**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΙΟΥ ΙΟΥΝΙΟΥ 2011**
**$1^{O}$ ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ………………………………..**
**ΤΡΙΤΗ 24 ΜΑΙΟΥ 2011**
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α΄ΛΥΚΕΙΟΥ**
**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ : ΤΡΕΙΣ ( 3 )**

## ΘΕΜΑ Α (25 μονάδες)

**Α1.** Να **αποδείξετε** ότι τα εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από σημείο εκτός κύκλου είναι ίσα μεταξύ τους. **Μονάδες 10**

**Α2.** Δώστε τον **ορισμό** της διακέντρου (σχήμα προαιρετικό) **Μονάδες 3**

**Α3.** Να απαντήσετε στις ακόλουθες προτάσεις με **Σ** ή **Λ** αν κάθε πρόταση είναι **σωστή ή λάθος** αντίστοιχα.

**α**) Το ορθόκεντρο είναι το σημείο τομής των διχοτόμων στο τρίγωνο **Μονάδες 3**

**β**) Το κυρτό τετράπλευρο με όλες τις πλευρές του ίσες είναι πάντοτε τετράγωνο **Μονάδες 3**

γ) Το βαρύκεντρο ενός τριγώνου, απέχει από κάθε κορυφή του τα ¾ του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου **Μονάδες 3**

**δ**) Οι βάσεις του τραπέζιου μπορούν να είναι ίσες **Μονάδες 3**

## ΘΕΜΑ Β (25 μονάδες)

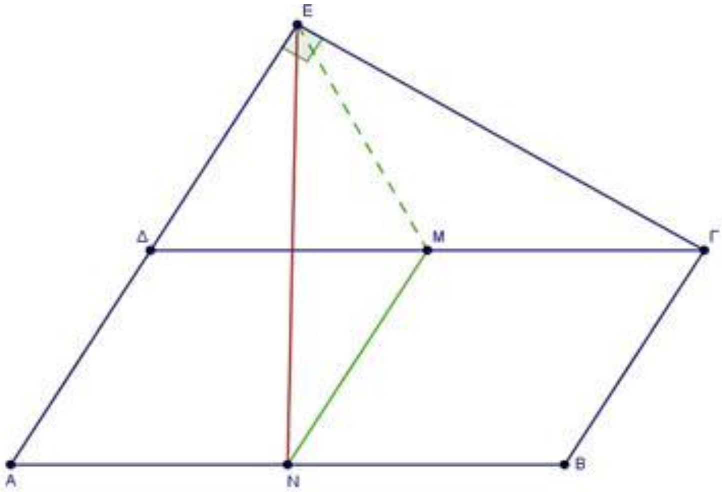
Δίνεται τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε τις διαμέσους ΒΜ και ΓΝ και στις προεκτάσεις τους παίρνουμε ευθύγραμμα τμήματα ΜΔ=ΒΜ και ΝΕ=ΓΝ. Να αποδείξετε ότι:

**Β1.** ΑΕ=ΒΓ **Μονάδες 10**

**Β2.** ΑΔ = ΒΓ **Μονάδες 10**

**Β3.** Το Α είναι μέσο του ΔΕ **Μονάδες 5**

## ΘΕΜΑ Γ (25 μονάδες)




Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\hat{B} > 90^\circ$ και ΑΒ = 2ΒΓ. Θεωρούμε το ύψος ΓΕ προς την πλευρά ΑΔ και τα μέσα Μ και Ν των πλευρών ΔΓ και ΑΒ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να αποδείξετε ότι :

**Γ1.** Το τετράπλευρο ΑΝΜΔ είναι ρόμβος. **Μονάδες 6**

**Γ2.** Το ΜΕΑΝ είναι ισοσκελές τραπέζιο. **Μονάδες 6**

**Γ3.** Η ΕΝ είναι διχοτόμος της γωνίας ΜΕΑ. **Μονάδες 7**

**Γ4.** $E\hat{N}B = 3 \cdot M\hat{E}N$ **Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Δ (25 μονάδες)**

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ (ΑΒ > ΑΔ) με $\hat{ΑΒΔ} = 30^\circ$ . Αν Π , Κ και Μ μέσα των ΟΔ , ΟΓ και ΑΒ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα τότε να αποδείξετε ότι:

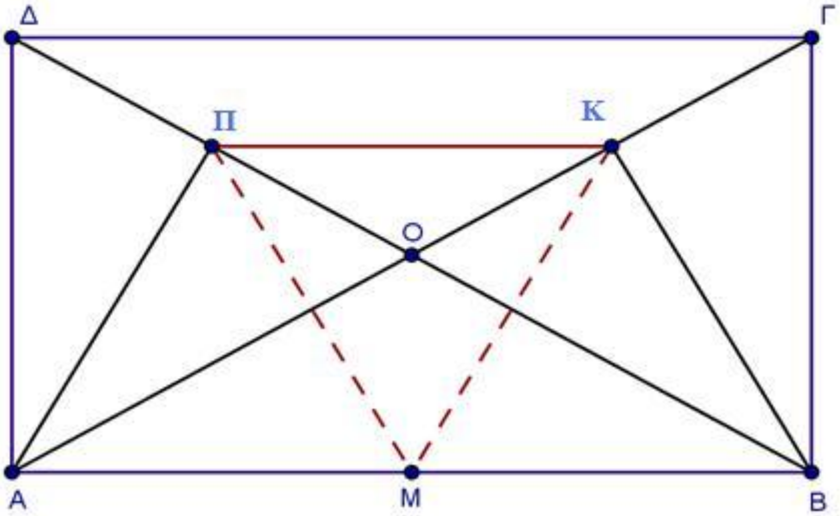
**Δ1.** Το τρίγωνο ΔΟΑ είναι ισόπλευρο. **Μονάδες 6**

**Δ2.** Το τρίγωνο ΑΠΒ είναι ορθογώνιο. **Μονάδες 4**

**Δ3.** Το ΑΠΚΜ είναι ρόμβος. **Μονάδες 6**

**Δ4.** **Αν** τα χωριά **Α**λικανάς, **Π**ηγαδάκια, **Κ**αταστάρι και **Β**ουγιάτο βρίσκονται στα σημεία Α, Π, Κ, Β αντίστοιχα, τότε ισαπέχουν από την **Μ**πόχαλη που βρίσκεται στο σημείο Μ. **Μονάδες 5**

**Δ5.** $\frac{ΑΜ}{2} < ΟΠ < ΑΜ$ **Μονάδες 4**




**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Γράψτε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων τα οποία θα παραδώσετε μαζί με το γραπτό στο τέλος της εξέτασης.
2. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό.
3. Τα σχήματα μπορούν να γίνουν **και** με μολύβι.
4. Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα.
5. Διάρκεια εξέτασης : Δυο ( 2 ) ώρες.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μισή ώρα από την έναρξη.

***Καλή επιτυχία και καλό καλοκαίρι!!***

**Ο Διευθυντής** **Οι εισηγητές**

**Μιχαλόπουλος Ν.**

**Χατζόπουλος Γ.**

# <u>Ενδεικτικές Λύσεις Προαγωγικών εξετάσεων Μαΐου – Ιουνίου</u>

<u>Επιμέλεια: Χατζόπουλος Μάκης</u>

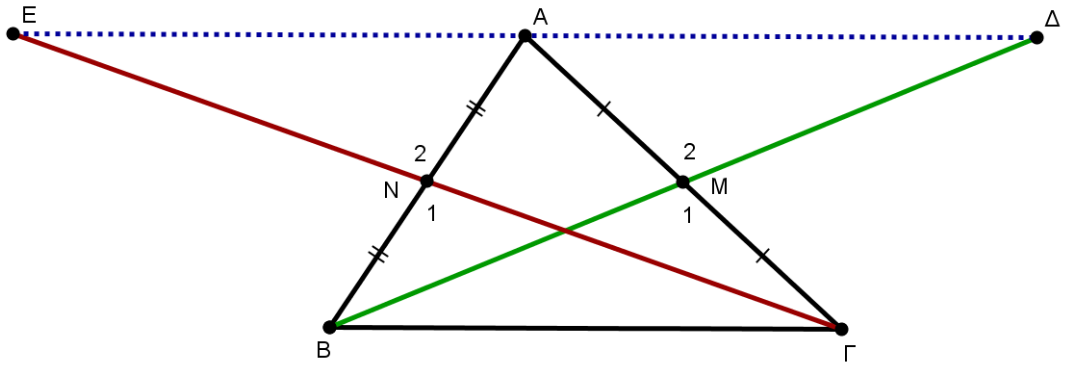
**<u>Θέμα Α</u>**

Α1. Δείτε απόδειξη στην σελίδα **62 Θεώρημα ΙΙ**

Α2. Δείτε σελίδα 63 (ορισμός **<u>ή</u>** σχήμα είναι **δεκτά**, πόσο μάλλον και τα **δύο**)

Α3. Λ , Λ , Λ , Λ (δηλαδή όλα λάθος)

**<u>Θέμα Β</u>**




**Β1.** Από σύγκριση τριγώνων ΑΕΝ και ΒΝΓ έχουμε:

- ΒΝ = ΝΑ (Ν μέσο ΑΒ) (Μονάδες 3)
- ΝΓ = ΝΕ (δεδομένο) (Μονάδες 3)
- $\hat{N}_1 = \hat{N}_2$ (ως κατακορυφήν) (Μονάδες 3)

άρα από το κριτήριο Π – Γ – Π παίρνουμε ΑΕ = ΒΓ (Μονάδες 1)

**<u>Β΄ τρόπος:</u>** *Το ΕΑΓΒ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιες διχοτομούνται, άρα οι απέναντι πλευρές είναι ίσες, δηλαδή ΕΑ = ΒΓ*

**Β2.** Όμοια από την ισότητα τρίγωνων ΑΜΔ και ΜΒΓ

**<u>Β τρόπος:</u>** Το ΑΔΓΒ είναι παραλληλόγραμμο με ανάλογο σκεπτικό

**Β3.** Από τις προηγούμενες σχέσεις παίρνουμε ΑΕ = ΑΔ (Μονάδες 3) , ***<u>προσοχή</u>*** δεν μας φτάνει για να συμπεράνουμε ότι το Α είναι μέσο του ΕΔ, πρέπει να αποδείξουμε ότι είναι και στην ίδια ευθεία *(δηλ. τα Δ, Α, Ε είναι συνευθειακά (Μονάδες 2))!*

**<u>Α΄ τρόπος:</u> Θα δείξουμε ότι η γωνία ΕΑΔ είναι $180^0$**

Έχουμε διαδοχικά, $E\hat{A}\Delta = E\hat{A}B + B\hat{A}\Gamma + \Gamma\hat{A}\Delta \overset{(*)}{=} \hat{B} + \hat{A} + \hat{\Gamma} = 180^0$

***:** *Από την ισότητα των παραπάνω τριγώνων έχουμε και τις γωνίες τους ίσες, δηλαδή* $E\hat{A}B = \hat{B}$ και $\Gamma\hat{A}\Delta = \hat{\Gamma}$

**<u>Β΄ τρόπος:</u>** Από τον *β΄ τρόπο* των ερωτημάτων Β1 και Β2 έχουμε, ΑΕ // ΒΓ (λόγω παραλληλογράμμου) και ΑΔ // ΒΓ, όμως από το 5ο αξίωμα παραλληλίας από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική παράλληλη προς αυτή, άρα τα Δ, Α, Ε είναι συνευθειακά.

Επομένως, το Α είναι μέσο του ΔΕ

**<u>Θέμα Γ</u>**

**Γ1.** Το ΑΝΜΔ είναι τετράπλευρο με δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες *(Μονάδες 4)* (τις ΑΝ και ΜΔ), άρα είναι παραλληλόγραμμο και επειδή ΑΔ = ΔΜ είναι ρόμβος (δύο διαδοχικές πλευρές ίσες) *(Μονάδες 2)*

**Γ2.** Θα δείξουμε ότι:

- ΜΝ // ΑΕ (δύο απέναντι πλευρές παράλληλες) (Μονάδες 2)
- ΜΕ = ΑΝ (οι μη παράλληλες πλευρές ίσες) (Μονάδες 2)
- $ME \not\parallel AN$ (και οι άλλες πλευρές δεν είναι παράλληλες) (Μονάδες 2)

Έχουμε,

- ✓ ΜΝ // ΑΔ (από τον ρόμβο) άρα ΜΝ // ΑΕ
- ✓ Στο **ορθογώνιο τρίγωνο ΕΔΓ** η ΕΜ είναι διάμεσος ορθογωνίου, άρα παίρνουμε από γνωστή πρόταση : ΜΕ = ΔΓ/2 δηλαδή **ΜΕ** = ΔΜ = **ΑΝ** *(όμοια από τον ρόμβο ΑΝΜΔ)*
- Η ΕΜ τέμνει την ΔΓ (στο Μ), όμως η ΔΓ είναι παράλληλη της ΑΒ άρα και της ΑΝ, άρα η ΕΜ τέμνει και την ΑΝ, δηλαδή $ME \not\parallel AN$

**Γ3. Θα δείξουμε ότι:** $A\hat{E}N = N\hat{E}M$

Αρχικά το τρίγωνο ΜΕΝ είναι ισοσκελές αφού ΕΜ = ΜΝ (=ΔΜ =ΑΔ από ρόμβο και διάμεσο ορθογωνίου)

άρα $E\hat{N}M = N\hat{E}M$ (1) *(Μονάδες 4)*

Επίσης $A\hat{E}N = E\hat{N}M$ (2) από εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΕ, ΜΝ με τεμνόμενη την ΕΝ, άρα από (1) και (2) παίρνουμε το ζητούμενο *(Μονάδες 3)*

**Γ4. Θα δείξουμε ότι:** $E\hat{N}B = 3 \cdot M\hat{E}N$

Παίρνουμε το Α΄ μέλος και έχουμε διαδοχικά,

$E\hat{N}B = E\hat{N}M + M\hat{N}B = M\hat{E}N + \hat{A}$ (από τις παράλληλες ΝΜ και ΑΔ και το ισοσκελές τρίγωνο ΜΕΝ) (Μονάδες 2)

$= M\hat{E}N + A\hat{E}M$ (από το ισοσκελές τραπέζιο) *(Μονάδες 2)*

$= M\hat{E}N + 2M\hat{E}N = 3M\hat{E}N$ (από την ΕΝ διχοτόμος της γωνίας $A\hat{E}M$) *(Μονάδες 2)*

**<u>Θέμα Δ</u>**

**Δ1.** Το τρίγωνο ΔΟΑ είναι ισοσκελές (αφού οι διαγώνιες είναι ίσες και διχοτομούνται) και η γωνία ΑΔΒ είναι $60^0$, άρα είναι το τρίγωνο ΔΟΑ είναι ισόπλευρο.

**Δ2.** Αφού ΑΠ είναι διάμεσος (το Π είναι μέσο της ΔΟ από τα δεδομένα) και ισόπλευρο (δηλαδή ισοσκελές από όλες τις κορυφές) θα είναι και ύψος, δηλαδή η ΑΠ είναι κάθετη στην ΒΔ.

**Δ3.** Το ΠΚ ενώνει τα μέσα των ΟΔ και ΟΓ άρα είναι παράλληλο στην ΔΓ (άρα και στην ΑΒ) και ίση με το μισό της, δηλαδή, $\Pi K // = \frac{\Delta\Gamma}{2} = \frac{AB}{2} = AM \Rightarrow \Pi K // = AM$ άρα είναι παραλληλόγραμμο αφού δύο απέναντι πλευρές είναι ίσες και παράλληλες *(Μονάδες 3)*.

Επίσης, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΠΑΒ η γωνία $A\hat{B}\Delta = 30^0$ άρα από γνωστή πρόταση παίρνουμε ΑΠ = ΑΒ/2 δηλαδή ΑΠ = ΑΜ, άρα δύο διαδοχικές πλευρές ίσες, άρα το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο *(Μονάδες 3).*

**Δ4.** Αρκεί να αποδείξουμε ότι, ΑΜ = ΠΜ = ΚΜ = ΒΜ, δηλαδή με λίγα λόγια τα Α, Π, Κ, Β είναι ομοκυκλικά (στον ίδιο κύκλο). (Μονάδες 2)

- Το ΠΑ = **ΑΜ = ΠΜ** από τον ρόμβο ΑΠΚΜ και το ισόπλευρο τρίγωνο ΠΑΜ *(Μον 2)*
- Το ΚΒ = **ΒΜ = ΚΜ** από τον ρόμβο ΠΚΒΜ (για τον ίδιο λόγο) και το ισόπλευρο τρίγωνο ΜΚΒ *(Μον 2)*
- Επίσης ΠΑ = ΠΚ = ΚΒ, από τους ρόμβους, άρα τα πρώτα μέλη είναι ίσα, άρα και τα δεύτερα και έπεται το ζητούμενο *(Μονάδες 1)*

**Δ5.** Θα δείξουμε ότι:

- **ΟΠ < ΑΜ και** (Μονάδες 2)
- **ΑΜ / 2 < ΟΠ** (Μονάδες 2)

Έχουμε,

- Θέλουμε να αποδείξουμε ότι ***ΟΠ < ΑΜ,*** αρκεί να αποδείξουμε ότι ΟΠ < ΠΚ που αυτό είναι προφανές από το τρίγωνο ΠΟΚ, με την γωνία ΠΟΚ να είναι αμβλεία ($120^0$) άρα και η απέναντι πλευρά να είναι η μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου
- Εφαρμόζουμε την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο ΑΟΒ και έχουμε,

  ΑΒ < ΑΟ + ΟΒ (Μονάδα 1)

  $$\Leftrightarrow AB < 2OB \Leftrightarrow \frac{AB}{2} < OB$$

  $$\Leftrightarrow AM < OB \Leftrightarrow AM < O\Delta \Leftrightarrow AM < 2O\Pi \Leftrightarrow \frac{AM}{2} < O\Pi \text{ (Μονάδα 1)}$$