ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

ΘΕΜΑ 1°

Α. Αν $\alpha>0$ με $\alpha\neq1$, και $\theta_1,\theta_2>0$, να δείξετε ότι:

$$\boxed{\log_\alpha(\theta_1\cdot\theta_2)=\log_\alpha\theta_1+\log_\alpha\theta_2}$$

Μονάδες 15

Β. Να χαρακτηρίσετε ως (Σ) Σωστή ή (Λ) Λάθος κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:

1. Ισχύει ότι: $10^{\log 5}=5\log 10$

2. Το άθροισμα των ν πρώτων διαδοχικών όρων μιας αριθμητικής προόδου (α_ν) με διαφορά ω είναι ίσο με: $S_\nu=2\alpha_1+(\nu+1)\omega$.

3. Για κάθε γωνία α ισχύει ότι: $\eta\mu^2\alpha=\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu2\alpha}{2}$

4. Κάθε σταθερό και μη μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό ένα.

5. Ισχύει ότι: $\eta\mu(\alpha+\alpha)=2\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\eta\mu\alpha$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 2°

Αν

$$A(x)=(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^2-\eta\mu2x \quad \text{και} \quad B(x)=\sigma\upsilon\nu^4x-\eta\mu^4x$$

α) Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του x ισχύει:

$$A(x)=1 \quad \text{και} \quad B(x)=\sigma\upsilon\nu2x$$

Μονάδες 12

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει ότι:

$$\sqrt{2}B(x)-A(x)=0$$

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 3°

Δίνονται τα πολυώνυμα:

$$P(x)=x^3+ax^2+62x+40 \quad \text{και} \quad Q(x)=x+1 \quad \text{με } a\in R.$$

α) Να βρείτε για ποια τιμή του **α** το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $Q(x)$.

Μονάδες 8

β) Για $a=23$:

i) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 10

ii) Να βρείτε για ποια τιμή του πραγματικού αριθμού β οι αριθμοί

$$P(-1),\quad \beta-28,\quad P(Q(9))$$

αποτελούν, με η σειρά που δίνονται, διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4°

Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x)=3^{\log x}$ και $g(x)=x^{\log 3}$ με $x>0$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε $x,y>0$ ισχύει:

i) $f(x)=g(x)$ και

ii) $f(xy)=f(x)\cdot f(y)$

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$9^{\log x}-8\cdot x^{\log 3}-9=0$$