ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Β ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1 Έστω $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δύο σημεία του καρτεσιανού επιπέδου και έστω (x, y) οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ΑΒ. Να αποδείξετε ότι

$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ και $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$. (να κάνετε και σχήμα) Μον. 10

Α2 Έστω Ε και Ε΄ δύο σταθερά σημεία του επιπέδου. Να γράψετε τι ονομάζεται έλλειψη με εστίες τα Ε και Ε΄ Μον.5

Α3 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο γραπτό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση. Μον. 10

α. Η παραβολή $x^2 = 2py$ έχει άξονα συμμετρίας τον χ΄χ.

β. Στην παραβολή $y^2=2px$ το $|p|$ παριστάνει την απόσταση της εστίας της Ε από τη διευθετούσα της.

γ. Οι ελλείψεις που έχουν τον ίδιο λόγο $\frac{\beta}{\alpha}$ ονομάζονται όμοιες.

δ. Η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης $\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$ στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ είναι $\beta^2 x_1 x + \alpha^2 y_1 y = \alpha^2\beta^2$

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-1, -1)$ και $\vec{\beta} = (-3, -1)$

Β1 Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και $(2\vec{\alpha} + \vec{\beta})(\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ Μον. 8

Β2 Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ ώστε τα διανύσματα $\left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right)$ και $\left(\vec{\alpha} - \kappa\vec{\beta}\right)$ να είναι κάθετα Μον. 8

Β3. Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με τον άξονα $x'x$ Μον. 9

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): \lambda x + (\lambda - 1)y = 2\lambda$ και $(\varepsilon_2): (\lambda + 1)x + \lambda y = 2\lambda + 1$, όπου $\lambda \in R$

Γ1 Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω ευθείες τέμνονται για κάθε $\lambda \in R$ και να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του σημείου τομής τους, Μ

Μον. 10

Γ2 Έστω (ζ) η ευθεία που προκύπτει από την (ε_1) για $\lambda = 2$. Να βρείτε το σημείο Α της (ζ) το οποίο απέχει την ελάχιστη απόσταση από το σημείο Ο(0,0) Μον. 9

Γ3 Έστω το σημείο $A\left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right)$ και έστω $M(\lambda + 1, -\lambda)$ το κοινό σημείο των ευθειών (ε_1) και (ε_2). Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in R$ ώστε το Εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΜ να ισούται με δύο τετραγωνικές μονάδες. (όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων) Μον. 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται ο κύκλος $(C): x^2 + y^2 + 6|\vec{\alpha}|x - 4|\vec{\beta}|y + 12\vec{\alpha}\vec{\beta} = 0$, όπου $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ μη συγγραμμικά διανύσματα και Ο(0,0) η αρχή των αξόνων

Δίνεται επιπλέον ότι η εφαπτομένη του παραπάνω κύκλου στο σημείο του $M\left(-6|\vec{\alpha}|, |\vec{\beta}|\right)$ έχει κλίση ίση με $-\frac{3}{2}$ και ότι το κέντρο του ανήκει στην ευθεία $x + y - 1 = 0$

Δ1 Δείξτε ότι $|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}| = 2$ και ότι $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$ Μον. 14

Δ2 Δείξτε ότι ο παραπάνω κύκλος έχει τη μορφή

(C_1): $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 13$ Μον. 3

Δ3 Αν Λ είναι σημείο του (C_1) τέτοιο ώστε (ΛΜ)=$2\sqrt{13}$ τότε να υπολογίσετε το μέτρο: $|\overrightarrow{O\Lambda} + \overrightarrow{OM}|$. Μον.8

Χανιά Μαΐου 2013