ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέμα 1°

Α. Να αποδείξετε ότι κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της.

Μονάδες 10

Β. Πότε ένα κυρτό τετράπλευρο ονομάζεται τραπέζιο;

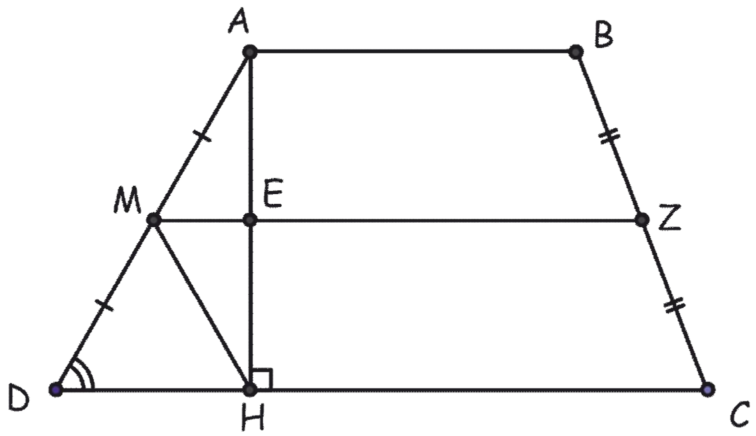
Μονάδες 5

Γ. Να γράψετε στην κόλλα των εξετάσεων τον αριθμό κάθε παρακάτω πρότασης και δίπλα τη λέξη ***ΣΩΣΤΟ*** αν η πρόταση είναι σωστή ή ***ΛΑΘΟΣ*** αν η πρόταση είναι λανθασμένη

1. Το σημείο τομής των διαμέσων ενός τριγώνου ονομάζεται βαρύκεντρο
2. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές τους ίσες μια προς μία και μια γωνία τους ίση τότε είναι πάντοτε ίσα
3. Αν η διάκεντρος δύο κύκλων ισούται με το άθροισμα των ακτινών τους τότε οι κύκλοι τέμνονται.
4. Σε κάθε παραλληλόγραμμο οι διαγώνιές του διχοτομούν τις γωνίες του
5. Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του.

Μονάδες 10

Θέμα 2°



Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ABCD είναι τραπέζιο με βάσεις AB και CD , όπου $(AB)=10,(CD)=20,(AD)=12,\hat{D}=60^0$

Αν AH ύψος του τραπεζίου ABCD τότε να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων

i) DH

Μονάδες 8

ii) HM , όπου M το μέσο της AD

Μονάδες 8

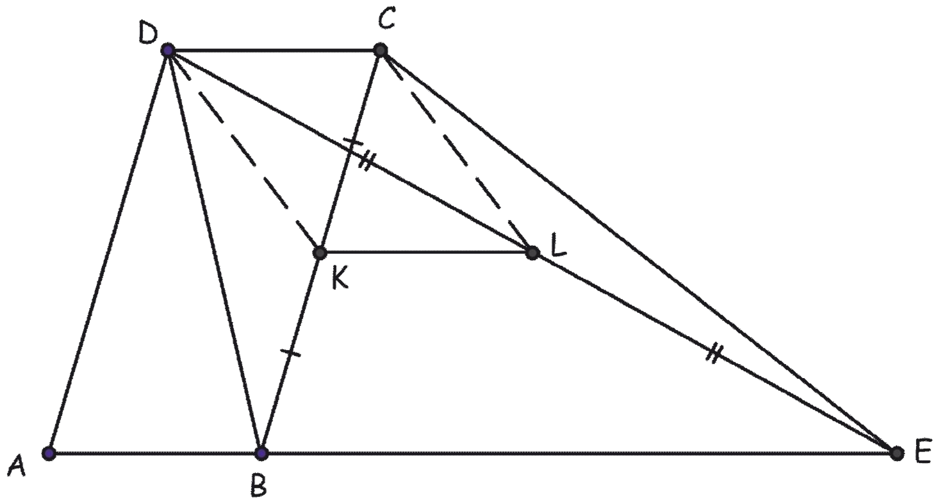
iii) EZ , όπου Z το μέσο της BC και E το σημείο τομής της MZ με την AH

Μονάδες 9

Να δικαιολογήσετε όλες τις απαντήσεις σας

Θέμα 3°

Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ABCD είναι παραλληλόγραμμο. Στην προέκταση της AB προς το B θεωρούμε σημείο E ώστε: $(BE)=3(AB)$. Αν K,L είναι τα μέσα των BC,DE αντίστοιχα, να δειχθεί ότι:

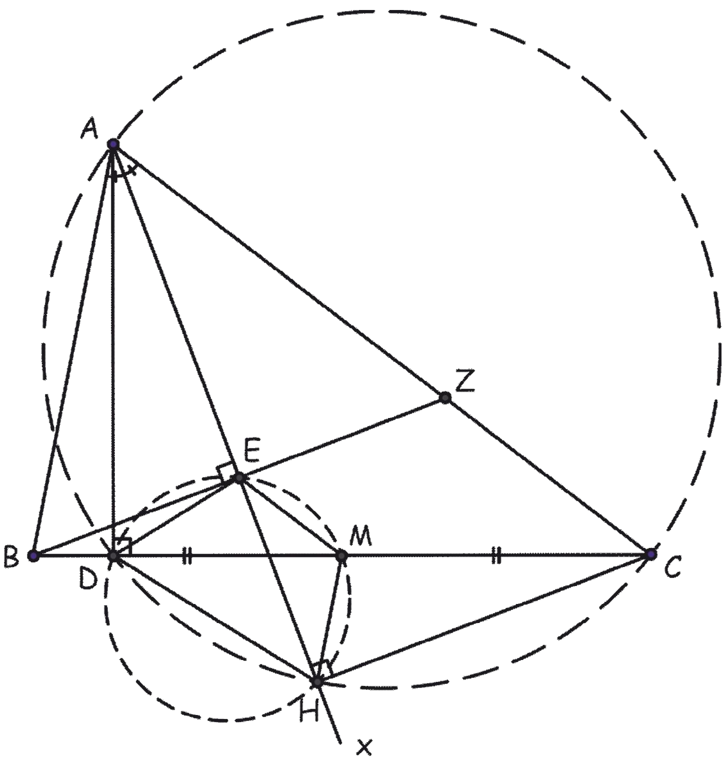


i) Το τετράπλευρο DBEC είναι τραπέζιο ***Μονάδες 6***

ii) Ισχύει: $(KL)=(AB)$ ***Μονάδες 9***

iii) Το τετράπλευρο KLCD είναι παραλληλόγραμμο ***Μονάδες 10***

Θέμα 4°



Δίνεται τρίγωνο $\triangle ABC$ με $AB<AC$ και ας είναι AD το ύψος του. Η από την κορυφή B κάθετε ευθεία προς την διχοτόμο Ax της γωνίας $\hat{A}$, τέμνει την Ax στο σημείο E και την AC στο σημείο Z. Αν M είναι το μέσο της BC και H η ορθή προβολή της κορυφής C στην Ax όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα να δείξετε ότι:

i) Το τρίγωνο $\triangle ABZ$ είναι ισοσκελές

Μονάδες 5

ii) Ισχύει: $EM \parallel AC$

Μονάδες 5

iii) Το τετράπλευρο ADHC είναι εγγράψιμο σε κύκλο

Μονάδες 7

iv) Τα σημεία D,E,M,H είναι επίσης ομοκυκλικά

Μονάδες 8

Παρατηρήσεις:

i) Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα

ii) Κάθε μέθοδος επιστημονικά τεκμηριωμένη γίνεται αποδεκτή

Αιδηψός Πέμπτη, 23 Μαΐου 2013

Η Διευθύντρια Ο Εισηγητής

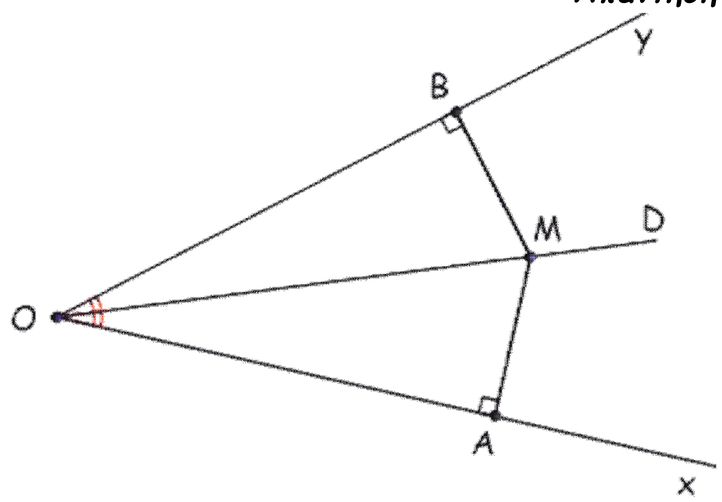
Ενδεικτικές Λύσεις

Θέμα 1°

Α. Να αποδείξετε ότι κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της.

Μονάδες 10

Απάντηση



Έστω γωνία $x\hat{O}y$ *και* OD *η διχοτόμος της. Έστω* M *τυχόν σημείο της* OD *και ας είναι* MA, MB *οι αποστάσεις του* M *από τις πλευρές της* Ox, Oy *αντίστοιχα. Τότε τα ορθογώνια τρίγωνα* OAM, OBM *έχουν κοινή την υποτείνουσα* OM *και* $A\hat{O}M = B\hat{O}M = \frac{x\hat{O}y}{2}$ *, οπότε είναι ίσα άρα θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα βασικά τους στοιχεί ίσα, δηλαδή θα είναι* $MA = MB$

Β. Πότε ένα κυρτό τετράπλευρο ονομάζεται τραπέζιο;

Μονάδες 5

Απάντηση

*Ένα κυρτό τετράπλευρο ονομάζεται τραπέζιο αν και μόνον αν έχει δύο **μόνο** πλευρές παράλληλες*

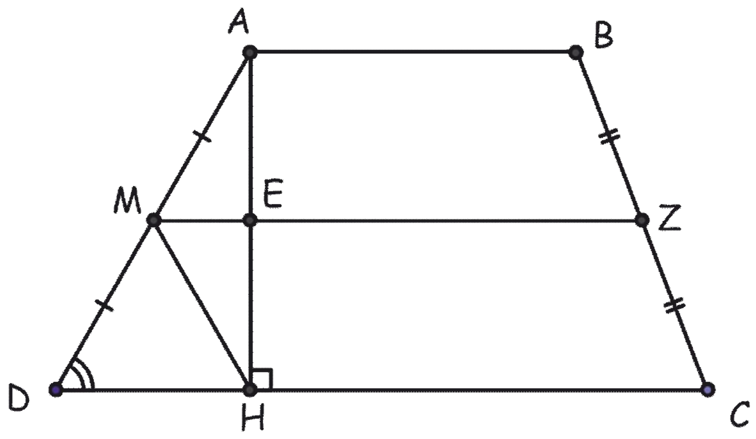
Γ. Να γράψετε στην κόλλα των εξετάσεων τον αριθμό κάθε παρακάτω πρότασης και δίπλα τη λέξη **ΣΩΣΤΟ** αν η πρόταση είναι σωστή ή **ΛΑΘΟΣ** αν η πρόταση είναι λανθασμένη

Απάντηση

6. Το σημείο τομής των διαμέσων ενός τριγώνου ονομάζεται βαρύκεντρο **(ΣΩΣΤΟ)**
7. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές τους ίσες μια προς μία και μια γωνία τους ίση τότε είναι πάντοτε ίσα **(ΛΑΘΟΣ)**
8. Αν η διάκεντρος δύο κύκλων ισούται με το άθροισμα των ακτινών τους τότε οι κύκλοι τέμνονται. **(ΛΑΘΟΣ)**
9. Σε κάθε παραλληλόγραμμο οι διαγώνιές του διχοτομούν τις γωνίες του **(ΛΑΘΟΣ)**
10. Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του. **(ΣΩΣΤΟ)**

Μονάδες 10

Θέμα 2^o



Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο $ABCD$ είναι τραπέζιο με βάσεις AB και CD , όπου $(AB)=10,(CD)=20,(AD)=12,\hat{D}=60^0$
Αν AH ύψος του τραπεζίου $ABCD$ τότε να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων

iv) DH

Απάντηση

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\triangle}{AHD}$ *με* $A\hat{H}D=90^0$ *και*

$$A\hat{D}H=60^0 \Rightarrow D\hat{A}H=30^0 \Rightarrow (DH)=\frac{(AD)}{2}=\frac{12}{2}\Rightarrow \boxed{(DH)=6}$$

v) HM *, όπου* M *το μέσο της* AD

Μονάδες 8

Απάντηση

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\triangle}{AHD}$ *με* $A\hat{H}D=90^0$ *και* HM *διάμεσο προς την υποτείνουσα θα ισχύει:* $(HM)=\frac{(AD)}{2}=\frac{12}{2}\Rightarrow \boxed{(HM)=6}$

Μονάδες 8

vi) EZ *, όπου* Z *το μέσο της* BC *και* E *το σημείο τομής της* MZ *με την* AH

Απάντηση

Στο τραπέζιο $ABCD$ *, η* MZ *είναι διάμεσος (συνδέει τα μέσα των μη παραλλήλων πλευρών του) και συνεπώς είναι:* $(MZ)=\frac{(AB)+(DC)}{2}\Rightarrow (MZ)=\frac{10+20}{2}\Rightarrow \boxed{(MZ)=15}$

και προφανώς $MZ \parallel DC \Rightarrow \boxed{MZ \parallel DH}$.

Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{ADH}$ *με* M *το μέσο της* AD *και* $ME \parallel DH \Rightarrow E$ *το μέσο της* AH *και*

$(ME)=\frac{(DH)}{2}=\frac{6}{2}\Rightarrow \boxed{(ME)=3}$

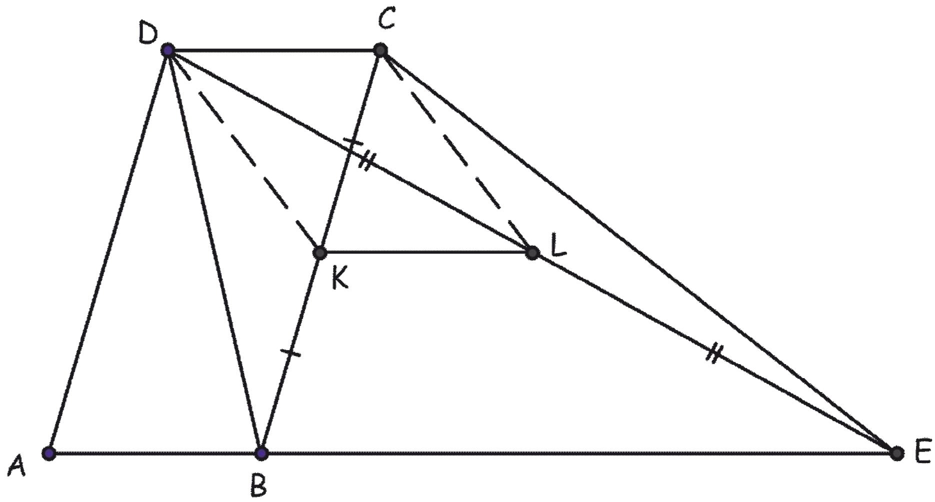
Τελικά : $(EZ)=(MZ)-(ME)=15-3\Rightarrow \boxed{(EZ)=12}$

Μονάδες 9

Θέμα 3°

Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ABCD είναι παραλληλόγραμμο. Στην προέκταση της AB προς το B θεωρούμε σημείο E ώστε: $(BE)=3(AB)$.

Αν K,L είναι τα μέσα των BC,DE αντίστοιχα, να δειχθεί ότι:



iv) Το τετράπλευρο DBEC είναι τραπέζιο

Μονάδες 6

v) Ισχύει: $(KL)=(AB)$

Μονάδες 9

vi) Το τετράπλευρο KLCD είναι παραλληλόγραμμο

Μονάδες 10

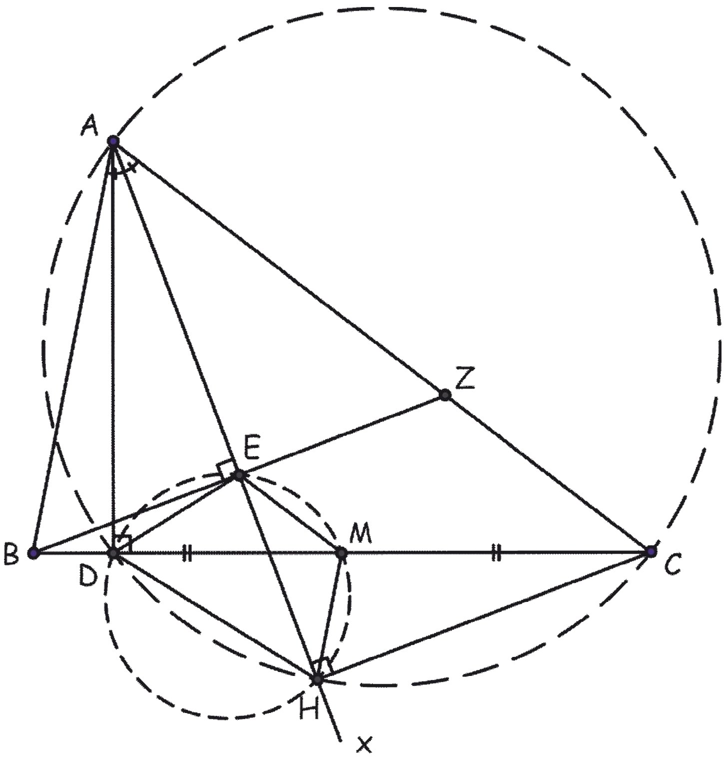
Απάντηση

i) *Με* ABCD *παραλληλόγραμμο προκύπτει ότι:* $DC \parallel AB \Rightarrow DC \parallel BE$ *και με* $(BE)=3(AB) \overset{(AB)=(DC)}{\Rightarrow} (BE)=3(DC) \Rightarrow (BE) \neq (DC)$ *άρα* DBEC *είναι τραπέζιο (μόνο δύο πλευρές παράλληλες)*

ii) *Στο τραπέζιο* DBEC *το ευθύγραμμο τμήμα* KL *συνδέει τα μέσα των διαγωνίων του και συνεπώς ισχύει:* $(KL)=\dfrac{|(BE)-(DC)|}{2}=\dfrac{|3(AB)-(AB)|}{2}=\dfrac{2(AB)}{2}=(AB)$ *και* $KL \parallel DC$.

iii) *Με* $KL \parallel DC$ *και* $(KL)=(AB) \overset{ABCD\ \text{παραλληλόγραμμο}}{=} (DC) \Rightarrow KLCD$ παραλληλόγραμμο (έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες)

Θέμα 4°



Δίνεται τρίγωνο $\triangle ABC$ με $AB < AC$ και ας είναι AD το ύψος του. Η από την κορυφή B κάθετε ευθεία προς την διχοτόμο Ax της γωνίας $\hat{A}$, τέμνει την Ax στο σημείο E και την AC στο σημείο Z. Αν M είναι το μέσο της BC και H η ορθή προβολή της κορυφής C στην Ax όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα να δείξετε ότι:

v) Το τρίγωνο $\triangle ABZ$ είναι ισοσκελές

Μονάδες 5

vi) Ισχύει: $EM \parallel AC$

Μονάδες 5

vii) Το τετράπλευρο $ADHC$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο

Μονάδες 7

viii) Τα σημεία D,E,M,H είναι επίσης ομοκυκλικά

Μονάδες 8

Απάντηση

i) *Στο τρίγωνο* $\overset{\triangle}{ABZ}$ *η* AE *είναι ύψος και διχοτόμος (από κατασκευής) και επομένως θα είναι ισοσκελές*

ii) *Επειδή το τρίγωνο* $\overset{\triangle}{ABZ}$ *είναι ισοσκελές, η* AE *θα είναι και διάμεσός του, δηλαδή το* E *είναι το μέσο της* BZ *. Έτσι στο τρίγωνο* $\triangle BZC$ *το τμήμα* EM *συνδέει τα μέσα των δύο πλευρών του* BZ,BC *αντίστοιχα, άρα θα είναι* $EM \parallel ZC \Rightarrow \boxed{EM \parallel AC}$

iii) *Με* $A\hat{D}C = A\hat{H}C = 90^0$ *προκύπτει ότι το τετράπλευρο* $ADHC$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο. (Η πλευρά του AC «φαίνεται» από τις κορυφές του D,H υπό ίσες (ορθές) γωνίες

iv) *Από το εγγράψιμο τετράπλευρο* $ADHC$ θα είναι : $\boxed{A\hat{H}D = A\hat{C}D} :(1)$. Από $EM \parallel AC \Rightarrow \boxed{E\hat{M}D = A\hat{C}D} :(2)$ (εντός εκτός και επί τα αυτά…). Από $(1),(2) \Rightarrow A\hat{H}D = E\hat{M}D$ ή $E\hat{H}D = E\hat{M}D$ και συνεπώς το τετράπλευρο $DEMH$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο (η πλευρά του DE «φαίνεται» από τις κορυφές του M,H υπό ίσες γωνίες).

ΚΑΛΟ ΚΑΛΟΚΑΙΡΙ