδειχθεί ότι $\hat{\Gamma} = 30^o$.

Λύση

Στο εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΕ. Έστω Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ. Επειδή:



$$AB = BE, \quad A\Delta = BM\left(=\frac{B\Gamma}{2}\right) \quad \text{και}$$

$$B\hat{A}\Delta = E\hat{B}M = 15^o$$

τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΒΜΕ είναι ίσα. Επομένως:

$$E\hat{M}B = A\hat{\Delta}B = 90^o$$

Η ΕΜ είναι λοιπόν κάθετη στη ΒΓ και επειδή το Μ είναι μέσο της ΒΓ, θα είναι:

$$E\Gamma = EB = EA$$

Άρα το Ε είναι το περίκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ. Επομένως:

$$\hat{\Gamma} = \frac{1}{2}A\hat{E}B = \frac{1}{2}60^o = 30^o$$

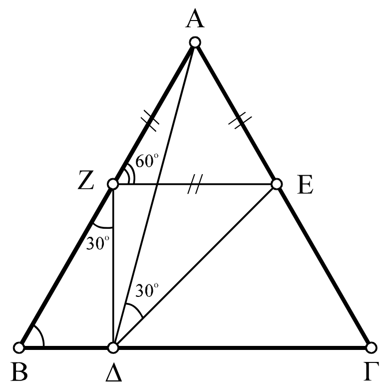
και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

1.26 Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ, σημείο Δ της πλευράς ΒΓ και σημείο Ε της πλευράς ΑΓ, ώστε $\Gamma E = 2B\Delta$. Αν $A\hat{\Delta}E = 30^o$, να αποδειχθεί ότι $\Delta\hat{A}E = 45^o$.

Λύση

Η κάθετη προς τη ΒΓ στο σημείο Δ τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ζ. Επειδή $\hat{B} = 60^o$, είναι $B\hat{Z}\Delta = 30^o$ και έτσι:

$$BZ = 2B\Delta = E\Gamma$$



Επειδή $BZ = \Gamma E$, θα είναι και $AZ = AE$. Άρα το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισόπλευρο. Επειδή:

$$ZA = ZE \quad \text{και} \quad A\hat{Z}E = 60^o = 2A\hat{\Delta}E$$

το Ζ είναι περίκεντρο του τριγώνου ΑΔΕ. Έτσι:

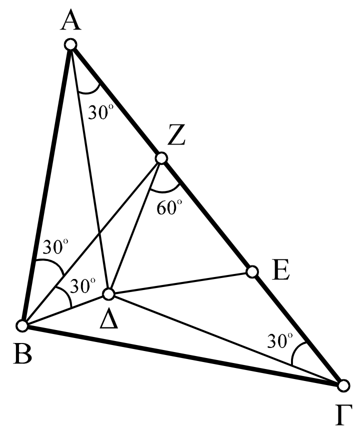
$$\Delta\hat{A}E = \frac{1}{2}\Delta\hat{Z}E = \frac{1}{2}\cdot 90^o = 45^o$$

διότι $\Delta Z \perp B\Gamma$, οπότε $\Delta Z \perp ZE$, αφού ΖΕ // ΒΓ.

1.27 Στο εσωτερικό ενός τριγώνου ΑΒΓ υπάρχει σημείο Δ, με $\Delta\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{\Gamma}A = 30^o$ και $\Delta\hat{B}A = 60^o$. Αν Ε είναι σημείο στην πλευρά ΑΓ, με $AE = 2E\Gamma$, να αποδειχθεί ότι $\Delta\hat{E}A = 60^o$.

Λύση

Φέρουμε τη διχοτόμο ΒΖ της γωνίας $A\hat{B}\Delta$. Το ΑΒΔΖ είναι εγγράψιμο, οπότε $\Delta\hat{Z}E = 60^o$. Το $\overset{\Delta}{Z\Delta\Gamma}$ είναι ορθογώνιο και $\Delta\hat{\Gamma}Z = 30^o$, οπότε:



$$\Gamma Z = 2\Delta Z = 2AZ$$

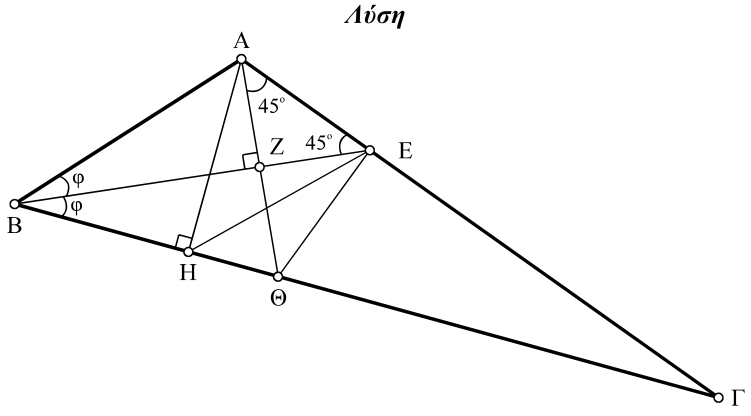
Επειδή $\Gamma Z = 2AZ$ και $AE = 2E\Gamma$, είναι:

$$AZ = ZE = E\Gamma$$

Το $\overset{\Delta}{\Delta ZE}$ είναι λοιπόν ισόπλευρο, οπότε $\Delta\hat{E}A = 60^o$.

1.28 Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε το ύψος ΑΗ και τη διχοτόμο ΒΕ. Αν $B\hat{E}A = 45^o$, να αποδειχθεί ότι $\Gamma\hat{H}E = 45^o$.

Λύση

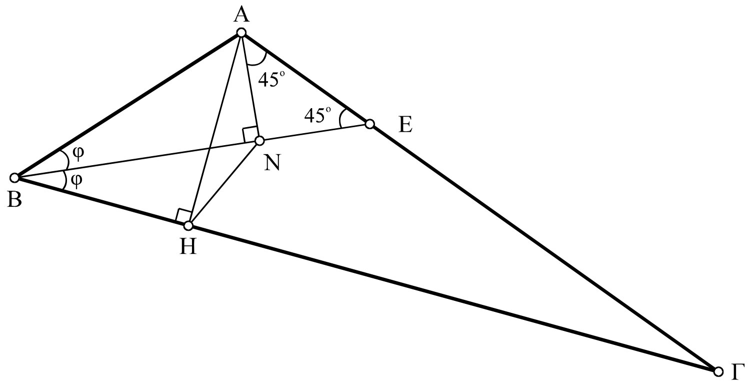


Αν $AZ \perp BE$, τότε $ZE = ZA = Z\Theta$, οπότε:

$$A\hat{E}\Theta = 90^o = A\hat{H}\Gamma$$

Το ΑΗΘΕ είναι επομένως εγγράψιμο, οπότε $E\hat{H}\Theta = E\hat{A}\Theta = 45^o$.

Άλλος τρόπος



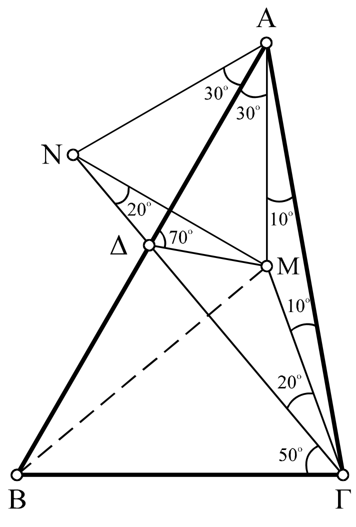
Αν $AN \perp BE$, το ANHB είναι εγγράψιμο. Άρα $NA = NH$ (αφού $N\hat{B}A = \varphi = N\hat{B}H$). Επειδή $NH = NA = NE$, το N είναι περίκεντρο στο τρίγωνο AHE, οπότε:

$$A\hat{H}E = \frac{1}{2}A\hat{N}E = 45^o$$

Και άρα $\Gamma\hat{H}E = 45^o$, αφού $A\hat{H}\Gamma = 90^o$.

1.29 Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} = 40^o$, $\hat{B} = 60^o$ και $\hat{\Gamma} = 80^o$. Στο εσωτερικό του τριγώνου θεωρούμε σημείο Μ τέτοιο, ώστε $M\hat{A}\Gamma = M\hat{\Gamma}A = 10^o$. Να αποδειχθεί ότι $M\hat{B}A = 20^o$.

Λύση



Θεωρούμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΜΝ. Τότε:

$$MN = MA = M\Gamma$$

και έτσι το τρίγωνο ΜΝΓ είναι ισοσκελές. Άρα:

$$M\hat{\Gamma}N = M\hat{N}\Gamma = \frac{180^o - (360^o - 60^o - 160^o)}{2} =$$

$$= \frac{180^o - 140^o}{2} = 20^o$$

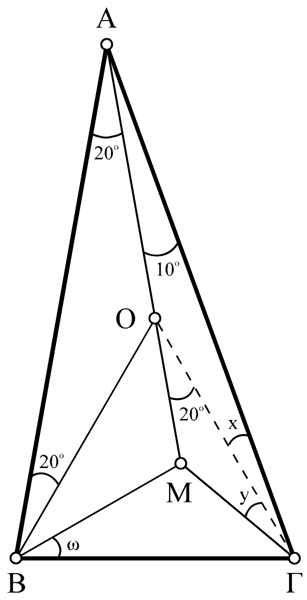
Είναι όμως $A\Delta \perp MN$, οπότε:

$$A\hat{\Delta}M = A\hat{\Delta}N = 90^o - 20^o = 70^o = M\hat{\Gamma}B$$

και έτσι το τετράπλευρο ΜΔΒΓ είναι εγγράψιμο. Άρα $M\hat{B}\Delta = M\hat{\Gamma}\Delta = 20^o$.

1.30 Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A}=30^o$ και $\hat{B}=80^o$. Στο εσωτερικό του τριγώνου θεωρούμε σημείο Μ τέτοιο, ώστε $M\hat{A}\Gamma=10^o$ και $M\hat{\Gamma}A=30^o$. Να αποδειχθεί ότι $M\hat{B}\Gamma=30^o$.

Λύση



Προφανώς $\hat{\Gamma}=70^o$. Στην ΑΜ θεωρούμε το σημείο Ο, για το οποίο είναι $\Gamma\hat{B}O=60^o$. Τότε:

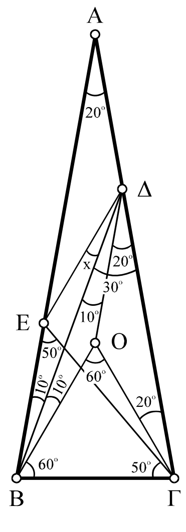
- $A\hat{B}O=20^o=B\hat{A}O$
- $A\hat{O}B=180^o-20^o-20^o=140^o=2\hat{\Gamma}$

Επειδή $OA=OB$ και $A\hat{O}B=2\hat{\Gamma}$, το Ο είναι το περίκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ. Επομένως:

- $x=O\hat{A}\Gamma$, $y=30^o-10^o=20^o$
- $B\hat{O}\Gamma=2\hat{A}=60^o$ και επειδή $OB=O\Gamma$, το τρίγωνο ΒΟΓ είναι ισόπλευρο και η ΒΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $O\hat{B}\Gamma$, διότι $M\hat{O}\Gamma=M\hat{\Gamma}O=20^o$, οπότε $MO=M\Gamma$, δηλαδή τα Β, Μ βρίσκονται στη μεσοκάθετο του ΟΓ. Άρα $\omega=30^o$.

1.31 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, με $AB=A\Gamma$ και $\hat{A}=20^o$. Αν Δ και Ε είναι σημεία των πλευρών ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα, ώστε $\Gamma\hat{B}\Delta=70^o$ και $E\hat{\Gamma}B=50^o$, να αποδειχθεί ότι $E\hat{\Delta}B=10^o$.

Λύση



Θεωρούμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΟΒΓ. Επειδή:

$$OB=O\Gamma,\ B\hat{\Delta}\Gamma=30^o \text{ και } B\hat{O}\Gamma=60^o=2B\hat{\Delta}\Gamma$$

το Ο είναι περίκεντρο του τριγώνου ΔΒΓ. Άρα:

$$OB=O\Gamma=O\Delta$$

Επειδή $B\hat{E}\Gamma=50^o=B\hat{\Gamma}E$, το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισοσκελές. Έτσι:

$$BE=B\Gamma=OB=O\Delta$$

δηλαδή $BE=O\Delta=BO$. Είναι όμως και ΒΕ // ΟΔ, διότι:

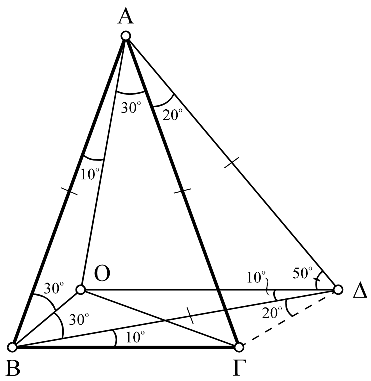
$$E\hat{B}\Delta = B\hat{\Delta}O = 10^o$$

Άρα το ΒΕΔΟ είναι τελικά ρόμβος. Επειδή στον ρόμβο οι διαγώνιοι διχοτομούν τις γωνίες, θα είναι:

$$E\hat{\Delta}B = B\hat{\Delta}O = 10^o$$

1.32 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 40^o$. Στο εσωτερικό του τριγώνου θεωρούμε σημείο Ο τέτοιο, ώστε $O\hat{A}B = 10^o$ και $O\hat{B}A = 30^o$. Να αποδειχθεί ότι $\Gamma O \perp AB$.

Λύση



Θεωρούμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΔ. Φέρνουμε τις ΟΓ, ΟΔ και ΓΔ. Εύκολα προκύπτουν τα μέτρα των γωνιών που είναι σημειωμένες στο διπλανό σχήμα.

- Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές με $\Gamma\hat{A}\Delta = 20^o$, οπότε:

$$A\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{\Delta}\Gamma = 80^o \quad \text{και} \quad \Gamma\hat{\Delta}B = 20^o$$

- Είναι $O\hat{B}A = 30^o$ και $A\hat{B}\Delta = 60^o$, οπότε η ΒΟ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{B}\Delta$, δηλαδή μεσοκάθετος της ΑΔ. Άρα $OA = O\Delta$ που σημαίνει ότι:

$$O\hat{\Delta}A = O\hat{A}\Delta = 50^o \quad \text{και} \quad O\hat{\Delta}B = 60^o - 50^o = 10^o$$

- Το τετράπλευρο ΟΑΔΓ είναι εγγράψιμο, διότι $O\hat{A}\Gamma = O\hat{\Delta}\Gamma = 30^o$. Άρα:

$$O\hat{\Gamma}A = O\hat{\Delta}A = 50^o$$

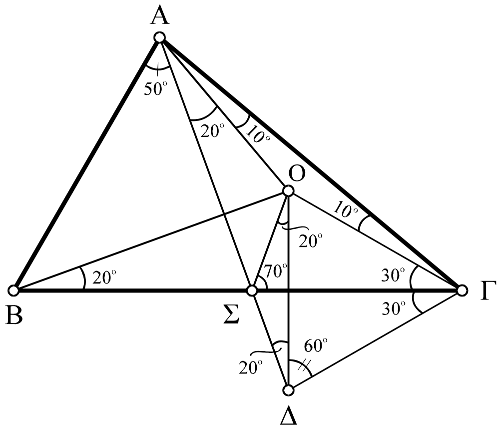
Επομένως $O\hat{\Gamma}B = 70^o - 50^o = 20^o$ και επειδή $\hat{B} = 70^o$, θα είναι $\Gamma O \perp AB$.

1.33 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με $\hat{A} = 80^o$, $\hat{B} = 60^o$ και $\hat{\Gamma} = 40^o$, και σημείο Ο στο εσωτερικό του τριγώνου τέτοιο, ώστε $O\hat{A}\Gamma = O\hat{\Gamma}A = 10^o$. Να αποδειχθεί ότι:

$$\mathbf{OB = AB}$$

Λύση

Έστω Δ το συμμετρικό του Ο ως προς την ευθεία ΒΓ. Επειδή $\text{O}\hat{\Gamma}\text{B} = 30^\text{o}$, το τρίγωνο ΟΓΔ είναι τελικά ισόπλευρο, οπότε $\text{O}\Delta = \text{O}\Gamma = \Gamma\Delta$. Έτσι το Ο είναι περίκεντρο του τριγώνου ΑΓΔ και επειδή $\text{A}\hat{\text{O}}\Gamma = 160^\text{o}$, θα είναι:



$$\text{A}\hat{\Delta}\Gamma = \frac{1}{2}\text{A}\hat{\text{O}}\Gamma = \frac{1}{2}\cdot 160^\text{o} = 80^\text{o}$$

Έτσι:

- $\text{O}\hat{\text{A}}\Delta = \text{O}\hat{\Delta}\text{A} = \text{A}\hat{\Delta}\Gamma - \text{O}\hat{\Delta}\Gamma = 80^\text{o} - 60^\text{o} =$

  $= 20^\text{o}$

- $\text{O}\hat{\Sigma}\Gamma = \Delta\hat{\Sigma}\Gamma = 70^\text{o} = \text{B}\hat{\text{A}}\text{O}$

που σημαίνει ότι το τετράπλευρο ΑΟΣΒ είναι εγγράψιμο. Επομένως:

$$\Sigma\hat{\text{B}}\text{O} = \Sigma\hat{\text{A}}\text{O} = 20^\text{o}$$

Αλλά τότε $\text{O}\hat{\text{B}}\text{A} = 60^\text{o} - 20^\text{o} = 40^\text{o}$ και επειδή $\text{B}\hat{\text{A}}\text{O} = 70^\text{o}$, θα είναι:

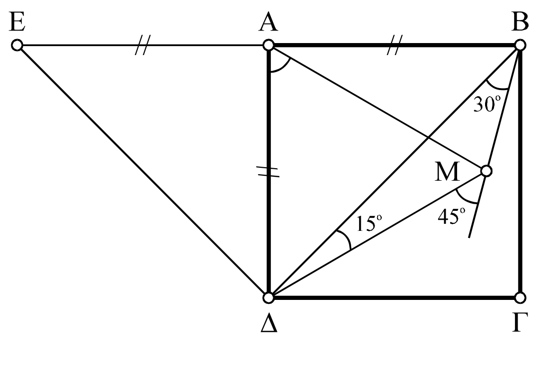
$$\text{A}\hat{\text{O}}\text{B} = 180^\text{o} - 70^\text{o} - 40^\text{o} = 70^\text{o}$$

Άρα $\text{B}\hat{\text{O}}\text{A} = \text{B}\hat{\text{A}}\text{O} = 70^\text{o}$ και το τρίγωνο ΒΟΑ είναι ισοσκελές, δηλαδή $\text{OB} = \text{AB}$.

1.34 Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και σημείο Μ εσωτερικό του τριγώνου ΒΓΔ τέτοιο, ώστε $\text{M}\hat{\text{A}}\text{B} = 15^\text{o}$ και $\text{M}\hat{\text{B}}\Delta = 30^\text{o}$. Να αποδειχθεί ότι $\text{M}\hat{\text{A}}\Delta = 60^\text{o}$.

Λύση

Προεκτείνουμε τη ΒΑ κατά $\text{AE} = \text{AB}$. Τότε $\hat{\text{E}} = 45^\text{o}$. Επειδή:



$$\text{B}\hat{\text{M}}\Delta = 135^\text{o} \text{ και } \hat{\text{E}} + \text{B}\hat{\text{M}}\Delta = 180^\text{o}$$

το τετράπλευρο ΕΒΜΔ είναι εγγράψιμο. Όμως:

$$\text{E}\hat{\Delta}\text{B} = 45^\text{o} + 45^\text{o} = 90^\text{o}$$

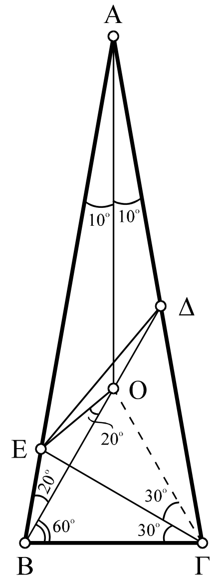
οπότε ο περιγεγραμμένος κύκλος του τετραπλεύρου ΕΒΜΔ έχει κέντρο το Α. Είναι έτσι:

$$\Delta\hat{\text{A}}\text{M} = 2\cdot\Delta\hat{\text{B}}\text{M} = 60^\text{o}$$

αφού η $\Delta\hat{\text{A}}\text{M}$ είναι επίκεντρη και η $\Delta\hat{\text{B}}\text{M}$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο ίδιο τόξο.

1.35 Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ είναι $\hat{A} = 20^o$. Στην πλευρά ΑΓ παίρνουμε σημείο Δ, ώστε $\Delta\hat{B}\Gamma = 60^o$ και στην ΑΒ σημείο Ε τέτοιο, ώστε $E\hat{\Gamma}B = 30^o$. Να αποδειχθεί ότι $E\hat{\Delta}B = 10^o$.

Λύση



Έστω ότι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τέμνει τη ΒΔ στο Ο. Το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισόπλευρο, οπότε η ΕΓ είναι μεσοκάθετος της ΟΒ (αφού η ευθεία ΓΕ διχοτομεί τη γωνία $B\hat{\Gamma}O$). Άρα $EO = EB$ και έτσι έχουμε:

$$E\hat{O}B = E\hat{B}O = 80^o - 60^o = 20^o$$

Επειδή $E\hat{O}B = \hat{A} = 20^o$, το τετράπλευρο ΑΔΟΕ είναι εγγράψιμο, οπότε:

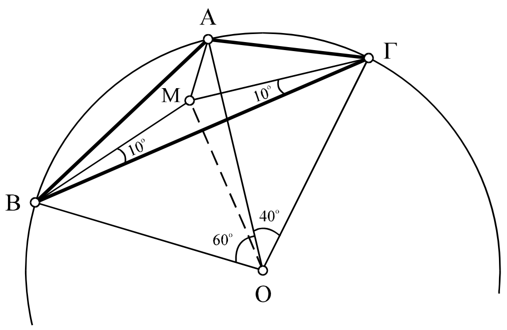
$$E\hat{\Delta}O = E\hat{A}O = 10^o$$

Επομένως είναι $E\hat{\Delta}B = 10^o$.

1.36 Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{B} = 20^o$ και $\hat{\Gamma} = 30^o$. Στο εσωτερικό του τριγώνου θεωρούμε σημείο Μ τέτοιο, ώστε $M\hat{B}\Gamma = M\hat{\Gamma}B = 10^o$. Να αποδειχθεί ότι $A\hat{M}\Gamma = 60^o$.

Λύση

Θεωρούμε τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ. Τότε:



- $A\hat{O}B = 2\hat{\Gamma} = 2 \cdot 30^o = 60^o$ και έτσι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισόπλευρο.
- $B\hat{O}\Gamma = B\hat{O}A + A\hat{O}\Gamma = 60^o + 2\hat{B} =$

  $= 60^o + 40^o = 100^o$
- $O\hat{A}\Gamma = O\hat{\Gamma}A = \dfrac{180^o - 40^o}{2} = 70^o$
- Επειδή $MB = M\Gamma$, η ΟΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{O}\Gamma$. Άρα $M\hat{O}\Gamma = 50^o$ και έτσι $M\hat{O}A = 10^o$.

Τα τρίγωνα ΑΜΒ και ΜΑΟ είναι ίσα, διότι $AB = AO$, η ΜΑ είναι κοινή και $MB = MO$.
Επομένως:

$$B\hat{A}M = M\hat{A}O = \frac{B\hat{A}O}{2} = \frac{60^o}{2} = 30^o$$

οπότε:

$$A\hat{M}\Gamma = 180^o - M\hat{A}\Gamma - A\hat{\Gamma}M = 180^o - (30^o + 70^o) - (30^o - 10^o) =$$

$$= 180^o - 100^o - 20^o = 60^o$$

Έτσι η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

1.37 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$, με $\hat{A} = 20^o$. Στην πλευρά ΑΓ παίρνουμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $\Delta\hat{B}\Gamma = 60^o$ και στην πλευρά ΑΒ σημείο Ε τέτοιο, ώστε $E\hat{\Gamma}B = 70^o$. Να αποδειχθεί ότι $E\hat{\Delta}A = 30^o$.

(Διαγωνισμός, ΗΠΑ)

Λύση

Φέρουμε $\Delta Z \parallel B\Gamma$ και Ο το σημείο τομής της ΖΓ με τη ΒΔ. Τότε:

$$B\hat{O}\Gamma = 60^o,\ B\hat{E}\Gamma = 30^o \quad \text{και} \quad OB = O\Gamma$$

Επομένως το Ο είναι περίκεντρο του τριγώνου ΕΒΓ. Άρα:

$$OB = OE \quad \text{και} \quad OE = O\Gamma$$

Έτσι $O\hat{E}B = O\hat{B}Z = 20^o$ και $O\hat{E}\Gamma = O\hat{\Gamma}E = 10^o$. Συνεπώς:

$$Z\hat{O}E = Z\hat{E}O = 20^o$$

διότι:

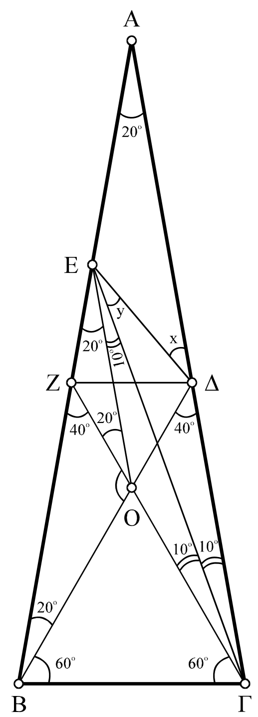
$$B\hat{Z}\Gamma = 40^o \Leftrightarrow Z\hat{E}O + Z\hat{O}E = 40^o \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 20^o + Z\hat{O}E = 40^o \Leftrightarrow Z\hat{O}E = 20^o$$

και έτσι $ZO = ZE$. Το τρίγωνο ΟΔΖ είναι ισόπλευρο, οπότε $OZ = Z\Delta$. Επομένως $Z\Delta = ZE$, που σημαίνει ότι το τρίγωνο ΖΔΕ είναι ισοσκελές, δηλαδή:

$$Z\hat{E}\Delta = Z\hat{\Delta}E = \frac{180^o - 80^o}{2} = 50^o$$

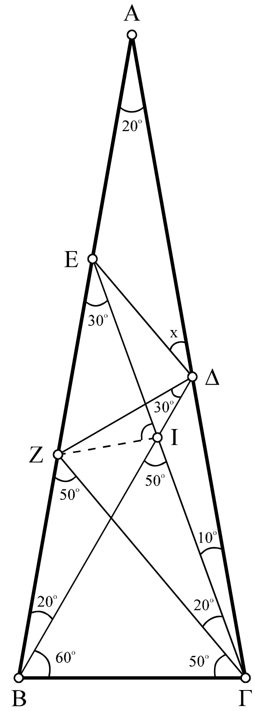
Άρα $Z\hat{E}\Delta = 50^o \Leftrightarrow 20^o + 10^o + y = 50^o \Leftrightarrow y = 20^o$. Από το τρίγωνο ΔΕΓ παίρνουμε τώρα ότι:



$$E\hat{\Delta}A = \Delta\hat{E}\Gamma + \Delta\hat{\Gamma}E \Leftrightarrow x = y + 10^o \Leftrightarrow x = 20^o + 10^o \Leftrightarrow x = 30^o$$

Σχόλιο

Το πρόβλημα παρουσιάστηκε στο Crux, τόμος 1^ος^ και 2^ος^, 1975 – 1976. Είχε τεθεί ως θέμα το 1976 στο Carleton University Mathematics Competition. Στο Crux παρουσιαζόταν μια τριγωνομετρική λύση και ο υπεύθυνος της στήλης εξέφρασε την απορία αν θα μπορούσε άραγε να δοθεί μια καθαρά γεωμετρική λύση.



Άλλος τρόπος

Θεωρούμε στην πλευρά ΑΒ το σημείο Ζ έτσι, ώστε $\mathrm{B\hat{\Gamma}Z} = 50^{\mathrm{o}}$. Σύμφωνα με γνωστό πρόβλημα είναι τότε:

$$\mathrm{Z\hat{\Delta}B} = 30^{\mathrm{o}} = \mathrm{Z\hat{E}\Gamma}$$

Αυτό σημαίνει ότι το τετράπλευρο ΕΔΙΖ είναι εγγράψιμο και έτσι:

$$\mathrm{E\hat{\Delta}Z} = \mathrm{E\hat{I}Z}$$

Αλλά $\mathrm{B\hat{Z}\Gamma} = \mathrm{B\hat{I}\Gamma} = 50^{\mathrm{o}}$, οπότε και το τετράπλευρο ΒΖΙΓ είναι εγγράψιμο. Άρα:

$$\mathrm{Z\hat{I}E} = \mathrm{Z\hat{B}\Gamma} = 80^{\mathrm{o}}$$

Έτσι, αφού $\mathrm{E\hat{\Delta}Z} = \mathrm{E\hat{I}Z} = \mathrm{Z\hat{B}\Gamma} = 80^{\mathrm{o}}$, παίρνουμε:

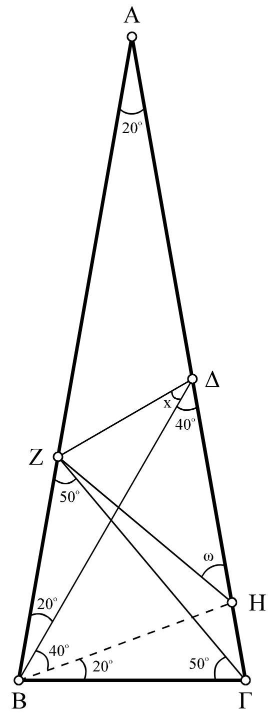
$$\mathrm{E\hat{\Delta}A} = \mathrm{A\hat{\Delta}\Gamma} - \mathrm{E\hat{\Delta}Z} - \mathrm{Z\hat{\Delta}B} - \mathrm{B\hat{\Delta}\Gamma} =$$

$$= 180^{\mathrm{o}} - 80^{\mathrm{o}} - 30^{\mathrm{o}} - 40^{\mathrm{o}} = 30^{\mathrm{o}}$$

Σημείωση

Το γεγονός ότι η γωνία $B\hat{\Delta}Z$ *είναι ίση με* 30^o *αποδεικνύεται ως εξής:*

Έστω Η σημείο της πλευράς ΑΓ τέτοιο, ώστε $\Gamma\hat{B}H = 20^o$ *. Τότε:*



- *Το τρίγωνο ΒΗΓ είναι ισοσκελές (αφού* $B\hat{\Gamma}H = B\hat{H}\Gamma = 80^o$ *). Έτσι* $B\Gamma = BH$ *(1)*
- *Το τρίγωνο ΒΓΖ είναι ισοσκελές (αφού* $B\hat{\Gamma}Z = 50^o = B\hat{Z}\Gamma$ *). Έτσι* $B\Gamma = BZ$ *(2)*

Οι σχέσεις (1) και (2) δίνουν $BH = BZ$ *. Επομένως το τρίγωνο ΒΗΖ είναι ισόπλευρο, δηλαδή:*

$$BH = HZ \quad (3)$$

- *Το τρίγωνο ΗΒΔ είναι επίσης ισοσκελές, οπότε:*

$$H\Delta = HB \overset{(3)}{\Leftrightarrow} H\Delta = HZ$$

Επομένως:

$$H\hat{\Delta}Z = H\hat{Z}\Delta = \frac{180^o - \omega}{2} = \frac{180^o - (180^o - 60^o - 80^o)}{2} = 70^o$$

Είναι λοιπόν:

$$Z\hat{\Delta}H = 70^o \Leftrightarrow x + 40^o = 70^o \Leftrightarrow x = 30^o$$

Μπάμπης Στεργίου – Μαθηματικός