1^o ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΚΟΜΟΤΗΝΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: Άλγεβρα Β΄ Λυκείου
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 31/05/2012

<u>ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2012</u>

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν $\alpha>0$ με $\alpha\neq 1$, τότε για οποιουσδήποτε $\theta_1,\theta_2>0$ να αποδείξετε ότι ισχύει: $\log_a(\theta_1\cdot\theta_2)=\log_a\theta_1+\log_a\theta_2$.

(Μονάδες 10)

Α2. Πότε μία ακολουθία λέγεται αριθμητική πρόοδος;

(Μονάδες 5)

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με τη λέξη Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α) Η εξίσωση εφx=εφθ έχει λύσεις τις: x = κπ + θ, $\kappa\in\mathbb{Z}$.

β) Ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το γινόμενο των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.

γ) Ένα πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το x – ρ αν και μόνο αν P(ρ) = 0.

δ) Το άθροισμα των πρώτων ν όρων αριθμητικής προόδου είναι $S_\nu=\frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1+(\nu+1)\omega\right]$.

ε) Ισχύει η ισοδυναμία: $\ln\theta=x\Leftrightarrow 10^x=\theta$.

(Μονάδες 5 x 2 = 10)

ΘΕΜΑ Α – Απαντήσεις

Α1. Θεωρία σελ. 136

Α2. Θεωρία σελ. 94

Α3. α) Σ β) Λ γ) Σ δ) Λ ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=4\sigma\upsilon\nu 3x$, $x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να βρείτε την μέγιστη τιμή, την ελάχιστη τιμή και την περίοδο της f .

(Μονάδες 9)

Β2. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=-2$.

(Μονάδες 8)

Β3. Να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{\pi}{6}\right)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)>2$

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Β – Απαντήσεις

Β1. Από την θεωρία γνωρίζουμε ότι για την g(x) = ρσυνωx με ρ, ω > 0 ισχύουν $g_{\min}=-\rho$,

$g_{\max}=\rho$ και $\mathrm{T}=\dfrac{2\pi}{\omega}$. Αρα: $f_{\min}=-4$, $f_{\max}=4$ και $\mathrm{T}=\dfrac{2\pi}{3}$.

Β2. $f(x)=-2 \Leftrightarrow 4\sigma\upsilon\nu 3x=-2 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 3x=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 3x=\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\dfrac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x=2\kappa\pi\pm\dfrac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x=\dfrac{2\kappa\pi}{3}\pm\dfrac{2\pi}{9}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$.

Β3. $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)-f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=4\sigma\upsilon\nu 3\dfrac{\pi}{6}-4\sigma\upsilon\nu 3\dfrac{\pi}{3}=4\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{2}-4\sigma\upsilon\nu\pi=4\cdot 0-4\cdot(-1)=4>2$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2-\beta x+6$, $a,\beta\in\mathbb{R}$.

Γ1. Αν γνωρίζετε ότι το P(x) έχει παράγοντα το x – 2 και ότι η διαίρεση P(x) : (x – 1) δίνει υπόλοιπο υ = 4, να βρείτε τις τιμές των α και β.

(Μονάδες 10)

Γ2. Για α = – 4 και β = – 1:

α) Να λύσετε την εξίσωση P(x) = 0.

(Μονάδες 8)

β) Αν γνωρίζετε ότι ο πρώτος όρος μιας αριθμητικής προόδου ισούται με την μικρότερη ρίζα της εξίσωσης P(x) = 0 και η διαφορά ω με τη μεγαλύτερη ρίζα, να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 55 όρων της αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ – Απαντήσεις

Γ1. το P(x) έχει παράγοντα το x – 2 $\Leftrightarrow P(2)=0 \Leftrightarrow 8+4\alpha-2\beta+6=0 \Leftrightarrow 4\alpha-2\beta=-14$

η διαίρεση P(x) : (x – 1) δίνει υπόλοιπο υ = 4 $\Leftrightarrow P(1)=4 \Leftrightarrow 1-\alpha-\beta+6=4 \Leftrightarrow a-\beta=-3$

Λύνοντας το σύστημα των παραπάνω εξισώσεων βρίσκουμε α = – 4 και β = – 1.

Γ2. α) $P(x)=0 \Leftrightarrow x^3-4x^2+x+6=0$.

Κάνω σχήμα Horner με το 2:

1	- 4	1	6	
	2	- 4	-6	2
1	- 2	- 3	0	

Άρα: $(x-2)(x^2-2x-3)=0 \Leftrightarrow x=0$ η $\Delta=(-2)^2-4\cdot(-3)=16$ $x_{1,2}=\frac{2\pm 4}{2}=\begin{cases}3\\-1\end{cases}$

β) $a_1=-1$ και ω = 3, άρα: $S_\nu=\frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1+(\nu-1)\omega\right]\Rightarrow S_{55}=\frac{55}{2}\left[2\cdot(-1)+(55-1)\cdot 3\right]=4400$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\ln\theta+2\right)^x$, $x\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να βρείτε τις τιμές του θ για τις οποίες ορίζεται η συνάρτηση.

(Μονάδες 5)

Δ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\mu\in\mathbb{R}$ και θ > e ισχύει: $e^{\ln f(\mu+1)-\ln f(\mu)}>3$.

(Μονάδες 7)

Δ3. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το Α(2, 16) να βρείτε το θ.

(Μονάδες 5)

Δ4. Για $\theta=e^2$ να λύσετε την ανίσωση: $6f(x)-8>16^x$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Δ – Απαντήσεις

Δ1. Πρέπει: θ > 0 και $\ln\theta+2>0\Leftrightarrow\ln\theta>-2\Leftrightarrow\ln\theta>\ln e^{-2}\overset{\ln\nearrow}{\Leftrightarrow}\theta>e^{-2}=\frac{1}{e^2}$

Άρα: θ > $\frac{1}{e^2}$.

Δ2. $e^{\ln f(\mu+1)-\ln f(\mu)}=e^{\ln\frac{f(\mu+1)}{f(\mu)}}=\frac{f(\mu+1)}{f(\mu)}=\frac{\left(\ln\theta+2\right)^{\mu+1}}{\left(\ln\theta+2\right)^{\mu}}=\ln\theta+2\ (1)$

$\theta>e\overset{\ln\nearrow}{\Leftrightarrow}\ln\theta>\ln e\Leftrightarrow\ln\theta>1\Leftrightarrow\ln\theta+2>3\overset{(1)}{\Leftrightarrow}e^{\ln f(\mu+1)-\ln f(\mu)}>3$.

Δ3. η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το Α(2, 16) άρα:

$f(2)=16\Leftrightarrow\left(\ln\theta+2\right)^2=16\overset{\ln\theta+2>0}{\Leftrightarrow}\ln\theta+2=4\Leftrightarrow\ln\theta=2\Leftrightarrow\theta=e^2$.

Δ4. Για $\theta=e^2$, $f(x)=\left(\ln e^2+2\right)^x=4^x$

$6f(x)-8>16^x\Leftrightarrow 6\cdot 4^x-8>16^x\Leftrightarrow\left(4^x\right)^2-6\cdot 4^x+8<0\overset{\theta\varepsilon\tau\omega\ 4^x=\omega}{\Leftrightarrow}\omega^2-6\omega+8<0$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι ω = 2 ή ω = 4.
Άρα από τον διπλανό πίνακα συμπεραίνουμε:

ω	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$\omega^2-6\omega+8$		+	|	-	|	+	

$2<\omega<4\Leftrightarrow 2<4^x<4\Leftrightarrow 4^{\frac{1}{2}}<4^x<4\overset{4^x\nearrow}{\Leftrightarrow}\frac{1}{2}<x<1$