

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2011

ΘΕΜΑ Α

(Μονάδες 6 + 7 + 12 = 25)

A1. Αν τρεις αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να αποδείξετε ότι

$$\text{ισχύει } \beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}.$$

A2. Έστω $0 < \alpha \neq 1$ και $\theta > 0$. Τι ονομάζουμε λογάριθμο του θ ως προς βάση α ;

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με τη λέξη Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ)

α) Η συνάρτηση $f(x) = \epsilon\phi x$ είναι περιοδική με περίοδο π .

β) Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - \rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του $P(x)$.

γ) Ο νιοστός όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι

$$\alpha_n = \alpha_1 + n(\omega - 1).$$

δ) Το άθροισμα των πρώτων n όρων μιας αριθμητικής προόδου (α_n) είναι

$$S_n = \frac{n}{2}(\alpha_1 + \alpha_n).$$

ε) Η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$ με $0 < \alpha < 1$ είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

στ) Αν $\theta_1, \theta_2 > 0$ και $0 < \alpha \neq 1$ τότε $\log_\alpha(\theta_1 + \theta_2) = \log_\alpha \theta_1 \cdot \log_\alpha \theta_2$.

ΘΕΜΑ Β

(Μονάδες 9 + 7 + 9 = 25)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \eta \mu \omega x$ όπου α, ω θετικοί αριθμοί. Η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι 4 και η περίοδος $T = \pi$.

B1. Να βρείτε τις τιμές των α, ω και να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία στο διάστημα $[0, \pi]$.

B2. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση παίρνει την τιμή $2\sqrt{3}$.

B3. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 4 - 4\sigma\upsilon\nu^2 2x$.

ΘΕΜΑ Γ

(Μονάδες 7 + 8 + 10 = 25)

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + x - 2$ με $P(\sqrt{2}) = 3\sqrt{2} - 10$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -4$.

Γ2. Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x - 2)$.

Γ3. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < -8$.

ΘΕΜΑ Δ**(Μονάδες 4 + 9 + 5 + 7 = 25)**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{\ln(\alpha - x)}$. Αν γνωρίζετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται

από το σημείο $K(2,1)$:

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 4$.

Δ2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

Δ3. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $g(x) = \left(e^{f(x)-1}\right)^{\ln(4-x)}$ με $0 < x < 3$.

α) Να αποδείξετε ότι $g(x) = \frac{x}{4-x}$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $g(\ln^2 x) = \frac{1}{3}$.

Κ Α Λ Η Ε Π Ι Τ Υ Χ Ι Α