

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2012

ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ:

ΘΕΜΑ Α

- A1. Να αποδείξετε την πρόταση: «Για δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου, οι συντεταγμένες (x, y) του μέσου M του AB δίνονται από τις σχέσεις: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ και $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ ». (M 8)
- A2. Δίνονται ένα σημείο E και μία ευθεία δ του επιπέδου.
α. Τι ονομάζεται παραβολή με εστία το σημείο E και διευθετούσα την ευθεία δ ; (M 5)
β. Να γράψετε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας δ της παραβολής με εξίσωση $x^2 = 2py$. (M 2)
- A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με τη λέξη Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ): (M 10)
- α. Για δύο διανύσματα \vec{a} και $\vec{\beta}$ ισχύει η πρόταση: «Αν $\vec{a} \perp \vec{\beta}$, τότε $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = -1$ και αντιστρόφως».
- β. Για δύο ευθείες ϵ_1, ϵ_2 με συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 ισχύει: $\epsilon_1 // \epsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$
- γ. Αν A, B, Γ πραγματικοί αριθμοί, τότε η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει πάντα ευθεία γραμμή.
- δ. Η εξίσωση $\beta^2 xx_1 + \alpha^2 yy_1 = \alpha^2 \beta^2$ είναι η εξίσωση της εφαπτομένης έλλειψης στο σημείο της (x_1, y_1)
- ε. Αν θ η γωνία των διανυσμάτων \vec{a} και $\vec{\beta}$, τότε ισχύει: $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{a}| |\vec{\beta}|}$

ΘΕΜΑ Β

Για τα διανύσματα \vec{a} και $\vec{\beta}$ δίνεται ότι $|\vec{a}| = 1, |\vec{\beta}| = 2$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$. Έστω το διάνυσμα $\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{\beta}$. Να υπολογίσετε :

- B1. Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ (M 4)
- B2. Το μέτρο του \vec{v} (M 7)
- B3. Τη γωνία (\vec{v}, \vec{a}) (M 7)
- B4. Το μέτρο του προβ $\vec{\beta}$ (M 7)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: ax - 5y + 3 = 0$ και $\varepsilon_2: x - 3y + 3 = 0$ με a πραγματικό αριθμό. Η ευθεία ε_1 διέρχεται από το σημείο $A(1,1)$.

- Γ1. Να δείξετε ότι $a = 2$ (M 4)
Γ2. Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ (M 6)
Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_3 που διέρχεται από το σημείο τομής των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και είναι κάθετη στην ε_2 (M 7)
Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν η ε_2 , η ε_3 και ο άξονας $x'x$. (M 8)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda x - \lambda y - 1 = 0$.

- Δ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (M 4)
Δ2. Να βρείτε το κέντρο του παραπάνω κύκλου και να δείξετε ότι αυτό ανήκει στην ευθεία $\varepsilon: x + y = 0$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (M 6)
Για $\lambda = -4$:
Δ3. Να γράψετε τον παραπάνω κύκλο στη μορφή $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$ (M 3)
Δ4. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής με ασύμπτωτη την ευθεία ε (του ερωτήματος Δ2) και εστία το σημείο $E'(-4,0)$ (M 6)
Δ5. Να αποδείξετε ότι οι εστίες E και E' της υπερβολής είναι αντίστοιχα εσωτερικό και εξωτερικό σημείο του κύκλου. (M 6)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ