



**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗ Δ/ΝΣΗ Π/ΘΜΙΑΣ &
Δ/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΚΡΗΤΗΣ
ΓΡΑΦΕΙΟ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΣΥΜΒΟΥΛΩΝ
Δ.Ε. Ν. ΗΡΑΚΛΕΙΟΥ**

Δημήτριος Ι. Μπουνάκης
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών
Ταχ. Δ/ση : Μονοφατσίου 8
Ταχ. Κώδικας : 712 01 ΗΡΑΚΛΕΙΟ
Τηλ. υπηρεσίας : 2810342206
Τηλ. Κατοικίας : 2810252140
Κινητό : 6976465429
e-mail : dimitrmp@sch.gr

Πληροφορίες : Μιχάλης Βαβουρανάκης
e-mail : grss@dide.ira.sch.gr
Τηλέφωνο - FAX : 2810342206

Ηράκλειο, 2 Οκτωβρίου 2007

Αρ. Πρωτ.: 79

**Προς : Τους κ. κ. καθηγητές
Μαθηματικών των Λυκείων του Ν.
Ρεθύμνου και Ν. Ηρακλείου
αρμοδιότητας μου.**

Κοιν.: Προϊστάμενο Επιστημονικής &
Παιδαγωγικής Καθοδήγησης
Δ/θμιας Εκπ/σης Κρήτης.

ΘΕΜΑ : ΔΙΔΑΚΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟΥ (ΣΧΕΔΙΑ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ)

Αγαπητοί συνάδελφοι,

Ένας από τους παράγοντες που συμβάλλουν ώστε μια διδασκαλία να είναι αποτελεσματική είναι και ο σωστός προγραμματισμός της. Το στόχο αυτό εξυπηρετούν κυρίως τα σχέδια διδασκαλίας. Για να θυμηθούν λοιπόν οι παλαιότεροι και να γνωρίσουν οι νέοι συνάδελφοι, σας στέλνω ένα σύντομο περιεχόμενο ενός μοντέλου σχεδίασης της διδασκαλίας, σύμφωνα με την θεωρία της «Αρχιτεκτονικής της Διδασκαλίας» των Gagne - Φλουρή και ένα τρόπο υλοποίησής του σε μια διδακτική ενότητα της Α΄ Λυκείου. Το σχέδιο αυτό χαρακτηρίζεται ως *πλήρες*, σε αντίθεση με ένα *απλό* σχέδιο διδασκαλίας. Το απλό σχέδιο φτιάχνεται σύντομα και περιέχει συνήθως τις βασικές διδακτικές ενέργειες, όχι αναλυτικά γραμμένες και μερικές ασκήσεις ή προβλήματα.

Πιστεύω ότι τα πλήρη σχέδια πρέπει να γίνονται όταν η διδακτική ενότητα το επιβάλλει (π.χ. διδακτική ενότητα με σημαντική ή σύνθετη θεωρία). Ευχής έργο θα'ταν κάθε σχολική χρονιά κάθε συνάδελφος να φτιάχνει και να εφαρμόζει 4- 5 πλήρη σχέδια διδασκαλίας, διατηρώντας συγχρόνως και ένα αρχείο ανά τάξη. Η γνώση και η εμπειρία που θα αποκόμιζε θα'ταν πολύτιμη για το διδακτικό του έργο. Όμως πολλές φορές αρκεί και ένα απλό σχέδιο διδασκαλίας μαζί με την γενικότερη εσωτερικευμένη γνώση, εμπειρία και ικανότητα του Καθηγητή. Το διδακτικό υλικό που σας στέλνω περιλαμβάνει:

- A. Γενική μορφή και περιεχόμενο ενός σχεδίου διδασκαλίας,
- B. Χωρισμός σε διδακτικές ώρες της ενότητας 1.4, Άλγεβρας Α΄ Λυκείου,

Γ. Ένα σχέδιο διδασκαλίας Άλγεβρας Α΄ Λυκείου και
Δ. Ασκήσεις σε μια διδακτική ενότητα.

Με την ευκαιρία σας επισημαίνω ότι, για τα έγγραφα που θα σας στέλνω, ανεξάρτητα από την αρχειοθέτηση που θα κάνει το σχολείο και τα δικά σας προσωπικά αντίγραφα που θα βγάζετε, χρήσιμο είναι να υπάρχει ένα αντίγραφο αυτών στο σχολείο σε χωριστό φάκελο. Καλό θα 'ταν λοιπόν, ένας Καθηγητής, π.χ. αυτός που διδάσκει στο Α1, να φροντίζει ένα φάκελο («Διδακτικής Μαθηματικών») που θα παραμένει στο σχολείο, ο οποίος θα περιέχει, ανά τάξη, όλα αυτά τα έγγραφα, αλλά και άλλα σχετικά με την Διδακτική των Μαθηματικών. Πιστεύω ότι διαχρονικά θα είναι πολύ χρήσιμος, αφού θα' ναι διαθέσιμος ανά πάσα στιγμή, από όλους τους συναδέλφους μόνιμους και μη, νέους και παλιούς, αλλά προπάντων για τους μελλοντικούς νέους συναδέλφους.

A. ΜΟΡΦΗ ΚΑΙ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ ΕΝΟΣ (ΠΛΗΡΟΥΣ) ΣΧΕΔΙΟΥ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

I. Διδακτικοί στόχοι - Ταξινόμηση σε είδη μάθησης.

Διατυπώνουμε όσο το δυνατόν σαφέστερα (με συγκεκριμένα ρήματα) τι επιδιώκουμε να κάνουν ή τι δυνατότητες θα αποκτήσουν οι μαθητές στο τέλος του μαθήματος (ή μετά από μια σειρά μαθημάτων). Οι διδακτικοί στόχοι αντιστοιχούν στα είδη μάθησης (κατά Gagne, όσο αφορά τον γνωστικό τομέα) που είναι:

1. «Πληροφορίες», δηλαδή απλές γνώσεις, ορισμούς, κανόνες, π.χ. να αναφέρουν οι μαθητές (ή να απομνημονεύσουν) τις ιδιότητες των δυνάμεων ή τα κριτήρια ισότητας τριγώνων κλπ.

2. «Νοητικές δεξιότητες». Είναι οι διαφόρων ειδών ικανότητες που επιδιώκουμε να μπορούν να κάνουν οι μαθητές, όπως δυνατότητα εφαρμογής κανόνα, σύνθεση κανόνων, λύση προβλήματος, π.χ. να μπορούν οι μαθητές να εφαρμόσουν ένα κριτήριο ισότητας τριγώνων σε δεδομένα τρίγωνα (κανόνας) ή να μπορούν να συγκρίνουν δυο τμήματα ή δυο γωνίες (επιλέγοντας οι ίδιοι τα κατάλληλα τρίγωνα: σύνθεση κανόνων).

3. «Γνωστική στρατηγική»: είναι η δυνατότητα του ατόμου να κατευθύνει την προσοχή, την αντίληψη, την μνήμη και γενικά τις πνευματικές του δυνάμεις ώστε να επινοεί τρόπους αντιμετώπισης δύσκολων ή πρωτότυπων ή ανοικτών προβλημάτων (όχι άμεση εφαρμογή συγκεκριμένης θεωρίας- ασκήσεις). Παρόλο που το είδος αυτό μάθησης είναι δύσκολο να καλλιεργηθεί πλήρως στο σχολείο, πρέπει να το επιδιώκουμε έστω και σε ένα χαμηλότερο επίπεδο.

Π.χ. Σε μια μεγαλούπολη διασταυρώνονται, ανά δυο, 100 δρόμοι, χωρίς να περνούν τρεις ή παραπάνω από το ίδιο σημείο. Πόσα φανάρια θα χρειαστούν για τις διασταυρώσεις;

II. Μορφή διδασκαλίας: Είναι ο (ορατός) τρόπος που επικοινωνεί ο μαθητής με τον Καθηγητή (π.χ. μονόλογος, αυτενέργεια, καθοδηγούμενη αυτενέργεια, διάλογος, ερωτηματικός διάλογος κλπ).

III. Διδακτική Μέθοδος : είναι η μέθοδος με την οποία ο μαθητής κατακτά το γνωστικό αντικείμενο (π.χ. Επαγωγική, Παραγωγική, εποπτικοπαραγωγική Αναλυτική, Συνθετική, κλπ).

IV. Εποπτικά μέσα: π.χ. πίνακας, χρωματιστές κιμωλίες, κατασκευές κλπ.

IV. Διδακτικές ενέργειες (Δ. Ε.)

Τις εσωτερικές διαδικασίες ή «φάσεις της μάθησης» που γίνονται στο εσωτερικό του μαθητή (κεντρικό νευρικό σύστημα) μπορούν να επηρεάσουν οι εξωτερικές (διδακτικές) ενέργειες του Καθηγητή που (πρέπει να) γίνονται κατά την διάρκεια της διδασκαλίας. Οι Δ. Ε. (κατά Gagne) είναι

1. Δημιουργία κινήτρων μάθησης.

Δίνουμε ένα ερώτημα, ένα πρόβλημα ή μια δραστηριότητα που ζητά απάντηση-λύση για να κινήσουμε το ενδιαφέρον των μαθητών. Τα νέα βιβλία του Γυμνασίου είναι πλούσια σε τέτοιες δραστηριότητες. Τα προβλήματα είναι συνήθως από την καθημερινή ζωή όπου οι μαθητές έχουν παραστάσεις, αλλά μπορούν να αναφέρονται και σε «έλλειψη καθαρά μαθηματικής γνώσης» (συνήθως στο Λύκειο). Πάντα πρέπει να μας βασανίζει το ερώτημα: πως θα κάνω το μάθημά μου πιο ενδιαφέρον;

2. Πληροφόρηση των μαθητών για τους στόχους του μαθήματος.

Οι μαθητές είναι καλό να γνωρίζουν από την αρχή για το τι πρόκειται να μάθουν. Έτσι θα' χουν περισσότερο ενδιαφέρον για το μάθημα.

3. Ανάκληση προηγούμενων γνώσεων.

Είναι προφανής η χρησιμότητα των προηγούμενων σχετικών γνώσεων για την κατανόηση του νέου μαθήματος, προπάντων στα Μαθηματικά. Πολλές φορές οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν το νέο μάθημα γιατί δεν έχει ληφθεί υπόψη ο παράγοντας αυτός.

4. Κατεύθυνση προσοχής μαθητών ή παρουσίαση του υλικού για την μάθηση.

Στρέφομε την προσοχή των μαθητών σε συγκεκριμένο σημείο ή ερέθισμα ή πρόβλημα.

5. (Ενδεχόμενη) Παροχή οδηγιών για νέα μάθηση.

Μετά που θα δοθεί στους μαθητές κάποια εργασία, αν δεν απαντούν ή δεν προχωρούν τους δίνουμε ερωτήσεις-υποδείξεις, οδηγίες, νύξεις, παροτρύνσεις κ.λ.π. για να τους βοηθήσουμε. Η βοήθεια δίνεται βαθμιαία, από τις γενικές ερωτήσεις-υποδείξεις, προχωρούμε ανάλογα με την πρόοδο των μαθητών στις πιο ειδικές.

6. Ενίσχυση της συγκράτησης των νέων στοιχείων.

- Ανακεφαλαίωση
- Μέριμνα για την καλή κωδικοποίηση των νέων στοιχείων με μνημονικούς κανόνες, πινακοποίηση, ιεράρχιση, ταξινόμηση κλπ.

7. Εκτέλεση ενεργειών μαθητών – επανατροφοδότηση - εκτίμηση.

Απλές εφαρμογές και ασκήσεις της θεωρίας. Προτιμούμε να έρθει στο πίνακα για να παρουσιάσει την εργασία του «μέτριος» μαθητής. Ο μαθητής αυτός, αν έχει εργαστεί, έχει «πάθει» και είναι σε θέση να «παρασύρει» στη μάθηση όλη την τάξη με τα πιθανά λάθη του.

8. Μεταφορά μάθησης.

Λύση αρχικού προβλήματος-δραστηριότητας, εφαρμογές δυσκολότερου επιπέδου-ασκήσεις (οριζόντια μεταφορά) αλλά και υποβοήθηση επόμενων μαθημάτων (κατακόρυφη μεταφορά).

9. Εργασία στο σπίτι και έλεγχος για επιβεβαίωση της μάθησης....

Η σειρά που με την οποία γίνονται οι Δ.Ε. μπορεί να αλλάζει, όπως μπορεί και να μην γίνει

κάποια, π.χ. η ανάκληση προηγούμενων γνώσεων αν είναι διαπιστωμένη η κατάκτησή τους. Πολλές φορές στην αρχή του μαθήματος μαζί με τον έλεγχο του προηγούμενου μαθήματος κάνουμε και ανάκληση προηγούμενων γνώσεων. Επίσης η Δ.Ε. της συγκράτησης των νέων στοιχείων μπορεί να γίνει μετά ή συγχρόνως με την εκτέλεση των ενεργειών του μαθητή.

B. Χωρισμός σε διδ. ωριαίες ενότητες της διδ. ενότητας 1.4 (Άλγεβρα, Α΄ Λυκείου).

Η ενότητα αυτή περιέχει βασικά θέματα της κλασικής Άλγεβρας και πρέπει να τύχει ιδιαίτερης προσοχής από τον διδάσκοντα. Ειδική αναφορά και εξάσκηση πρέπει να γίνει στις 2 βασικές μεθόδους απόδειξης ανισοταυτοτήτων: *ανάδρομη πορεία* (ισοδυναμιών) και *ευθεία-κατασκευαστική*.

Επίσης χρήσιμο θα είναι να γίνει ξεκαθάρισμα των εννοιών ανισότητας, ανίσωσης και ανισοταυτότητας. Η έννοια της ανίσωσης είναι αντίστοιχη της έννοιας της εξίσωσης, δηλαδή ζητούμε για ποιες τιμές του αγνώστου της γίνεται (αληθής) ανισότητα (συνήθως για άπειρες, σε αντίθεση με την εξίσωση). Όμοια, αντίστοιχη της έννοιας της ταυτότητας είναι στις ανισότητες η έννοια της ανισοταυτότητας (μόνιμη ανισότητα) π.χ. $x^2 \geq 0$, $1 + x^2 > 0$, $x \in \mathbb{R}$ κλπ.

Προτείνω 4 διδακτικές ώρες ως εξής:

1^η Ορισμός διάταξης και οι πέντε ιδιότητες της σελίδας 29.

2^η Ιδιότητες ανισοτήτων 1, 2, 3.

3^η Διδακτική ενότητα: Ιδιότητα 4 (να γίνει η απόδειξη, χάριν κυρίως της αποδεικτικής μεθόδου της «εις άτοπο απαγωγής» που σπανίζει στην Άλγεβρα).

4^η Διδακτική ενότητα: επανάληψη – λύση ασκήσεων.

Γ. Σχέδιο Διδασκαλίας (πλήρες)

2^η Διδακτική ενότητα (από την ενότητα 1.4): Ιδιότητες ανισοτήτων (ανισότητες και πράξεις).

I. Διδακτικοί στόχοι - Ταξινόμηση σε είδη μάθησης

1. Να είναι σε θέση οι μαθητές να γράφουν και να αναφέρουν (με λόγια) τις βασικές ιδιότητες 1, 2, 3 των ανισοτήτων. (είδος μάθησης «πληροφορίες»)
2. Να διαπιστώσουν ότι οι ιδιότητες με τις πράξεις διαίρεση και αφαίρεση δεν ισχύουν (γενικά). (είδος μάθησης «πληροφορίες»)
3. Να αποκτήσουν τις ικανότητες να εφαρμόζουν τις παραπάνω ιδιότητες σε διάφορες περιπτώσεις. (είδος μάθησης «Νοητικές δεξιότητες»)

II. Μορφή διδασκαλίας: Καθοδηγούμενη αυτενέργεια - ερωτηματικός διάλογος.

III. Διδακτική Μέθοδος : Επαγωγική - Παραγωγική.

IV. Εποπτικά μέσα: Πίνακας, χρωματιστές κιμωλίες.

IV. Διδακτικές ενέργειες

I. Έλεγχος και ανάκληση προηγούμενων γνώσεων.

- Ερωτήσεις από το προηγούμενο μάθημα...
- Ποιες από τις παρακάτω ανισότητες είναι αληθείς;

- $7 \geq 6, x^2+1 \geq 1, 1+a^2 < 0, -10 \leq -10, -2(1+\kappa^4) > 0.$
- Αν $(x - \alpha)^2 + y^2 = 0$ τότε τι συμπεραίνετε για το $x, y; \dots$
- Δείξτε ότι $2(x^2 + 25) \geq (x + 5)^2$. Πότε ισχύει η ισότητα;
- Αν $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$ δείξτε ότι $\alpha > \gamma$ (μεταβατική ιδιότητα).

2. Δημιουργία κινήτρων μάθησης

Πρόβλημα

Μια γέφυρα μπορεί να δεχθεί βάρος μέχρι 18 τόνους. Ένα φορτηγό βάρους 3500 Kg πρόκειται να περάσει από την γέφυρα αυτή φορτωμένο με σωλήνες βάρους 50 Kg. Μέχρι πόσες τέτοιες σωλήνες μπορεί να φορτώσει ώστε να μπορέσει να περάσει;
(οι μαθητές θα μεταφράσουν το πρόβλημα σε Μαθηματική γλώσσα ...)

3. Πληροφόρηση.

Σήμερα θα μάθετε μερικές ιδιότητες των ανισοτήτων σχετικές με τις πράξεις για να λύσετε σχετικά προβλήματα αλλά και να αποδεικνύετε ανισοταυτότητες.

5. Κατεύθυνση προσοχής μαθητών - παροχή οδηγιών για νέα μάθηση.

Στην ανισότητα $4 > -2$:

- Προσθέσετε (αφαιρέσετε) το 6 .
- Πολλαπλασιάσετε (διαιρέσετε) με το 3 (-3).
- Τι συμπεραίνετε;

4. Νέα μάθηση (με ενδεχόμενη παροχή οδηγιών).

A. Ιδιότητες και πράξεις: αφού έχει γίνει μια πρώτη επαγωγική προσπέλαση στις ιδιότητες παροτρύνουμε τους μαθητές να αποδείξουν ότι:

- $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \pm \gamma > \beta \pm \gamma$ (διαγραφής στην πρόσθεση-αφαίρεση),
- αν $\gamma > 0$ τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma$ (διαγραφής θετικού παράγοντα). Διάρθρωση;
- αν $\gamma < 0$ τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma$. Διάρθρωση;

B. α) Προσθέσετε, πολλαπλασιάσετε, κατά μέλη δυο δικές σας ομόστροφες (ετερόστροφες) ανισότητες (δυο ομάδες). Τι συμπεραίνετε; Απόδειξη της προσθετικής...

β) Η πολλαπλασιαστική ιδιότητα υπό συνθήκη...

γ) Αφαιρέσετε, διαιρέσετε. Τι συμπεραίνετε;

❖ Συμπέρασμα - διατύπωση με λόγια από τους μαθητές των ιδιοτήτων.

6. Εκτέλεση ενεργειών μαθητών – επανατροφοδότηση – εκτίμηση.

- Αν $\alpha + x > \beta$ τότε $x > \dots$, αν $\alpha - x < \beta$ τότε $x > \dots$ (επισήμανση της αλλαγής προσήμου κατά την μεταφορά όρου)
- Αν $1 < x < 2$ και $0 < y < 3$, βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχονται οι αριθμοί $-3x, 3x + 1, x + y, x - y, xy - 1$.
- Αν $\alpha + \beta - 2 > 0, \beta + \gamma > 3, \gamma + 1 > -\alpha$, δείξτε ότι $\alpha + \beta + \gamma > 2$.

7. Ενίσχυση της συγκράτησης των νέων στοιχείων.

Ανακεφαλαίωση ιδιοτήτων (ειδική αναφορά στον αρνητικό παράγοντα και στις εξαιρέσεις).

8. Μεταφορά μάθησης.

- Λύση αρχικού προβλήματος ... (περισσότερα για ανισώσεις παρακάτω...)
- Αν $\alpha > \beta > 0$ να δείξετε ότι $\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$ (μικρός θετικός παρανομαστής μεγάλο κλάσμα κλπ)
- Αν $\theta > 0$ τότε $\theta + \frac{1}{\theta} \geq 2$ (να απομνημονευθεί όπως και η προηγούμενη).
- Αν $\alpha < \beta$ να διατάξετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς $\alpha, \alpha - 1, \frac{\alpha + \beta}{2}, \beta + 2, \beta$.

9. Εργασία στο σπίτι:

i. Ασκήσεις βιβλίου Α' ομάδας 5, 6, 8.

ii. Αν $\alpha > \beta > 0$ να διατάξετε κατά αύξουσα σειρά τους αριθμούς $1, \frac{1}{1+\alpha}, \frac{1}{1+\beta}$.

Προαιρετική άσκηση: Αν $\alpha > \beta > 0$ δείξετε ότι $\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha} > \frac{3}{2}$ (κατασκευαστική μέθοδος).

Εθελοντική εργασία: Ένας μαθητής να γράψει σ' ένα χαρτόνι τις ιδιότητες των ανισοτήτων (για την τάξη).

Δ. Ασκήσεις στην 3^η διδακτική ενότητα (ιδιότητα 4).

1. Αν $2x - 1 > 1$ δείξετε ότι $x^{1453} - 1 > 0$ και αντιστρόφως.

2. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$(1 + x^2)^{2007} = 1, (3\lambda + 1)^{2007} - (\lambda + 3)^{2007} = 0 \text{ με } \lambda > 0, (y - 1)^{4016} = (y^2 + 2)^{2008}.$$

3. Αν $x > y > 0$ δείξετε ότι $\frac{1821}{1897 + 1866x^{1913}} < \frac{1821}{1897 + 1866y^{1913}}$ (επισημανση και εδώ της

κατασκευαστικής μεθόδου απόδειξης ανισοτήτων).

4. Έστω n περιττός φυσικός και α, β πραγματικοί αριθμοί.

i) Αν $\alpha < \beta$ αποδείξετε ότι $\alpha^n < \beta^n$, ii) Ισχύει, $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha^n < \beta^n$ (η χρήσιμη αυτή ιδιότητα να γραφεί συμπληρωματικά από τους μαθητές στο κάτω μέρος της σελίδας 30 του βιβλίου μαζί με τις άλλες).

iii) Να λύσετε την εξίσωση $(3x - 4)^{2007} = (x^2 - x)^{2007}$. –

Με συναδελφικούς χαιρετισμούς



Δημήτριος Ι. Μπουνάκης

Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών