

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ
ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΠΕΜΠΤΗ 16 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ)
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1ο

A. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 10

B. Έστω A ένα υποσύνολο του \mathbb{R} , f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A και $x_0 \in A$.
Πότε θα λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει στο x_0 (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$;

Μονάδες 5

*Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις Γ , Δ , E , ΣT και Z να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη Σ , αν η πρόταση είναι **Σωστή**, ή Δ , αν αυτή είναι **Λανθασμένη**.*

Γ. Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους στο μιγαδικό επίπεδο.

Μονάδες 2

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

Δ. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 2

Ε. Ισχύει ο τύπος $\int \eta \mu x dx = \sigma \nu x + c$

Μονάδες 2

ΣΤ. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Θα λέμε ότι: Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ , αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ .

Μονάδες 2

Ζ. Έστω μια 1-1 συνάρτηση f και C, C' οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} στο ίδιο σύστημα αξόνων. Τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & , x \leq 0 \\ \alpha x + \beta & , 0 < x < 1 \\ 1 + x \ln x & , x \geq 1 \end{cases} \quad \text{όπου } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

α) Να βρείτε τα α και β έτσι ώστε η f να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 8

β) Αν, για τους πραγματικούς αριθμούς α και β , ισχύει: $\alpha=1$ και $\beta=0$, τότε:

i) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2}$

Μονάδες 9

ii) Να υπολογίσετε τα όρια :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω z μιγαδικός αριθμός, με $z \neq \pm i$ και $w = \frac{z}{z^2 + 1}$.

α) Να αποδείξετε ότι αν ο w είναι πραγματικός, τότε ο z είναι πραγματικός ή $|z| = 1$.

Μονάδες 10

β) Να λύσετε, στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών, την εξίσωση $\frac{z}{z^2 + 1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Μονάδες 10

γ) Αν z_1, z_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (β), να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$K = \frac{(z_1 \cdot z_2)^3 - i}{4 + (z_1 + z_2)^2}.$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $\Delta = (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει:

$$f(x) = x^2 - 1 + \frac{1}{x+1} \int_1^x f(t) dt, \quad x \in \Delta.$$

α) Να υπολογίσετε το $f(1)$.

Μονάδες 3

β) Να αποδείξετε ότι $f'(x) = 3x - 1$.

Μονάδες 10

γ) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=2$ και $x=4$.

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιό σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ