ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗ Δ/ΝΣΗ Π/ΘΜΙΑΣ &
Δ/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΚΡΗΤΗΣ
ΓΡΑΦΕΙΟ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΣΥΜΒΟΥΛΩΝ
Δ.Ε. Ν. ΗΡΑΚΛΕΙΟΥ

Δημήτριος Ι. Μπουνάκης
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών
Ταχ. Δ/νση : Μονοφατσίου 8
Ταχ. Κώδικας : 712 01 ΗΡΑΚΛΕΙΟ
Τηλ. υπηρεσίας : 2810333768
Τηλ. Κατοικίας : 2810252140
Κινητό : 6976465429
e-mail : dimitrmp@sch.gr

Πληροφορίες : Μιχάλης Βαβουρανάκης
e-mail : grss@dide.ira.sch.gr
Τηλέφωνο - FAX :2810342206

Ηράκλειο, 22 Οκτωβρίου 2007

Αρ. Πρωτ.: 125

Προς : Τους κ. κ. καθηγητές Μαθηματικών των Λυκείων του Ν. Ρεθύμνου και Ν. Ηρακλείου αρμοδιότητας μου.

Κοιν.: Προϊστάμενο Επιστημονικής & Παιδαγωγικής Καθοδήγησης Δ/θμιας Εκπ/σης Κρήτης.

ΘΕΜΑ : ΔΙΔΑΚΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ (ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ)

Παρατηρήσεις, Συμπληρώσεις και Ασκήσεις στο πρώτο μέρος του 1ου κεφαλαίου της Ανάλυσης (ενότητες 1.1, 1.2, 1.3)

1. Απαραίτητη είναι η γενική επανάληψη της κλασικής Άλγεβρας κυρίως της Α΄ Λυκείου με έμφαση στις ανισότητες, απόλυτες τιμές και στο τριώνυμο. Η επανάληψη αυτή μπορεί να συνδυαστεί με την εύρεση του πεδίου ορισμού συναρτήσεων.

2. α) Να χρησιμοποιούμε και άλλους συμβολισμούς για τον τύπο μιας συνάρτησης, εκτός από τον συνηθισμένο $y = f(x)$: η ανεξάρτητη μεταβλητή καλό είναι να μην είναι πάντα x και η εξαρτημένη y, *ιδίως στις παραγώγους* π.χ. $x(t)$, $φ(λ)$, $g(y)$, $Q(P)$ κλπ.
Αυτό αποτρέπει την μονοτονία, βοηθά στην κατανόηση των διαφόρων εννοιών που αναφέρονται στις συναρτήσεις και συνδέει τις συναρτήσεις με πραγματικά αλληλοεξαρτώμενα μεγέθη από άλλες επιστήμες.
β) Στην αντίστροφη της $y = f(x)$, $x = f^{-1}(y)$, η ανεξάρτητη μεταβλητή δεν υπάρχει πάντα λόγος να γίνεται x (και η εξαρτημένη y) καλύτερα να μένει όπως προκύπτει. Όταν όμως εξετάζουμε και τις δυο συναρτήσεις στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων, τότε επιβάλλεται η ανεξάρτητη μεταβλητή να παρίσταται με το ίδιο γράμμα.

3. Βασικές μέθοδοι για την (αλγεβρική) εύρεση της μονοτονίας μιας συνάρτησης **.**
α) Μέθοδος της διαφοράς.
β) Κατασκευαστική μέθοδος (ευθεία απόδειξη). Χρήσιμες είναι εδώ οι ιδιότητες των

ανισοτήτων.

4. Μετά τον ορισμό της γν. αύξουσας (γν. φθίνουσας) συνάρτησης χρήσιμο είναι να αποδείξουμε (με άτοπο απαγωγή) ότι

- Αν φ γνησίως αύξουσα τότε, $\varphi(\alpha) < \varphi(\beta) \Rightarrow \alpha < \beta$
- Αν φ γνησίως φθίνουσα τότε, $\varphi(\alpha) < \varphi(\alpha) \Rightarrow \alpha > \beta$
- Αν φ γνησίως μονότονη τότε $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) \Rightarrow \alpha = \beta$ (1-1).

Από τον ορισμό της μονοτονίας (στο τελευταίο, της συνάρτησης) ισχύουν και τα αντίστροφα. Έτσι οι προκύπτουσες ισοδυναμίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη λύση ανισώσεων και εξισώσεων.

5. Πολλές φορές για την απόδειξη του 1-1 μιας συνάρτησης είναι ευκολότερο να δείξουμε πρώτα ότι είναι γνησίως μονότονη, π.χ. $\lambda(x) = e^x - 5x$.

6. Η μονοτονία μιας συνάρτησης αναφέρεται πάντοτε σε συγκεκριμένα διαστήματα του πεδίου ορισμού της και δεν κληρονομείται (πάντα) στην ένωσή τους**.**

Έτσι, αν φ γνησίως φθίνουσα (γνησίως αύξουσα) στα διαστήματα (α, β], (β, γ), τότε δεν είναι γν. φθίνουσα (γν. αύξουσα) στην ένωση τους $(\alpha, \beta] \cup (\beta, \gamma)$, π.χ. η συνάρτηση φ με

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} \text{ με } x > 0 \text{ και } \varphi(x) = -x \text{ για } x \leq 0.$$

- Ισχύει όμως ότι :
  Αν φ γνησίως φθίνουσα (γν. αύξουσα) στα διαστήματα (α, β], (β, γ) και συνεχής στο β, τότε η φ είναι γν. φθίνουσα (γν. αύξουσα) στην ένωση τους $(\alpha, \beta] \cup (\beta, \gamma) = (\alpha, \gamma)$. (απόδειξη σε επόμενο φυλλάδιο)

7. Η (αλγεβρική) εύρεση των (ολικών) ακροτάτων μιας συνάρτησης μπορεί να γίνει:

α) Με γνωστές ανισοταυτότητες:

- $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$ ή $(\alpha + \beta)^2 \geq 4\alpha\beta$ (ισότητα για α = β)
- Αν $\theta > 0$ τότε $\theta + \frac{1}{\theta} \geq 2$ (ισότητα για θ = 1).

π.χ. για την συνάρτηση $f(x) = \frac{12x}{9 + x^2}$, έχουμε $9 + x^2 \geq 6|x|$ ή $|f(x)| \leq 2$ με ισότητα για x = 3, -3 κλπ.

β) με την βοήθεια της μονοτονίας σε κλειστό διάστημα.

π.χ. η $f(t) = \sqrt{2 - \sqrt{t - 1}}$ με A = [1, 5], αποδεικνύεται γν. φθίνουσα, οπότε για κάθε $1 \leq t \leq 5$ ισχύει $f(5) \leq f(t) \leq f(1)$, άρα η f έχει μέγιστο, ελάχιστο κλπ.

Ενώ στο διάστημα (1, 5) ισχύει $f(5) < f(t) < f(1)$ και δεν έχει ακρότατα.

- Γενικά: μια γνησίως μονότονη συνάρτηση σε *ανοικτό* διάστημα, δεν έχει ακρότατα. (Απόδειξη διά της εις άτοπον απαγωγής)

γ) Με την βοήθεια του συνόλου τιμών,
π.χ. αν $φ(Α) = [2, +\infty)$, η φ έχει ελάχιστο το 2 (για την τιμή του $x \in A$ με $φ(x) = 2$) αλλά όχι μέγιστο.

8. ***Σύνολο τιμών Συνάρτησης***

Το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης παίζει σπουδαίο ρόλο σε πολλά θέματα της Ανάλυσης. Είναι χρήσιμο :

- ✓ Για την εύρεση των (ολικών) ακροτάτων.
- ✓ Ως πεδίο ορισμού της αντίστροφης
- ✓ Για την ύπαρξη ρίζας εξίσωσης.

Τρόποι εύρεσης: Αλγεβρικός - Αναλυτικός.

Η (αλγεβρική) εύρεση του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης μπορεί να μας δώσει συγχρόνως και την πληροφορία αν η συνάρτηση είναι 1-1 και στην περίπτωση αυτή έχουμε άμεσα και την αντίστροφή της.

Παράδειγμα
Έστω η συνάρτηση $φ(x) = 2+\sqrt{x-1}$. Πεδίο ορισμού $A = [1, +\infty)$.

Αναζητούμε τα $y \in R$ για τα οποία υπάρχει $x \in A$ με $y = φ(x)$, δηλαδή λύνουμε την εξίσωση $y = φ(x)$ ως προς x (με παράμετρο y).

$$\begin{aligned} y = φ(x) &\Leftrightarrow y = 2+\sqrt{x-1} \\ &\Leftrightarrow y - 2 = \sqrt{x-1} \\ &\Leftrightarrow x - 1 = (y-2)^2 \text{ και } y \geq 2 \\ &\Leftrightarrow x = 1 + (y-2)^2,\ y \geq 2. \end{aligned}$$

Άρα για κάθε $y \geq 2$ υπάρχει $x = 1 + (y-2)^2 \geq 1$ ($x \in A$) με $y = φ(x)$.
Άρα $φ([1, +\infty) = [2, +\infty)$.
Επί πλέον επειδή για κάθε $y \geq 2$ υπάρχει μοναδικό $x = 1 + (y-2)^2 \in A$ με $y = φ(x)$, η φ είναι 1-1, με αντίστροφη την $φ^{-1}(y) =1 + (y-2)^2$, $y \geq 2$.

Παρατήρηση
Η αλγεβρικός τρόπος μπορεί να μην εφαρμόζεται γενικώς (π.χ. όταν δεν μπορεί να λυθεί ως προς x η εξίσωση $y = f(x)$, π.χ. $f(x) = xe^x$) , αλλά πολλές φορές είναι απλούστερος, αφού δεν απαιτεί την συνέχεια, την μονοτονία και την εύρεση ορίων του αναλυτικού τρόπου..

9. Η αντίστροφη μιας γν. μονότονης συνάρτησης είναι της αυτής μονοτονίας.

Πράγματι, έστω $φ(x)$, $x \in A$, π.χ. γν. φθίνουσα και $κ, λ \in φ(Α)$, $κ < λ$.
Τότε υπάρχουν $α, β \in A$ με $κ = φ(α)$, $λ = φ(β)$.
Έτσι έχουμε $κ < λ \Rightarrow φ(α) < φ(β) \Rightarrow α > β \Rightarrow φ^{-1}(κ) > φ^{-1}(λ)$.

10. Σχέση φ , $φ^{-1}$ και διχοτόμου y = x.

Εκτός από την γνωστή και αξιοσημείωτη συμμετρία, έχουμε τα εξής:

α) Αν $φ(x) = x$ τότε $φ(x) = φ^{-1}(x)$ ($x \in A \cap φ(A) \neq \varnothing$).
Δηλαδή, τα κοινά σημεία της γ. π. της φ(x) με την y = x είναι και κοινά σημεία των φ, $φ^{-1}$, y = x.

β) Αν φ γνησίως αύξουσα τότε, $φ(x) = φ^{-1}(x) \Leftrightarrow φ(x) = x$ ($x \in A \cap φ(A)$).

(Το ορθό αποδεικνύεται με άτοπο απαγωγή, ενώ το αντίστροφο προκύπτει εύκολα)
Άρα τα κοινά σημεία της (γν. αύξουσας) φ με την αντίστροφή της είναι πάνω στην διχοτόμο y = x. Αυτό είναι πολύ χρήσιμο ιδίως όταν δεν μπορεί να βρεθεί η αντίστροφη π.χ. $φ(x) = xe^{x-1}$, $x \geq 0$,

γ) Αν η φ είναι γνησίως φθίνουσα, δεν ισχύει η προηγούμενη ισοδυναμία.

Παράδειγμα 1
Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$, x > 0, έχει άπειρα κοινά σημεία (ταυτίζεται) με την αντίστροφή της $f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$.

Παράδειγμα 2
Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1-x}$, $x \leq 1$, είναι γνησίως φθίνουσα και έχει με την αντίστροφή της $f^{-1}(x) = 1 - x^2$, $x \geq 0$, κοινά σημεία (στο σύνολο [0, 1]) τα σημεία

$$(0,1),\ (1,0),\ \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right).$$

(προκύπτουν από την λύση της εξίσωσης $f(x) = f^{-1}(x)$, $x \in [0, 1]$ ή του συστήματος (y = f(x), x = f(y)).

Σημείωση 1

Πρόσφατα ένας συνάδελφος «απέδειξε» ότι σε κάθε περίπτωση τα κοινά σημεία των f, f^{-1} είναι πάνω στην διχοτόμο y = x. Όμως θεωρεί ότι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης δημιουργείται με ορισμένη φορά διαγραφής. Όποιος ενδιαφέρεται σχετικά μπορεί να ανατρέξει στο διαδίκτυο.

Σημείωση 2

Σε ορισμένα βιβλία και περιοδικά υπάρχουν θεωρητικές ασκήσεις όπου με δεδομένη μια συναρτησιακή σχέση για την f (π.χ. $f^3(x) + f(x) = 3x$) αποδεικνύεται κατ' αρχήν ότι η f είναι 1-1. Στην συνέχεια η αντίστροφη βρίσκεται θέτοντας y = f(x) και καταλήγοντας σε μια σχέση της μορφής x = g(y), οπότε συνάγεται ότι $f^{-1}(y) = g(y)$. Για να είναι αυτό σωστό πρέπει να δειχθεί και το αντίστροφο: $x = g(y) \Rightarrow y = f(x)$.
(Βλέπε σχετικά την άσκηση 16).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ (ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ)

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $x(t) = \ln\frac{1+t}{1-t}$ και να δειχθεί ότι είναι περιττή. Να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης (γ. π.) της $x(t)$ με τους άξονες.

2.Να βρεθούν τα σημεία τομής των γ. π. των συναρτήσεων $g(x) = x^3 – x + 1$, $h(x) = 2x+3$.

3. Να εξεταστεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $\varphi(y) = \frac{1}{y} - \ln y$ και να δειχθεί ότι η εξίσωση $y\ln y + y = 1$ έχει μοναδική προφανή λύση, η οποία και να βρεθεί.

4. Έστω η συνάρτηση φ με τύπο $\varphi(\alpha) = \left(\frac{3}{7}\right)^{\alpha} + \left(\frac{4}{7}\right)^{\alpha} - 1$.

α) Να αποδειχθεί ότι η φ είναι γνησίως φθίνουσα (στο πεδίο ορισμού της),
β) Να δειχθεί ότι η εξίσωση $3^x + 2^{2x} = 7^x$ έχει μόνο την λύση $x = 1$.
γ) Να λυθεί η εξίσωση $\varphi(x^3 + x) = \varphi(3 - x)$.

5. α) Αν για μια συνάρτηση φ ισχύει $2000 \le \varphi(\lambda) \le 2007$ για κάθε $\lambda \in R$, τότε η φ:

Α. έχει ελάχιστο Β. έχει μέγιστο Γ. έχει ελάχιστο και μέγιστο Δ. ίσως έχει ακρότατα.

β) Μια συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το διάστημα [0, 1) και είναι 1-1. Η αντίστροφή της: Α. έχει μέγιστο Β. έχει ελάχιστο Γ. δεν έχει ακρότατα.

γ) Αν η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού το A και είναι 1-1, τότε η ισότητα $(gog^{-1})(\lambda) = \lambda$
Α. Δεν ισχύει ποτέ Β. ισχύει για κάθε $\lambda \in A$ Γ. ισχύει για κάθε $\lambda \in g(A)$

δ) Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το A και είναι 1-1, τότε για τις συναρτήσεις fof^{-1}, $f^{-1}of$ ισχύει
Α. είναι ίσες Β. δεν είναι ίσες Γ. μερικές φορές είναι ίσες.

6. Με την βοήθεια των ανισοταυτοτήτων $\alpha^2 + \beta^2 \ge 2\alpha\beta$, $\theta + 1/\theta \ge 2$, $(\theta>0)$, να βρεθεί η μέγιστη τιμή και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $x(t) = \frac{4t}{1+t^2}$. Επίσης η ελάχιστη τιμή της $f(x) = 1 + x^2 + \frac{1}{1+x^2}$. Έχει μέγιστη τιμή η f(x); (Απ.2, 2, -2, όχι)

7. Με την βοήθεια της ανισότητας $|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}| \le |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$ (ισότητα αν και μόνο $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ παράλληλα) να βρεθεί η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $h(x) = |x| + \sqrt{8 - x^2}$. (Απ. 4)

8. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $x(t) = t^2 - 4t + 6$, $t \ge 2$ είναι γνησίως μονότονη και να βρεθεί η αντίστροφή της. Στην συνέχεια να βρεθούν τα κοινά σημεία της γ. π. της x(t) με την αντίστροφή της.

9. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης $x(y) = \dfrac{e^y - 1}{e^y + 1}$, και η η αντίστροφή της αν υπάρχει.

10. Έστω η συνάρτηση φ με τύπο $\varphi(y) = \ln(-y + \sqrt{1 + y^2}\,)$. Να αποδειχθεί ότι

α) έχει πεδίο ορισμού το R και είναι περιττή,

β) είναι 1-1 και να βρεθεί η αντίστροφή της,

γ) να βρεθούν τα ακρότατα της φ και της αντίστροφής της.

11. Έστω f, g συναρτήσεις 1-1 με κοινό πεδίο ορισμού Α και κοινό σύνολο τιμών Α.
Να αποδειχθεί ότι, α) οι συναρτήσεις fog, gof είναι 1-1,
β) Ισχύει $(fog)^{-1} = g^{-1} o\, f^{-1}$, $(gof)^{-1} = f^{-1} o\, g^{-1}$.

12. Αν οι κορυφές ενός τριγώνου βρίσκονται στην υπερβολή y = 1/x να δειχθεί ότι και το ορθόκεντρό του βρίσκεται πάνω σ' αυτήν.

13*. Έστω f, g συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το R και g(R) = R ώστε (fog)(x) = x για κάθε $x \in R$. Να αποδειχθεί ότι, α) οι f, g είναι αντιστρέψιμες, β) $f = g^{-1}$, $g = f^{-1}$.

14*. Έστω η συνάρτηση με τύπο $x(t) = \dfrac{e^t}{e^t + \sqrt{e}}$, $t \in R$.

α) Να δειχθεί ότι για κάθε $x \in (0, 1)$ υπάρχει μοναδικό $t \in R$ με $x = \dfrac{e^t}{e^t + \sqrt{e}}$.

β) Η συνάρτηση f(α) = x(α) + x(1- α) , α∈R είναι σταθερή,

γ) Να υπολογιστεί το άθροισμα $\Sigma = x\left(\dfrac{1}{10}\right) + x\left(\dfrac{2}{10}\right) + ... + x\left(\dfrac{9}{10}\right)$. (Απ.9/2)

15*. α) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in R$ για τις οποίες το κλάσμα $K = \dfrac{x^2 - 2x + \lambda}{x^2 + 2x + \lambda}$ έχει έννοια για κάθε $x \in R$.

β) Από τις προηγούμενες τιμές του λ να βρεθεί εκείνη για την οποία το κλάσμα παίρνει όλες τις τιμές του διαστήματος [1/3, 3] και μόνο αυτές. (Απ.λ>1, λ = 4)

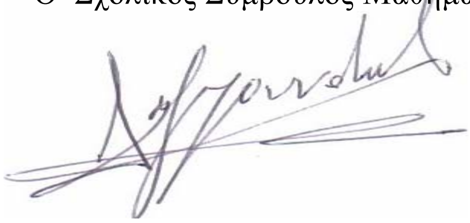
16*. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R και f(x) > 0 για κάθε $x \in R$, που ικανοποιεί την σχέση $\dfrac{1}{f(x)} - \ln f(x) = x$ για κάθε $x \in R$, καθώς και η συνάρτηση $\varphi(t) = \dfrac{1}{t} - \ln t$.

α) Να δειχθεί ότι οι f, φ είναι γνησίως μονότονες,

β) Να βρεθεί η αντίστροφη της f αν υπάρχει, γ) Να βρεθεί η τιμή f(1). (Απ. 1) –

Ο Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

Υ.Γ. Ένα αντίγραφο να μείνει στο φάκελο «Διδακτικής Μαθημ/κών».



Δημήτριος Ι. Μπουνάκης