ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ
ΑΛΓΕΒΡΑ Α' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέμα 1ο

Α. Έστω a ένας πραγματικός αριθμός. Να δώσετε τον ορισμό της απόλυτης τιμής του a

Μονάδες 7

Β.

i) Για τους αριθμούς $a,b \in R$ να δειχθεί ότι $|a+b| \le |a|+|b| : (1)$, όπου $|a+b|,|a|,|b|$ οι απόλυτες τιμές των $a+b,a,b$ αντίστοιχα

Μονάδες 13

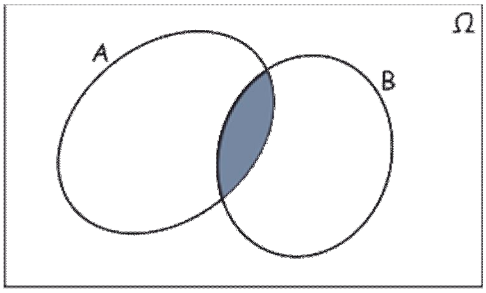
ii) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των αριθμών a,b ώστε να ισχύει η ισότητα στη πιο πάνω σχέση (1)

Μονάδες 5

Θέμα 2ο

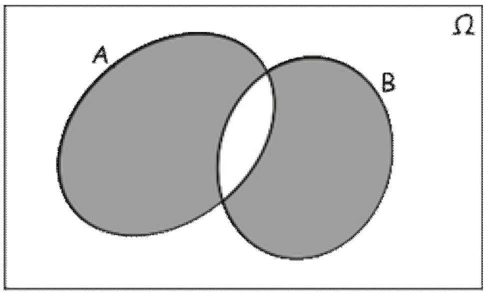
Έστω Α,Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με πιθανότητες
$P(A)=0,4$, $P(B)=0,5$ και $P(A \cup B)=0,7$

i) Να βρεθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου : "Πραγματοποιούνται συγχρόνως τα Α,Β"



Μονάδες 10

ii) Να βρεθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου : "Πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα Α,Β"



Μονάδες 10

iii) Αν C είναι οποιοδήποτε ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου Ω να δειχθεί ότι η παράσταση $K=|1-P(C)|+|P(C)|$ είναι ανεξάρτητη του C, με $P(C)$ την πιθανότητα του ενδεχομένου C

Μονάδες 5

Να δικαιολογήσετε όλες τις απαντήσεις σας

<u>Θέμα 3°</u>

Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - \lambda x - (\lambda^2 + 5) = 0, \lambda \in R$

i) Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ η παραπάνω εξίσωση έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες

Μονάδες 10

ii) Να υπολογίσετε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της παραπάνω εξίσωσης συναρτήσει του αριθμού λ

Μονάδες 7

iii) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού λ ώστε να ισχύει: $(x_1 - 1)\cdot(x_2 - 1) = -4$

Μονάδες 8

<u>Θέμα 4°</u>

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $g(x) = -x^2 + 6x - 8$ και $h(x) = 5 - x$

i) Να βρεθούν οι ρίζες των εξισώσεων $f(x) = 0, g(x) = 0, h(x) = 0$

Μονάδες 12

ii) Να λυθεί η ανίσωση $\dfrac{f(x)\cdot h(x)}{g(x)} \leq 0$

Μονάδες 13

Αιδηψός Τρίτη 28 Μαΐου 2013

Η Διευθύντρια

Ο Εισηγητής

Ενδεικτικές Λύσεις

<u>Θέμα 1ο</u>

Α. Έστω a ένας πραγματικός αριθμός. Να δώσετε τον ορισμό της απόλυτης τιμής του a

Μονάδες 7

Β.

iii) Για τους αριθμούς $a, b \in R$ να δειχθεί ότι $|a+b| \le |a| + |b| : (1)$, όπου $|a+b|, |a|, |b|$ οι απόλυτες τιμές των $a+b, a, b$ αντίστοιχα

Μονάδες 13

iv) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των αριθμών a, b ώστε να ισχύει η ισότητα στη πιο πάνω σχέση (1)

Μονάδες 5

<u>Απάντηση</u>

Α. Απόλυτη τιμή του πραγματικού αριθμού α και συμβολίζεται $|a|$ ονομάζουμε την απόσταση της εικόνας του α από την εικόνα της αρχής Ο του άξονα των πραγματικών αριθμών.

Β.

i) Ισοδύναμα έχουμε:

$$|a+b| \le |a| + |b| \overset{|a+b|,|a|,|b| \ge 0}{\Leftrightarrow} |a+b|^2 \le \left(|a| + |b|\right)^2 \overset{|x|^2 = x^2}{\Leftrightarrow} (a+b)^2 \le |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \overset{|a||b| = |ab|}{\Leftrightarrow}$$

$$\cancel{a^2} + 2ab + \cancel{b^2} \le \cancel{a^2} + 2|ab| + \cancel{b^2} \Leftrightarrow \cancel{2}ab \le \cancel{2}|ab| \Leftrightarrow \boxed{|ab| \ge ab}$$

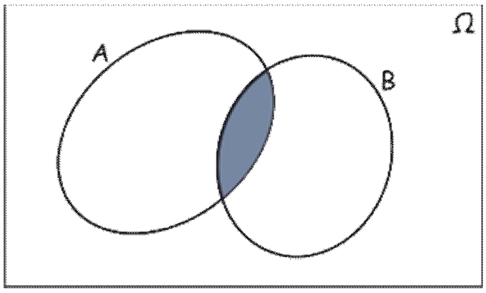
που ισχύει άρα και η αρχική

ii) Για να ισχύει $|a+b| = |a| + |b| \Leftrightarrow \ldots |ab| = ab \Leftrightarrow \boxed{ab \ge 0}$ *που θα συμβεί αν οι αριθμοί α, b είναι ομόσημοι ή ένας τουλάχιστον ίσος με μηδέν*

Θέμα 2ο

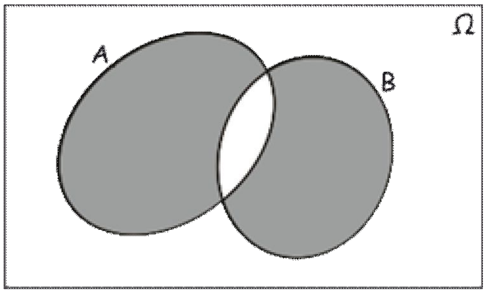
Έστω A,B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με πιθανότητες $P(A)=0{,}4$, $P(B)=0{,}5$ και $P(A\cup B)=0{,}7$

iv) Να βρεθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου : "Πραγματοποιούνται συγχρόνως τα A,B"



Μονάδες 10

v) Να βρεθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου : "Πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα A,B"



Μονάδες 10

vi) Αν C είναι οποιοδήποτε ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου Ω να δειχθεί ότι η παράσταση $K=\left|1-P(C)\right|+\left|P(C)\right|$ είναι ανεξάρτητη του C, με $P(C)$ την πιθανότητα του ενδεχομένου C

Μονάδες 5

Να δικαιολογήσετε όλες τις απαντήσεις σας

<u>Απάντηση</u>

i) *Φανερά ζητείται η πιθανότητα της τομής των Α, Β δηλαδή ψάχνουμε την* $P(A\cap B)$

Από τον τύπο

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\Rightarrow$$

$$P(A\cap B)=0{,}4+0{,}5-0{,}7\Rightarrow \boxed{P(A\cap B)=0{,}2}$$

ii) *Φανερά ζητείται η* $P\left[(A-B)\cap(B-A)\right]$ *. Είναι*

$$P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]\overset{(A-B)\cap(B-A)=\varnothing}{=}P(A-B)+P(B-A)=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow$$

$$P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)\Rightarrow$$

$$\ldots P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]=0{,}4+0{,}5-0{,}4\Rightarrow P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]=0{,}5$$

iii) *Επειδή για κάθε ενδεχόμενο* $C\subseteq\Omega$ *ισχύει:*

$$0\le P(C)\le 1\Rightarrow\begin{cases}P(C)\ge 0\\ 1-P(C)\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left|P(C)\right|=P(C)\\ \left|1-P(C)\right|=1-P(C)\end{cases}\Rightarrow K=1-\cancel{P(C)}+\cancel{P(C)}\Rightarrow\boxed{K=1}$$

Θέμα 3°

Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - \lambda x - \left(\lambda^2 + 5\right) = 0, \lambda \in R$

iv) Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ η παραπάνω εξίσωση έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες

Μονάδες 10

v) Να υπολογίσετε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της παραπάνω εξίσωσης συναρτήσει του αριθμού λ

Μονάδες 7

vi) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού λ ώστε να ισχύει: $\left(x_1 - 1\right) \cdot \left(x_2 - 1\right) = -4$

Μονάδες 8

Απάντηση

i) *Αν Δ είναι η διακρίνουσα της εξίσωσης, θα είναι :* $\Delta = \left(-\lambda\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left[-\left(\lambda^2 + 5\right)\right] = \lambda^2 + 4\left(\lambda^2 + 5\right) = 5\lambda^2 + 20 \geq 20 > 0$ *για κάθε πραγματική τιμή του λ και συνεπώς η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ*

ii) *Από τους τύπους του Vieta, αν* S, P *είναι αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών (έστω* x_1, x_2 *) , τότε είναι:*

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{-\lambda}{1} \Rightarrow \boxed{S = x_1 + x_2 = \lambda} \text{ και } P = x_1 x_2 = \frac{-\left(\lambda^2 + 5\right)}{1} \Rightarrow \boxed{P = x_1 x_2 = -\left(\lambda^2 + 5\right)}$$

iii) *Από*

$$\left(x_1 - 1\right) \cdot \left(x_2 - 1\right) = -4 \Leftrightarrow x_1 x_2 - x_1 - x_2 + 1 = -4 \Leftrightarrow P - S + 5 = 0 \Leftrightarrow -\left(\lambda^2 + 5\right) - \lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-\lambda^2 - \lambda = 0 \Leftrightarrow -\lambda\left(\lambda + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = 0 \text{ ή } \lambda = -1}$$

Θέμα 4°

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $g(x) = -x^2 + 6x - 8$ και $h(x) = 5 - x$

iii) Να βρεθούν οι ρίζες των εξισώσεων $f(x) = 0, g(x) = 0, h(x) = 0$

Μονάδες 12

iv) Να λυθεί η ανίσωση $\dfrac{f(x) \cdot h(x)}{g(x)} \leq 0$

Μονάδες 13

i) Από τους τύπου του Vieta είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 1 \text{ ή } x = 3}$,

$g(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 2 \text{ ή } x = 4}$ και

$h(x) = 0 \Leftrightarrow 5 - x = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 5}$

ii) Είναι $\dfrac{f(x) \cdot h(x)}{g(x)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{f(x) \cdot h(x) \cdot g(x) \leq 0} \\ x \neq 2 \text{ και } x \neq 4 \end{cases}$

Αν Θέσουμε $\Gamma = f(x) \cdot h(x) \cdot g(x)$, έχουμε τον παρακάτω πίνακα των προσήμων :

x	$-\infty$		1		2		3		4		5		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$h(x)$		$+$		$+$	‖	$+$		$+$	‖	$+$	0	$-$	
Γ		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι οι λύσεις της ζητούμενης ανίσωσης είναι

$$\boxed{x \in (-\infty, 1] \cup (2, 3] \cup (4, 5]}$$

ΚΑΛΟ ΚΑΛΟΚΑΙΡΙ