ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ

Μάθημα: ***ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ και ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ***

Θέμα 1ο

Να γράψετε στην κόλλα των εξετάσεων τον αριθμό της κάθε ερώτησης από τις παρακάτω και δίπλα τη λέξη ***ΣΩΣΤΟ*** αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη ***ΛΑΘΟΣ*** αν η πρόταση είναι λανθασμένη

1. Δύο αντίθετα διανύσματα έχουν αντίθετους συντελεστές διεύθυνσης
2. Αν $\frac{\pi}{2} < \left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) < \pi$, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} < 0$
3. Αν $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι ομόρροπα, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$
4. Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + C = 0$, με $|A| + |B| \neq 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$
5. Οι ευθείες με εξισώσεις $x = 5$ και $y = -1$ είναι κάθετες μεταξύ τους
6. Η ευθεία $(\varepsilon): y = k^2x + 2013$ με $k \in R^*$ σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα $x'x$
7. Οι ευθείες με εξισώσεις $y = 2$ και $y = 2x$ είναι παράλληλες μεταξύ τους
8. Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(a,b)$ και είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ έχει εξίσωση $x = a$.
9. Αν $A^2 + B^2 - 4C = 0$ τότε η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ παριστάνει ένα σημείο.
10. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 2px$. Η απόσταση της διευθετούσας από την εστία της παραβολής ισούται με $|p|$

Μονάδες 25

Θέμα 2ο

Για τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{b}$ ισχύει $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{b}| = 1$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{b}}\right) = 120^0$, έστω επίσης $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 4\vec{b}$ και $\vec{v} = \vec{\alpha} - \vec{b}$ δύο νέα διανύσματα.

i) Να υπολογίσετε τα εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{b}$

Μονάδες 5

ii) Να υπολογίσετε τα εσωτερικό γινόμενο $\vec{u}\cdot\vec{v}$

Μονάδες 5

iii) Να υπολογίσετε το $\text{συν}\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$

Μονάδες 7

iv) Να βρεθεί το $x \in R$, ώστε τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{w} = x\vec{\alpha} + \vec{b}$ να είναι κάθετα μεταξύ τους

Μονάδες 8

Θέμα 3ο

Δίνεται η εξίσωση $(x+y-5)+\lambda(2x+y-7)=0, \lambda \in R$

i) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ, και ότι όλες οι ευθείες διέρχονται από σταθερό σημείο του οποίου να βρεθούν οι συντεταγμένες

Μονάδες 10

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_1) που ορίζεται από την παραπάνω εξίσωση και διέρχεται από το σημείο $A(4,1)$

Μονάδες 5

iii) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\eta): -x+y+1=0$ δεν ανήκει στην οικογένεια των ευθειών που παριστάνει η αρχική εξίσωση

Μονάδες 5

iv) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_2) που ορίζεται από την αρχική εξίσωση και είναι κάθετη στην ευθεία $(\eta): -x+y+1=0$

Μονάδες 5

Θέμα 4ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2+2(\lambda+1)x+(2\lambda-1)y+2\lambda^2+\lambda-1=0, \lambda \in R$

i) Να δείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο για κάθε τιμή του λ και να βρεθεί το κέντρο του και η ακτίνα του

Μονάδες 8

ii) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων του προηγούμενου ερωτήματος

Μονάδες 7

iii) Για $\lambda=-1$, να βρεθεί

a) η εξίσωση του αντίστοιχου κύκλου (έστω (C_1))

Μονάδες 5

b) η σχετική θέση της ευθείας $(\varepsilon): 3x+4y-5=0$ ως προς τον κύκλο (C_1)

Μονάδες 5

Παρατηρήσεις:

1) Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα

2) Κάθε μέθοδος επιστημονικά τεκμηριωμένη γίνεται αποδεκτή

Αιδηψός Τρίτη , 21 Μαΐου 2013

Η Διευθύντρια

Οι εισηγητές

Ενδεικτικές Λύσεις

Θέμα 1°

Να γράψετε στην κόλλα των εξετάσεων τον αριθμό της κάθε ερώτησης από τις παρακάτω και δίπλα τη λέξη **ΣΩΣΤΟ** αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **ΛΑΘΟΣ** αν η πρόταση είναι λανθασμένη

11. Δύο αντίθετα διανύσματα έχουν αντίθετους συντελεστές διεύθυνσης **(ΛΑΘΟΣ)**
12. Αν $\frac{\pi}{2} < \left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) < \pi$, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} < 0$ **(ΣΩΣΤΟ)**
13. Αν $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι ομόρροπα, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|$ **(ΣΩΣΤΟ)**
14. Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + C = 0$, με $|A| + |B| \neq 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$ **(ΣΩΣΤΟ)**
15. Οι ευθείες με εξισώσεις $x = 5$ και $y = -1$ είναι κάθετες μεταξύ τους **(ΣΩΣΤΟ)**
16. Η ευθεία $(\varepsilon): y = k^2x + 2013$ με $k \in R^*$ σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα $x'x$ **(ΛΑΘΟΣ)**
17. Οι ευθείες με εξισώσεις $y = 2$ και $y = 2x$ είναι παράλληλες μεταξύ τους **(ΛΑΘΟΣ)**
18. Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(a,b)$ και είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ έχει εξίσωση $x = a$. **(ΛΑΘΟΣ)**
19. Αν $A^2 + B^2 - 4C = 0$ τότε η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ παριστάνει ένα σημείο. **(ΣΩΣΤΟ)**
20. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 2px$. Η απόσταση της διευθετούσας από την εστία της παραβολής ισούται με $|p|$ **(ΣΩΣΤΟ)**

Μονάδες 25

Θέμα 2ο

Για τα διανύσματα $\vec{a},\vec{b}$ ισχύει $|\vec{a}|=2,|\vec{b}|=1$ και $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=120^0$, έστω επίσης $\vec{u}=2\vec{a}+4\vec{b}$ και $\vec{v}=\vec{a}-\vec{b}$ δύο νέα διανύσματα.

v) Να υπολογίσετε τα εσωτερικό γινόμενο $\vec{a}\cdot\vec{b}$

Μονάδες 5

vi) Να υπολογίσετε τα εσωτερικό γινόμενο $\vec{u}\cdot\vec{v}$

Μονάδες 5

vii) Να υπολογίσετε το $\text{συν}\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$

Μονάδες 7

viii) Να βρεθεί το $x\in R$, ώστε τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{w}=x\vec{a}+\vec{b}$ να είναι κάθετα μεταξύ τους

Μονάδες 8

Απάντηση

i) Είναι $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\text{συν}\frac{2\pi}{3}=2\cdot1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=-1}$

ii) $$\vec{u}\cdot\vec{v}=\left(2\vec{a}+4\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=2\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{a}\cdot\vec{b}-4\vec{b}^2=2|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}-4|\vec{b}|^2=$$
$$2\cdot2^2+2\cdot(-1)-4\cdot1^2\Rightarrow\ldots\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=2}$$

iii) Είναι

$$|\vec{u}|^2=|2\vec{a}+4\vec{b}|^2=\left(2\vec{a}+4\vec{b}\right)^2=4\vec{a}^2+16\vec{a}\vec{b}+16\vec{b}^2=4\cdot2^2+16\cdot(-1)+16\cdot1^2\overset{|\vec{u}|\geq0}{\Rightarrow}\boxed{|\vec{u}|=4}$$ κα

ι $$|\vec{v}|^2=|\vec{a}-\vec{b}|^2=\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2-2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2=2^2-2\cdot(-1)+1^2\overset{|\vec{v}|\geq0}{\Rightarrow}\boxed{|\vec{v}|=\sqrt{7}}$$

Έτσι $\text{συν}\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\frac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{2}{4\sqrt{7}}\Rightarrow\ldots\boxed{\text{συν}\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\frac{\sqrt{7}}{14}}$

iv) Ισχύει:

$$\vec{v}\perp\vec{w}\Leftrightarrow\vec{v}\cdot\vec{w}=0\Leftrightarrow\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\left(x\vec{a}+\vec{b}\right)=0\Leftrightarrow x\left(\vec{a}^2-\vec{a}\vec{b}\right)+\vec{a}\vec{b}-\vec{b}^2=0$$
$$\Leftrightarrow\ldots x=\frac{\vec{b}^2-\vec{a}\vec{b}}{\vec{a}^2-\vec{a}\vec{b}}=\frac{1-(-1)}{4-(-1)}\Rightarrow\ldots\boxed{x=\frac{2}{5}}$$

Θέμα 3ο

Δίνεται η εξίσωση $(x+y-5)+\lambda(2x+y-7)=0, \lambda \in R$

v) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ, και ότι όλες οι ευθείες διέρχονται από σταθερό σημείο του οποίου να βρεθούν οι συντεταγμένες

Μονάδες 10

vi) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_1) που ορίζεται από την παραπάνω εξίσωση και διέρχεται από το σημείο $A(4,1)$

Μονάδες 5

vii) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\eta): -x+y+1=0$ δεν ανήκει στην οικογένεια των ευθειών που παριστάνει η αρχική εξίσωση

Μονάδες 5

viii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_2) που ορίζεται από την αρχική εξίσωση και είναι κάθετη στην ευθεία $(\eta): -x+y+1=0$

Μονάδες 5

Απάντηση

i) Ισοδύναμα έχουμε: $(x+y-5)+\lambda(2x+y-7)=0 \Leftrightarrow \ldots \boxed{(1+2\lambda)x+(1+\lambda)y-(5+7\lambda)=0}$

που είναι της μορφής $Ax+By+C=0$ με $A=1+2\lambda, B=1+\lambda, C=-(5+7\lambda)$ και επειδή προφανώς το σύστημα $\begin{cases}1+2\lambda=0\\1+\lambda=0\end{cases}$ είναι αδύνατο προκύπτει ότι η εξίσωση θα παριστάνει ευθεία (οικογένεια ευθειών) για κάθε πραγματική τιμή του λ

Η εξίσωση θεωρούμενη ως προς λ, για να είναι ταυτότητα πρέπει να ισχύει:

$\begin{cases}x+y-5=0\\2x+y-7=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y-5=0\\x+2=0\end{cases} \Leftrightarrow \ldots \begin{cases}y=3\\x=2\end{cases}$ και συνεπώς η οικογένεια των ευθειών διέρχεται από το σταθερό σημείο (έστω S) $\boxed{S(2,3)}$

ii) Για να διέρχεται η (ε_1) από το σημείο $A(4,1)$ πρέπει …

$(4+1-5)+\lambda(2\cdot 3+1-7)=0 \Leftrightarrow \ldots \lambda=0 \Rightarrow \boxed{(\varepsilon_1): x+y-5=0}$

iii) Οι συντεταγμένες του $\boxed{S(2,3)}$ δεν επαληθεύουν την εξίσωση της (η) αφού $-2+3+1=2\neq 0$ και συνεπώς η ευθεία (η) δεν είναι «παιδί» της οικογένειας

iv) Για να είναι $(\varepsilon_2)\perp(\eta) \overset{\lambda_\eta=1\neq 0}{\Leftrightarrow} \lambda_{\varepsilon_2}=-1 \Leftrightarrow \begin{cases}-\dfrac{1+2\lambda}{1+\lambda}=-1\\ \lambda\neq -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1+2\lambda=1+\lambda\\ \lambda\neq -1\end{cases} \Rightarrow \ldots \boxed{\lambda=0}$,

οπότε η ζητούμενη ευθεία έχει εξίσωση:

$(4+1-5)+\lambda(2\cdot 3+1-7)=0 \Leftrightarrow \ldots \lambda=0 \Rightarrow \boxed{(\varepsilon_1): x+y-5=0}$

ή ευκολότερα παρατηρήστε ότι $\lambda_{\varepsilon_1}=-1 \overset{\lambda_\eta=1}{\Rightarrow} (\varepsilon_1)\perp(\eta) \Rightarrow \boxed{(\varepsilon_2)\equiv(\varepsilon_1)}$

Θέμα 4ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2+2(\lambda+1)x+(2\lambda-1)y+2\lambda^2+\lambda-1=0, \lambda\in R$

iv) Να δείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο για κάθε τιμή του λ και να βρεθεί το κέντρο του και η ακτίνα του

Μονάδες 8

v) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων του προηγούμενου ερωτήματος

Μονάδες 7

vi) Για $\lambda=-1$, να βρεθεί

c) η εξίσωση του αντίστοιχου κύκλου (έστω (C_1))

Μονάδες 5

d) η σχετική θέση της ευθείας $(\varepsilon): 3x+4y-5=0$ ως προς τον κύκλο (C_1)

Μονάδες 5

i) Η δοσμένη εξίσωση είναι της μορφής $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ με $A^2+B^2-4C=\left[2(\lambda+1)\right]^2+(2\lambda-1)^2-4(2\lambda^2+\lambda-1)=\ldots 9>0$ για κάθε πραγματική τιμή του λ , οπότε είναι εξίσωση κύκλου, κέντρου $K\left(-\frac{2(\lambda+1)}{2},-\frac{2\lambda-1}{2}\right)\to\boxed{K\left(-\lambda-1,\frac{1}{2}-\lambda\right)}$ και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{9}}{2}\to\boxed{\rho=\frac{3}{2}}$

ii) Έχουμε: $\begin{cases} x=-\lambda-1 \ (-) \\ y=\frac{1}{2}-\lambda \end{cases} \Rightarrow x-y=-\frac{3}{2}\Rightarrow \boxed{2x-2y+3=0}$, οπότε ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των παραπάνω κύκλων είναι η ευθεία με εξίσωση $2x-2y+3=0$

iii) Για $\lambda=-1$ έχουμε:

a) $x^2+y^2+2(-1+1)x+(-2-1)y+2\lambda-1-1=0\Rightarrow\ldots\boxed{(C_1): x^2+y^2-3y=0}$

b) Ο πιο πάνω κύκλος $(C_1): x^2+y^2-3y=0$ έχει κέντρο $K_1\left(0,\frac{3}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho_1=3$ και

είναι $d(K_1,(\varepsilon))=\frac{\left|3\cdot 0+4\cdot\frac{3}{2}-5\right|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{1}{5}<\frac{3}{2}=\rho$ και συνεπώς η ευθεία τέμνει τον κύκλο σε δύο διακεκριμένα σημεία

ΚΑΛΟ ΚΑΛΟΚΑΙΡΙ