Χανίων ΣΧΟΛ. ΕΤΟΣ 14- 15

Τάξη Α΄

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΙΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ

ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ

Τα θέματα ΔΕΝ θα μεταφερθούν στο καθαρό.

Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα. Οι απαντήσεις να γραφούν στο καθαρό

Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες

Θέμα Α

Στο γραπτό σας να γράψετε τον αριθμό της πρότασης και δίπλα τη λέξη ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ, αν είναι σωστή ή λάθος αντίστοιχα.

Α1. Για κάθε α$\in R$ ισχύει |α| = | -α| **Μον. 2**

Α2. Αν β≥ 0 τότε $\sqrt{\alpha^2\beta} = \alpha\sqrt{\beta}$ **Μον. 2**

Α3. Αν θ > 0 τότε ισχύει η ισοδυναμία |x|=θ $\Leftrightarrow$ x = θ ή x = - θ **Μον. 2**

Στο γραπτό σας να γράψετε τον αριθμό της πρότασης και τις λέξεις ή σχέσεις που συμπληρώνουν τα κενά στην παρακάτω πρόταση:

Α4. Το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, με $\alpha \neq 0$ γίνεται ετερόσημο του α μόνο όταν …………….και για τις τιμές του x που βρίσκονται ……………… των ριζών της **Μον. 2**

Στο γραπτό σας να γράψετε τον αριθμό της πρότασης και το γράμμα της επιλογής που είναι κατά τη γνώμη σας σωστή

Α5. Αν $a \leq x < \beta$ τότε:

Α. $x \in [a, \beta]$ Β. $x \in (a, \beta]$ Γ. $x \in [a, \beta)$ Δ. $x \in (a, \beta)$

Μον. 2

Β. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, με $\alpha \neq 0$ να αποδείξετε ότι $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{a}$ **Μον. 15**

Θέμα Β

Δίνονται οι αριθμοί $a = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt[4]{16}}$ και $\beta = \sqrt{3} \cdot \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$

Β1.Υπολογίστε τις τιμές των α και β **Μον. 13**

Β2. Αν α = 6 και β = 3 να λύσετε την εξίσωση $|4x - a| = \beta$ **Μον. 12**

Θέμα Γ

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - x + k - k^2 = 0$ με άγνωστο x και $k \in R$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $k \in R$

Μον. 9

Γ2. Για ποιες τιμές του k, η εξίσωση έχει ρίζες άνισες. **Μον. 6**

Γ3. Αν x_1, x_2 ρίζες της εξίσωσης να βρεθεί ο k, ώστε να ισχύει $2x_1 + 2x_2 + x_1x_2 = 0$. **Μον. 10**

Θέμα Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 3x - 1$ και $g(x) = 2x - 7$

Δ1. Να βρεθούν τα κοινά σημεία των C_f και C_g. **Μον. 8**

Δ2. Αν το ένα από τα σημεία τομής έχει τετμημένη x = 3, να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο αυτό και είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -4x$ **Μον. 8**

Δ3. Να βρεθούν οι τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = -3$ **Μον. 9**

Λύσεις

Θέμα Α

Α1. Σ
Α2. Λ
Α3. Σ
Α4, Το τριώνυμο $αx^2 + βx + γ = 0$, με $\alpha \neq 0$ γίνεται ετερόσημο του α μόνο όταν Δ >0 και για τις τιμές του x που βρίσκονται μεταξύ των ριζών της
Α5. Γ
Β. Θεωρία σχ. βιβλίου σελ .90

Θέμα Β

Β1. $\sqrt{9}=3$ και $\sqrt[4]{16}=2$ άρα α = $3\cdot\sqrt{2^2}=3\cdot 2=6$ επίσης χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ για το β έχουμε

$$\beta=\sqrt{3\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}=\sqrt{3\left(\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2\right)}=\sqrt{3(5-2)}=\sqrt{3^2}=3$$

Β2. Αφού α = 6 και β = 3 η εξίσωση γίνεται:

$$|4x-6|=3 \Leftrightarrow 4x-6=-3 \text{ ή } 4x-6=3 \Leftrightarrow 4x=3 \text{ ή } 4x=9 \Leftrightarrow x=\frac{3}{4} \text{ ή } x=\frac{9}{4}$$

Θέμα Γ

Γ1. Αρκεί να δείξουμε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός , $\Delta \geq 0$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

Δ = $(-1)^2-4\left(k-k^2\right)=1-4k+4k^2=1-2\cdot 2k+(2k)^2=(1-2k)^2\geq 0$ για κάθε $k\in R$, άρα η εξίσωση έχει ρίζες για κάθε πραγματικό αριθμό k.

<u>2ος τρόπος</u> Βρήκαμε Δ = $1-4k+4k^2$ η οποία είναι τριώνυμο ως προς k και θέλουμε το πρόσημο του. Βρίσκουμε Δ΄ = $(-4)^2 - 4\cdot1\cdot4 = 16 - 16 = 0$ άρα το τριώνυμο έχει διπλή ρίζα την $k=\frac{1}{2}$ και αφού ο συντελεστής του k^2 είναι 4 >0 θα ισχύει $1-4k+4k^2\geq 0$ για κάθε $k\in R$

Γ2. Για να έχει δυο άνισες ρίζες πρέπει η διακρίνουσα να είναι θετική

Δηλαδή $(1-2k)^2>0 \Leftrightarrow 1-2k\neq 0 \Leftrightarrow k\neq\frac{1}{2}$

Γ3. Αφού x_1, x_2 ρίζες της εξίσωσης, τότε από τους τύπους Vieta ισχύει

$x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}=1 \quad \text{και} \quad x_1x_2=\frac{\gamma}{\alpha}=k-k^2$ άρα:

$$2x_1+2x_2+x_1x_2=0 \Leftrightarrow 2\left(x_1+x_2\right)+x_1x_2=0 \Leftrightarrow 2\cdot 1+k-k^2=0 \Leftrightarrow k^2-k-2=0$$

Με Δ = $(-1)^2 - 4\cdot(-2)$=1+8= 9 άρα $k=\dfrac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\dfrac{1\pm 3}{2}$ άρα κ = 2 ή κ = - 1.

<u>Θέμα Δ</u>

Οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το R

Δ1. Για να βρούμε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων θα λύσουμε την εξίσωση:

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2-3x-1=2x-7 \Leftrightarrow x^2-3x-2x-1+7=0 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0$$

Δ = $(-5)^2$ – 24=1 και $x=\dfrac{5\pm 1}{2}$ άρα x = 3 ή x = 2

Επίσης g(3) = 6-7= -1 και g(2) = 4 – 7 = - 3

Άρα οι C_f, C_g τέμνονται στα σημεία Α(3, - 1) και Β(2, -3)

Δ2. Το σημείο με τετμημένη 3 είναι το Α(3, -1)

Η ζητούμενη ευθεία θα έχει εξίσωση y = αx + β

Αφού είναι παράλληλη στην ευθεία y = - 4x θα ισχύει α = -4

Άρα η εξίσωση της ευθείας γίνεται y = - 4x + β και αφού διέρχεται από το σημείο Α θα πρέπει οι συντεταγμένες του να επαληθεύουν την εξίσωση της, δηλαδή $-1=-4\cdot 3+\beta \Leftrightarrow \beta=12-1 \Leftrightarrow \beta=11$

επομένως η ευθεία έχει εξίσωση $y=-4x+11$

Δ3. Αρκεί να λύσουμε στο R την ανίσωση:

$f(x)<-3 \Leftrightarrow x^2-3x-1<-3 \Leftrightarrow x^2-3x+2<0$ το τριώνυμο έχει διακρίνουσα Δ = 1 και ρίζες x_1 = 1, x_2 = 2

από το παρακάτω πίνακα προσήμων για το τριώνυμο x^2-3x+2

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		+		-		+	

προκύπτει ότι οι λύσεις της ανίσωσης είναι το διάστημα (1, 2).