ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗ Δ/ΝΣΗ Π/ΘΜΙΑΣ & Δ/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΚΡΗΤΗΣ
ΓΡΑΦΕΙΟ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΣΥΜΒΟΥΛΩΝ Δ.Ε. Ν. ΗΡΑΚΛΕΙΟΥ

Δημήτριος Ι. Μπουνάκης
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

Ταχ. Δ/νση : Μονοφατσίου 8
Ταχ. Κώδικας : 712 01 ΗΡΑΚΛΕΙΟ
Τηλ. υπηρεσίας : 2810333768
Τηλ. Κατοικίας : 2810252140
Κινητό : 6976465429
e-mail : dimitrmp@sch.gr

Πληροφορίες : Μιχάλης Βαβουρανάκης
e-mail : grss@dide.ira.sch.gr
Τηλέφωνο - FAX :2810342206

Ηράκλειο, 22 Νοεμβρίου 2007

Αρ. Πρωτ.: 185

Προς : Τους κ. κ. καθηγητές Μαθηματικών των Λυκείων του Ν. Ρεθύμνου και Ν. Ηρακλείου αρμοδιότητάς μου.

Κοιν.: Προϊστάμενο Επιστημονικής & Παιδαγωγικής Καθοδήγησης Δ/θμιας Εκπ/σης Κρήτης.

ΘΕΜΑ : «ΔΙΔΑΚΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ- ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ»

Το διδακτικό αυτό υλικό αναφέρεται στο 4^{ο} Κεφάλαιο (παράλληλες ευθείες) της Γεωμετρίας της Α΄ Λυκείου και περιλαμβάνει:

1. Γενικές παρατηρήσεις για την Γεωμετρία της Α΄ Λυκείου και το 4^{ο} Κεφάλαιο.
2. Ωριαίο χωρισμό του 4^{ου} Κεφαλαίου σε διδακτικές ενότητες με σχόλια, διδακτικές επισημάνσεις και ιστορικά στοιχεία.
3. Ένα Σχέδιο διδασκαλίας.

1. Γενικά

Αγαπητοί συνάδελφοι, κρίνω σκόπιμο να υπενθυμίσω μερικά πράγματα που θεωρώ χρήσιμα, ιδίως στην εποχή μας. Η Γεωμετρία στην τάξη αυτή θεωρείται γενικά ένα «δύσκολο» μάθημα από τους περισσότερους μαθητές, μάθημα που δεν τους ενδιαφέρει μια και δεν εξετάζεται στις Πανελλήνιες εξετάσεις. Για το τελευταίο έχουν δίκιο, αλλά εμείς θα στοχεύουμε κυρίως στη γενική μόρφωση που προσφέρει το μάθημα και δευτερευόντως ότι χρειάζεται και στις άλλες τάξεις (π.χ. στην Γ΄ τάξη στους Μιγαδικούς). Είναι το μοναδικό μάθημα στην εξάχρονη σχολική ζωή των μαθητών που προσφέρει υψηλού επιπέδου νοητική καλλιέργεια και πνευματικές συγκινήσεις. Απαιτείται από τον διδάσκοντα ιδιαίτερη προσοχή ώστε να αγαπήσουν (ειδικά) την Γεωμετρία της Α΄ τάξης, όσο το δυνατόν

περισσότεροι μαθητές, *ανεξάρτητα από την επίδοσή τους ή τις κλίσεις τους*. Είναι κρίμα να τελειώσει μαθητής την Α΄ Λυκείου και να μην νιώσει την (πνευματική) χαρά από την απόδειξη ενός θεωρήματος ή τη λύση μερικών ασκήσεων Γεωμετρίας. Γι' αυτό πρέπει να δίνονται ασκήσεις ανάλογα με το επίπεδο των μαθητών. Ειδικά στα ωριαία διαγωνίσματα, οι ασκήσεις μπορεί να είναι και του βιβλίου (μόνο εμπέδωσης ή αποδεικτικές) ή αν είναι εκτός βιβλίου να είναι απλές και βέβαια διαβαθμισμένης δυσκολίας. Στα ημερήσια τεστ (σε καμιά περίπτωση προειδοποιημένα) συνιστάται να ελέγχονται απλές γνώσεις της θεωρίας και όταν μπαίνουν και ασκήσεις να είναι από τις πιο απλές (π.χ. κατανόησης ή εμπέδωσης) της ημέρας.
Από το Π. Ι. συνιστάται να μην γίνουν οι γενικές ασκήσεις όλων των κεφαλαίων και πολλά σύνθετα θέματα (Βλ. οδηγίες). Πάντως και τα υπόλοιπα σύνθετα θέματα, ανάλογα και με το επίπεδο του τμήματος, μπορούν να δίνονται προαιρετικά ή να λύνονται μέσα στην τάξη. Οι ασκήσεις του βιβλίου είναι αρκετές και δεν χρειάζεται γενικά να δίνονται και άλλες εκτός βιβλίου, εκτός των περιπτώσεων που συμπληρώνουν την θεωρία ή βοηθούν το επόμενο μάθημα ή δίνονται προαιρετικά.
Δίνουμε προτεραιότητα στις ασκήσεις κατανόησης και εμπέδωσης. Προσοχή, γιατί συχνά η διάταξη στις ασκήσεις εμπέδωσης και αποδεικτικές δεν αντιστοιχεί στην διάταξη της θεωρίας και έτσι χρειάζεται να γνωρίζουμε ποιες ασκήσεις (για εργασία στο σπίτι) χρησιμοποιούν την θεωρία που θα διδάξουμε (ή την προηγούμενη).
Σε κάθε μάθημα συνιστάται να δίνονται ως εργασία 3 ασκήσεις (εμπέδωσης ή αποδεικτικές), εκτός των ασκήσεων κατανόησης (τις οποίες οι μαθητές μπορούν να τις ξέρουν προφορικά και να μην τις γράφουν στο τετράδιο) και μια προαιρετική (π.χ από τα σύνθετα θέματα ή γενικές ασκήσεις ή εκτός βιβλίου).

Στο 4^{ο} κεφάλαιο η Γεωμετρία με την υιοθέτηση του αιτήματος (αξιώματος) παραλληλίας μετατρέπεται σε Ευκλείδεια. Οι προτάσεις πριν το αίτημα παραλληλίας αναφέρονται ως προτάσεις της απόλυτης Γεωμετρίας.
Σύμφωνα με τις οδηγίες του Π. Ι. προτείνεται να μην διδαχθεί η απόδειξη της Πρότασης IV, οι γενικές ασκήσεις του κεφαλαίου και να μην γίνουν τα σύνθετα θέματα 1, 3, 4 της σελίδας 83 και 3, 4, 5, 6 της σελίδας 88.

2. Ωριαίος χωρισμός του 4^{ου} Κεφαλαίου σε διδακτικές ενότητες με διδακτικές επισημάνσεις και σχόλια σε κάθε ενότητα.

1^{η} Διδακτική ενότητα: §4.1, §4.2 (Θεώρημα, Πόρισμα Ι, ΙΙ).

Διδακτικές επισημάνσεις:
Α. Η παραλληλία αναφέρεται σε ευθείες του ίδιου επιπέδου. Να αναφερθεί όμως ότι υπάρχουν και ευθείες στο χώρο που δεν έχουν κοινά σημεία, αλλά δεν λέγονται παράλληλες: οι ασύμβατες, π.χ. δυο ακμές της αίθουσας διδασκαλίας που δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.
Β. Αξιοσημείωτο είναι ότι, ενώ το θεώρημα αποδεικνύεται με βάση τα προηγούμενα αξιώματα και θεωρήματα, το αντίστροφό του δεν αποδεικνύεται χωρίς το αξίωμα παραλληλίας.
Ασκήσεις: Κατανόησης 1, 2, 3 , Εμπέδωσης 4, 5, 6 (σελ.82).

2η Διδακτική ενότητα : - § 4.3 § 4.2 Αίτημα παραλληλίας και Πρόταση Ι- Πόρισμα, Πρόταση ΙΙ, Πρόταση ΙΙΙ - Πόρισμα.

Διδακτική επισημάνσεις.

Α. Πριν την διατύπωση του αιτήματος παραλληλίας αποδεικνύεται ότι, από σημείο εκτός ευθείας (ε) υπάρχει (κατασκευάζεται) ευθεία (ε′) παράλληλη στην ευθεία (ε) (Σχ.4β, βιβλίου). Το ότι η κάθετη από το Α στην (ε) είναι μοναδική και το ότι η κάθετη στην ΑΒ στο Α είναι μοναδική *δεν συνεπάγεται* ότι η (ε′) είναι η μοναδική παράλληλη στην (ε) από το Α. Απλά, αυτός είναι ένας τρόπος να φέρουμε από το Α παράλληλη στην (ε). Υπάρχει και άλλος τρόπος (§ 4.3). Άρα υπάρχει μια τουλάχιστον παράλληλη στην (ε) από το Α.

Β. Όλες οι προτάσεις της ενότητας χρησιμοποιούν το Αξίωμα παραλληλίας και αποτελούν την αφετηρία όλων των επόμενων θεωρημάτων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Γ. Επισημαίνουμε τέλος τις δυνατότητες που μας δίνουν οι προτάσεις αυτές.

Δ. Εφαρμογή σελ.79 (στην τάξη ή στο σπίτι).

Ασκήσεις:

1. Αν δυο ευθείες τέμνονται, τότε και δυο αντίστοιχες σε αυτές ευθείες παράλληλες τέμνονται.
2. Εμπέδωσης 1, 2.

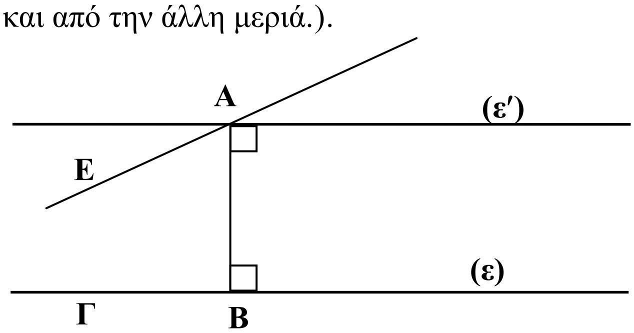
3η Διδακτική ενότητα : Πρόταση IV – Πόρισμα - Ιστορικά στοιχεία.

Η πρόταση IV αποτελεί βασικό κριτήριο για να διαπιστώνουμε αν δυο ευθείες Δ. τέμνονται. Παρόλο που οι οδηγίες του Π.Ι. δεν προβλέπουν την απόδειξη της Πρότασης IV (: που είναι το περίφημο Ευκλείδειο αίτημα), καλό να διδαχθεί, όπως και η αντίστροφή της, για να δειχθεί η ισοδυναμία του Ευκλειδείου αιτήματος με το αίτημα παραλληλίας. Το αίτημα παραλληλίας αποδεικνύεται με βάση την Πρόταση IV, ως εξής:

Από το 5ο αίτημα του Ευκλείδη στο αίτημα παραλληλίας:

Απόδειξη

Έστω ευθεία (ε) και ένα σημείο Α εκτός αυτής. Θα δείξουμε ότι υπάρχει μοναδική παράλληλη από το Α στην (ε). Σύμφωνα με το σχ. βιβλίο (σελ.76 αμέσως μετά την απόδειξη του Πορίσματος ΙΙ) υπάρχει ευθεία (ε′) παράλληλη στην (ε) (Σχήμα 4β βιβλίου). Έστω τώρα τυχαία ευθεία ΑΕ που διέρχεται από το Α και διαφορετική από την (ε′). Η ΑΕ θα σχηματίζει με την ΑΒ μια οξεία γωνία, έστω την $\hat{EAB}$(Θα μπορούσε να είναι και από την άλλη μεριά.).



Παρατηρούμε ότι $\hat{EAB}+\hat{AB\Gamma}=\hat{EAB}+90^o<180^o$, οπότε σύμφωνα με το Ευκλείδειο αίτημα (Πρόταση IV) οι ευθείες ΑΕ και (ε) τέμνονται. Άρα υπάρχει μοναδική παράλληλη από το Α στην (ε), η (ε′).

Ιστορικά στοιχεία.

Α. Η Πρόταση IV είναι το περίφημο 5ο αίτημα του Ευκλείδη το οποίο πως είδαμε είναι ισοδύναμο με το αίτημα παραλληλίας. Το αίτημα παραλληλίας αντικατέστησε το Ευκλείδειο αίτημα σε όλα σχεδόν τα βιβλία Ευκλείδειας Γεωμετρίας τα τελευταία 200 χρόνια και είναι γνωστό και σαν αίτημα του Playfair (John, 1748-1819, Σκώτος), ο οποίος το καθιέρωσε το 1795. Η (ισοδύναμη) αυτή μορφή του 5ου αιτήματος ήταν όμως γνωστή ήδη από τον Πρόκλο (411 - 485 μ.Χ., νεοπλατωνικός φιλόσοφος, τελευταίος διευθυντής της Ακαδημίας Πλάτωνος) όπως ο ίδιος ο Playfair είχε επισημάνει.

Β. Στα ιστορικά στοιχεία του βιβλίου (σελ. 90-92) καλό είναι να επισημάνουμε τις 10 προτάσεις που αναφέρει το βιβλίο ως ισοδύναμες με το Ευκλείδειο αίτημα και τις πολύχρονες προσπάθειες για την απόδειξή του. Επίσης ότι μερικές από τις προτάσεις αυτές πολλοί εργάτες της Γεωμετρίας, στην προσπάθεια τους να αποδείξουν το 5ο αίτημα, έπαιρναν ως αληθείς, νομίζοντας ότι ήταν ανεξάρτητες του Ευκλειδείου αιτήματος, και έτσι επαίρονταν ότι το είχαν αποδείξει. Στην ουσία δηλαδή χρησιμοποιούσαν το Ευκλείδειο αίτημα με άλλη μορφή, για να το αποδείξουν!. Αξιοσημείωτο είναι ότι, ενώ το αντίστροφο του 5ου αιτήματος είναι μια πρόταση που αποδεικνύεται (και στο βιβλίο (βλ. §3.10. Πόρισμα (β)) το 5ο αίτημα του Ευκλείδη παρά τις πείσμονες προσπάθειες 20 αιώνων δεν έγινε δυνατό να αποδειχθεί από προηγούμενα αιτήματα (βλ. ιστορικό σημείωμα σελ. 90). Τέλος ότι, η άρνηση να δεχθούν μερικοί Γεωμέτρες το 5ο αίτημα τους οδήγησε στην δημιουργία δυο σημαντικών νέων γεωμετριών, της Υπερβολικής (από τους Bolyai, Kolmogorof) και της Ελλειπτικής (Riemann) που λέγονται μη Ευκλείδειες. Στην υπερβολική Γεωμετρία δεχόμαστε ότι από σημείο εκτός ευθείας διέρχονται δυο τουλάχιστον παράλληλες και στην Ελλειπτική καμμία.

Άσκηση : Να αποδειχθεί ότι οι διχοτόμοι δυο εσωτερικών γωνιών ενός τριγώνου τέμνονται (εντός του τριγώνου).
Εργασία 1 : Οι μαθητές να διαβάσουν το ιστορικό σημείωμα και να γνωρίζουν π.χ. τουλάχιστον 4 προτάσεις με τις οποίες είναι ισοδύναμο το Ευκλείδειο αίτημα.
Εργασία 2 : Τα παρακάτω 5 αιτήματα, όπως ακριβώς υπάρχουν στο 1ο βιβλίο (από τα 13) των *Στοιχείων* του Ευκλείδη (περίπου 300 π.Χ.) να γραφούν σε χαρτόνι από ένα μαθητή το οποίο να αναρτηθεί στην αίθουσα διδασκαλίας.

Αἰτήματα ε΄.
α΄. Ἠιτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.
β΄. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβαλεῖν.
γ΄. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.
δ΄. Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.
ε΄. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες. **(Από το 1ο Βιβλίο των *Στοιχείων* του Ευκλείδη (300 π. Χ.))**

4^{η} Διδακτική ενότητα : § 4.4 Γωνίες με πλευρές παράλληλες.
Να αναφερθεί και η περίπτωση που δυο γωνίες έχουν τις πλευρές τους αντίστοιχα παράλληλες και η μια είναι ορθή (οπότε είναι και η άλλη).

Άσκηση 1: Αν δυο ευθείες τέμνονται να δειχθεί ότι και δυο κάθετες (αντίστοιχα) σ' αυτές τέμνονται.
Άσκηση 2: Να αποδειχθεί ότι οι διχοτόμοι δυο εξωτερικών γωνιών ενός τριγώνου τέμνονται.
(Οι ασκήσεις αυτές μαζί με αυτή του προηγούμενο μαθήματος προετοιμάζουν το επόμενο μάθημα).
Εργασία σελ. 89. Ασκήσεις: Εμπέδωσης 4, 5. Αποδεικτική 1.

5^{η} Διδακτική ενότητα : § 4.5 Αξιοσημείωτοι κύκλοι τριγώνου

Βλέπε παρακάτω σχέδιο διδασκαλίας.

6^{η} Διδακτική ενότητα : § 4.6, § 4.7

Επισημάνσεις:
1. Το ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 180^{ο}, είναι συνέπεια του αιτήματος παραλληλίας, αφού για την απόδειξή του χρησιμοποιείται η Πρόταση 1. Έτσι είναι καλό να ερωτηθούν οι μαθητές αν χρειάστηκε το αίτημα παραλληλίας και σε ποιο σημείο ή αν μπορούσε να αποδειχθεί το θεώρημα χωρίς το αίτημα παραλληλίας. Στην υπερβολική Γεωμετρία το άθροισμα των γωνιών τριγώνου είναι μικρότερο από 180^{ο}, ενώ στην Ελλειπτική μεγαλύτερο από 180^{ο} (π.χ. γωνίες σφαιρικού τριγώνου).

2. Ποιες δυνατότητες μας δίνει το θεώρημα;

- Να υπολογίζουμε μια γωνία τριγώνου όταν ξέρουμε τις άλλες δυο.
- Να εκφράζουμε μια γωνία συναρτήσει των άλλων δυο.
- Να εκφράζουμε το άθροισμα δυο γωνιών τριγώνου συναρτήσει της τρίτης κλπ
- Να υπολογίζουμε το ημιάθροισμα των γωνιών τριγώνου κλπ.

3. Να αναφερθεί ως Πόρισμα ή να δοθεί ως άσκηση, το εξής (νέο) κριτήριο ισότητας τριγώνων: Αν δυο τρίγωνα έχουν δυο γωνίες ίσες μια προς μια και δυο πλευρές που βρίσκονται απέναντι από το ένα ζευγάρι των ίσων γωνιών ίσες, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα. Επίσης η ειδική περίπτωση αυτού δε ορθογώνια τρίγωνα (μια κάθετη και η απέναντι γωνία που δεν υπάρχει –και καλώς- στα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων).

Σημείωση: δυο τρίγωνα μπορεί να έχουν δυο πλευρές τους και δυο γωνίες τους ίσες μια προς μια, όχι αντίστοιχες, και να μην είναι ίσα (ψευδοΐσα τρίγωνα). Δεν είναι όμως εδώ ο κατάλληλος χώρος για να αναφερθούμε στο θέμα αυτό με το οποίο έχω ασχοληθεί τελευταία.

4. Ίδια σχέση με τις γωνίες με πλευρές κάθετες έχουν και οι γωνίες με πλευρές παράλληλες. Να αναφερθεί και η περίπτωση που δυο γωνίες έχουν τις πλευρές τους κάθετες και η μια είναι ορθή.
Εφαρμογή 1 (σελ.86). Ασκήσεις Εμπέδωσης 1,2 Αποδεικτικές 2.

$7^{η}$ **Διδακτική ενότητα :** § 4.8 - Ασκήσεις
Να βρεθεί πρώτα το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού τετραπλεύρου.
Ας σημειωθεί ότι τα θεωρήματα δεν ισχύουν για μη κυρτά πολύγωνα. Για παράδειγμα, ένα μη κυρτό τετράπλευρο μπορεί να έχει άθροισμα (εσωτερικών ή κυρτών) γωνιών του 4 ορθές, μπορεί όμως να έχει και λιγότερο από 4 ορθές.

Ασκήσεις : Κατανόησης 3,5, Εμπέδωσης 7.

$8^{η}$ Διδακτική ενότητα : Επανάληψη κεφαλαίου - Ασκήσεις.

Βασικά σημεία κεφαλαίου:
Αξίωμα παραλληλίας και σχέση του με Ευκλείδειο αίτημα και άθροισμα γωνιών τριγώνου. Το αξίωμα αυτό χαρακτηρίζει όλη την επόμενη Γεωμετρία ως Ευκλείδεια.

Μεθοδολογία: το άθροισμα των γωνιών τριγώνου είναι η μοναδική και πολύ σπουδαία σχέση για τον υπολογισμό γωνιών τριγώνου, την λογιστική επεξεργασία και την δημιουργία σχέσεων μεταξύ των γωνιών τριγώνου.

Ασκήσεις : Αποδεικτικές 2, 3 (σελ.82) και 3, 4 (σελ.87).

$9^{η}$ Διδακτική ενότητα : Λύση ασκήσεων (Στην τάξη καλό είναι να λύνουμε (υποδειγματικά) αποδεικτικές ασκήσεις ή σύνθετα θέματα).

Συνθετική εργασία στο κεφάλαιο 4: Το Ευκλείδειο αίτημα διά μέσου των αιώνων (εν συντομία)- Μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες (Στο διαδίκτυο και στις εγκυκλοπαίδειες υπάρχει πλούσιο υλικό). Οι ενδιαφερόμενοι μαθητές μπορούν να χωριστούν σε ομάδες και κάθε μια να αναλάβει ένα θέμα ή μια χρονική περίοδο.

....

3. ΣΧΕΔΙΟ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

$2^{η}$ Διδακτική ενότητα: § 4.5 Αξιοσημείωτοι κύκλοι τριγώνου.

Ι. Διδακτικοί στόχοι - Ταξινόμηση σε είδη μάθησης.
Α. Να αποκτήσουν οι μαθητές την ικανότητα να αναφέρουν τα Θεωρήματα της §4.5. («Πληροφορίες»)
Β. Να κατανοήσουν ότι τα θεωρήματα αυτά είναι συνέπεια του αιτήματος παραλληλίας.
Γ. Να μπορούν να λύνουν απλές ασκήσεις εφαρμόζοντας τα θεωρήματα αυτά. («Νοητικές δεξιότητες»)

ΙΙ. Μορφή διδασκαλίας: Καθοδηγούμενη αυτενέργεια - ερωτηματικός διάλογος.

ΙΙΙ. Διδακτική Μέθοδος : Παραγωγική.

IV. Εποπτικά μέσα: Πίνακας, χρ. κιμωλίες.

V. Διδακτικές ενέργειες

1. *Ανάκληση προηγουμένων γνώσεων.*
Έλεγχος γνώσεων προηγουμένου μαθήματος και προηγουμένων γνώσεων (μεσοκάθετη τμήματος, διχοτόμος γωνίας και χαρακτηριστικές τους ιδιότητες).
2. *Δημιουργία κινήτρων μάθησης*
Τρία χωριά Κ, Λ, Μ θέλουν να ανοίξουν μια Γεώτρηση σε ένα σημείο που να ισαπέχει από τις πλατείες τους. Ο Μηχανικός τους υπέδειξε ένα τέτοιο σημείο και έτσι έμειναν είναι όλοι ικανοποιημένοι! Πως το βρήκε άραγε;

3. *Πληροφόρηση*

Σήμερα θα μάθετε σχετικά με δυο αξιοσημείωτους κύκλους τριγώνου. Τον περιγεγραμμένο, που περνά από όλες τις κορυφές του, και τον εγγεγραμμένο που εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του.

4. *Κατεύθυνση προσοχής μαθητών-παροχή οδηγιών για νέα μάθηση.*

Α. Περιγεγραμμένος κύκλος

- Ποια ιδιότητα θέλουμε να έχει το σημείο που θα ανοιχτεί η Γεώτρηση;
- Θυμάστε κάποια πρόταση σχετική με ισότητα αποστάσεων ενός σημείου από (δυο) σημεία;
- Σχεδιάστε ένα τρίγωνο και θεωρήσετε τις μεσοκαθέτους σε δυο πλευρές του Εξετάσετε αν τέμνονται.
- Προσπαθήστε να δείξετε ότι από το σημείο τομής τους διέρχεται και η τρίτη μεσοκάθετη.
- Τι συμπεραίνετε; (αυτός είναι ένας *συνηθισμένος τρόπος* για να αποδεικνύουμε ότι τρεις ευθείες συντρέχουν)
- Μπορείτε τώρα να γράψετε κύκλο που να διέρχεται από όλες τις κορυφές του τριγώνου; Ποιο θα είναι το κέντρο του; (περίκεντρο, Ο);

Β. Εγγεγραμμέμοςς κύκλος

5. *Δημιουργία κινήτρων μάθησης*
Τρία άλλα χωριά Α, Β, Γ ήταν πιο απαιτητικά: δεν ήθελαν την παραπάνω λύση. Επειδή υπήρχαν οι δρόμοι ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ έκριναν πιο δίκαιο και πιο εξυπηρετικό η Γεώτρηση να ισαπέχει και από τους τρεις αυτούς δρόμους. Μπορείτε να τους πείτε σε πιο σημείο θα πρέπει να ανοιχθεί η γεώτρηση ή να …ρωτήσουν ξανά τον Μηχανικό;

6. *Κατεύθυνση προσοχής μαθητών-παροχή οδηγιών για νέα μάθηση.*

- Ποια ιδιότητα θέλουμε να έχει το σημείο στη δεύτερη Γεώτρηση;
- Θυμάστε κάποια πρόταση σχετική με ισότητα αποστάσεων σημείου από ευθείες;
- Σχεδιάστε ένα τρίγωνο και θεωρήσετε τις διχοτόμους δυο εσωτερικών γωνιών του. Εξετάσετε αν τέμνονται.
- Προσπαθήστε να δείξετε ότι από το σημείο τομής τους διέρχεται και η διχοτόμος της τρίτης γωνίας.
- Τι συμπεραίνετε;
- Μπορείτε τώρα να γράψετε κύκλο που να εφάπτεται στις πλευρές του τριγώνου; Ποιο θα είναι το κέντρο του; (έγκεντρο, Ι κλπ);

7. *Εκτέλεση ενεργειών μαθητών – επανατροφοδότηση – εκτίμηση.*

- Να αποδείξετε ότι το έγκεντρο και το περίκεντρο ισοσκελούς τριγώνου βρίσκονται πάνω στην διάμεσο από την κορυφή του.
- Ποια σχέση έχει το περίκεντρο και το έγκεντρο ενός ισόπλευρου τριγώνου;
- Η μεσοκάθετη σε μια κάθετη πλευρά ορθογωνίου τριγώνου τέμνει την υποτείνουσα στο σημείο Μ. Να αποδείξετε ότι το Μ είναι το περίκεντρο του τριγώνου. Τι συμπεραίνετε;

8. *Ενίσχυση της συγκράτησης των νέων στοιχείων - Μεταφορά μάθησης.*

- Σε ποιο σημείο της απόδειξης ότι οι μεσοκάθετοι τριγώνου συντρέχουν χρησιμοποιήθηκε το αίτημα παραλληλίας;
- Πως θα κατασκευάσουμε (με κανόνα και διαβήτη) τον περιγεγραμμένο κύκλο ενός τριγώνου; Πως τον εγγεγραμμένο;
- Εφαρμογή σελ. 81 (παρεγγεγραμμένοι κύκλοι τριγώνου). Να γίνει ο ένας κύκλος, αλλά να αναφερθεί ότι υπάρχουν τρεις.
- Ανακεφαλαίωση- Συμπέρασμα για την κατασκευή των Γεωτρήσεων.

Ιστορικά στοιχεία- πληροφόρηση: Εκτός από το περίκεντρο Ο και το έγκεντρο τριγώνου υπάρχουν δυο ακόμη αξιοσημείωτα σημεία τριγώνου. Το ορθόκεντρο Η (σημείο τομής υψών) και το βαρύκεντρο G (σημείο τομής διαμέσων) όπως θα δούμε παρακάτω. Μάλιστα, όπως απέδειξε ο μεγάλος Ελβετός Μαθηματικός L. Euler (1707-1783) τα σημεία Η, G, O βρίσκονται στην ίδια ευθεία (*ευθεία Euler*) και μάλιστα ισχύει HG = 2GO. Το μέσο του ΗΟ είναι το κέντρο ενός σημαντικού κύκλου του τριγώνου, του *κύκλου Euler (*ή κύκλου των 9 σημείων). Τα θέματα όμως αυτά απαιτούν την θεωρία των εγγραψίμων τετραπλεύρων.
Φέτος γιορτάζουμε τα *300 χρόνια* από τη γέννηση του μεγάλου αυτού Μαθηματικού και Φυσικού επιστήμονα.

VI. *Εργασία στο σπίτι* :

1. Να κατασκευάσετε (με κανόνα και διαβήτη) τον περιγεγραμμένο κύκλος ενός (αμβλυγωνίου) τριγώνου. Επίσης να κατασκευαστεί ο εγγεγραμμένος κύκλος ενός (οξυγωνίου) τριγώνου.
2. Άσκηση αποδεικτική (βιβλίου) 4.
3. Αν σε ένα τρίγωνο το περίκεντρο και το έγκεντρο συμπίπτουν, να βρείτε το είδος του τριγώνου.
4. Ένας μαθητής να βρει στοιχεία για τον Euler και να τα διαβάσει στην τάξη.-

Υ.Γ. Ένα αντίγραφο να μείνει στο φάκελο «Διδακτικής Μαθηματικών» του σχολείου.

Δημήτριος Ι. Μπουνάκης

Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών