ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2011

ΘΕΜΑ Α **(Μονάδες 8 + 7 + 10 = 25)**

Α1. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ δεν είναι παράλληλα στον άξονα $y'y$ και λ_1, λ_2 είναι οι συντελεστές διεύθυνσης των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

$$\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow \lambda_1\cdot\lambda_2=-1$$

Α2. Έστω Ε΄ και Ε δύο σημεία του επιπέδου. Τι ονομάζεται έλλειψη με εστίες τα σημεία Ε΄, Ε;

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με τη λέξη Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ)

α) Η ευθεία $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\eta}=(-\mathrm{A},\mathrm{B})$.

β) Οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, όπου $\mathrm{A}(x_1,y_1)$ και $\mathrm{B}(x_2,y_2)$ είναι $x_{\mathrm{M}}=\dfrac{x_1-x_2}{2}$ και $y_{\mathrm{M}}=\dfrac{y_1-y_2}{2}$.

γ) Για κάθε διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ισχύει $\vec{\alpha}^2=|\vec{\alpha}|^2$.

δ) Η ισοσκελής υπερβολή έχει εκκεντρότητα $\varepsilon=\sqrt{3}$.

ε) Η παραβολή $x^2=2py$ έχει εστία $\mathrm{E}(0,p)$.

ΘΕΜΑ Β **(Μονάδες 7 + 10 + 8 = 25)**

Δίνεται το σημείο $\mathrm{A}(2,-2)$ και οι ευθείες $\varepsilon_1: x-3y+2=0$ και $\varepsilon_2: x+y+2=0$.

Β1. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_3 που διέρχεται από το σημείο Α και είναι κάθετη στην ευθεία ε_2.

Β2. Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό του σημείου Α ως προς την ευθεία ε_1 είναι το σημείο $\mathrm{A}'(0,4)$.

Β3. Έστω Β το σημείο τομής των ευθειών ε_1 και ε_3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $\mathrm{A}'\mathrm{B}$.

ΘΕΜΑ Γ **(Μονάδες 9 + 9 + 7 = 25)**

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,-4)$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\beta}|=4$ και $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=6$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι κάθετα.

Γ2. Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$.

Γ3. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\gamma}=2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$. Να βρείτε την προβολή του $\vec{\gamma}$ πάνω στο $\vec{\alpha}$.

ΘΕΜΑ Δ **(Μονάδες 7 + 12 + 6 = 25)**

Δίνεται η εξίσωση $(x+\alpha)^2+(y-2\beta+1)^2=\mu^2-1$ (1) όπου $\alpha,\beta,\mu\in\mathbb{R}$ και η ευθεία $\varepsilon: 2x+y+7=0$.

Δ1. Να βρείτε τις τιμές του $\mu\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η (1) παριστάνει κύκλο και να γράψετε το κέντρο Κ και την ακτίνα του ρ.

Δ2. Για $\mu=4$ να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ αν είναι γνωστό ότι το κέντρο Κ του κύκλου κινείται στην ευθεία ε και ότι οι εστίες της έλλειψης είναι $E'(-\rho,0)$ και $E(\rho,0)$, όπου ρ η ακτίνα του κύκλου.

Δ3. Αν $\alpha=4$ και $\beta=1$ να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $E'KE$.

Κ Α Λ Η Ε Π Ι Τ Υ Χ Ι Α