1ο Γενικό Λύκειο Χανίων ΣΧΟΛ. ΕΤΟΣ 15-16
Τάξη Α΄

Ονοματεπώνυμο…….

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ
ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ

Τα θέματα ΔΕΝ θα μεταφερθούν στο καθαρό. Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα
Οι απαντήσεις να γραφούν στο καθαρό
Τα σχήματα μπορούν να γίνουν και με μολύβι

Θέμα Α

Στο γραπτό σας να γράψετε τον αριθμό της πρότασης και δίπλα τη λέξη ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ, αν είναι σωστή ή λάθος αντίστοιχα.

Α1. Για κάθε α, β∈ R ισχύει |α + β| = |α|+ |β| **Μον. 2**

Α2. Αν x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$,τότε
$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = (x - x_1)(x - x_2)$ **Μον. 2**

Α3. Αν $\alpha \le 0$ και ν άρτιος, τότε $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = |\alpha|$ **Μον. 2**

Στο γραπτό σας να γράψετε τον αριθμό της πρότασης και τις λέξεις ή σύμβολα που συμπληρώνουν τα κενά στην παρακάτω πρόταση:

Α4. Συνάρτηση από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β λέγεται μια διαδικασία (κανόνας) με την οποία ……. ……. του συνόλου …. αντιστοιχίζεται σε ……. ……. στοιχείο του συνόλου ... . **Μον. 5**

Στο γραπτό σας να γράψετε τον αριθμό της πρότασης και το γράμμα της επιλογής που είναι κατά τη γνώμη σας σωστή

Α5. Αν S το άθροισμα και P το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, τότε:

Α. $S = \frac{\beta}{a}$ και $P = \frac{\gamma}{a}$ Β. $S = -\frac{\beta}{2a}$ και $P = \frac{\gamma}{a}$ Γ. $S = -\frac{\beta}{a}$ και $P = \frac{\gamma}{a}$

Δ. $S = -\frac{\beta}{a}$ και $P = -\frac{\gamma}{a}$ **Μον. 2**

Β. Αν $\alpha, \beta \ge 0$, να αποδείξετε ότι $\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta}$ **Μον. 12**

Θέμα Β

Β1. Να βρείτε το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $d(x,1) \le 2$ **Μον. 9**

Β2. Να λύσετε την εξίσωση $|2x-3| = 1$. **Μον. 9**

Β3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{\sqrt{2-|x-1|}}{|2x-3|-1}$ **Μον. 7**

Θέμα Γ

Δίνονται οι αριθμοί $a=\sqrt{2}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[6]{2}$ και $\beta=\sqrt[3]{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}+\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{9}$

Γ1.Να αποδείξετε ότι α = 2 και β = 3 **Μον. 10**

Γ2. Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα ax^2-3x-2 και $2x^2+7x+\beta$ **Μον. 10**

Γ3. Να απλοποιήσετε το κλάσμα $\dfrac{ax^2-3x-2}{2x^2+7x+\beta}$. **Μον. 5**

Θέμα Δ

Δίνονται η συνάρτηση $f(x)=3x^2+5x+\kappa$ και η ευθεία ε: $y=\left(\lambda^3-1\right)x+\beta$ για τις οποίες γνωρίζουμε ότι:

- το σημείο Α(1, 7) ανήκει στην γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f και
- η ευθεία ε είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y=26x$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη -1

Δ1. Να βρείτε την τιμή του κ. **Μον. 5**

Δ2. Να βρείτε τις τιμές των λ και β **Μον. 7**

Δ3. Για κ = β = -1 και λ = 3, να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται πάνω από την ευθεία ε **Μον. 8**

Δ4. Να αποδείξετε ότι η C_f βρίσκεται και πάνω και κάτω από τον άξονα $x'x$ **Μον. 5**

Καλή Επιτυχία!

Χανιά 19/5/2016

Οι εισηγητές:
Γνεσούλης Αθ.
Τερεζάκης Ι.

Ο Διευθυντής

Σπυρίδων Γ. Κούρτης
Μαθηματικός

Λύσεις

ΘΕΜΑ Α

Α1 Λάθος (Το σωστό είναι $|a+\beta| \leq |a|+|\beta|$)

Α2 Λάθος (Το σωστό είναι $ax^2+\beta x+\gamma = \alpha(x-x_1)(x-x_2)$)

Α3 Σωστό

Α4 κάθε στοιχείου Α ένα ακριβώς Β

Α5 Γ

Β Θεωρία σελ 71 Εκ. βιβλίου.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Ισχύει $|x-1| \geq 2 \Leftrightarrow x-1 \leq -2$ ή $x-1 \geq 2 \Leftrightarrow x \leq -1$ ή $x \geq 3$

άρα το ζητούμενο σύνολο είναι το $(-\infty,-1] \cup [3,+\infty)$

Β2 Ισχύει $|2x+3| = 1 \Leftrightarrow 2x+3=-1$ ή $2x+3=1 \Leftrightarrow 2x=-4$ ή $2x=2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-2$ ή $x=1$

Β3 Για να ορίζεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\sqrt{|x-1|-2}}{|2x+3|-1}$ πρέπει

$|x-1|-2 \geq 0$ (1) και $|2x+3|-1 \neq 0$ (2)

Από (1) $\Leftrightarrow |x-1| \geq 2$ όπου από το Β1 πρέπει $x \in (-\infty,-1] \cup [3,+\infty)$

Από (2) $\Leftrightarrow |2x+3| \neq 1$ όπου από το Β2 πρέπει $x \neq -2$ και $x \neq 1$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω βρίσκουμε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι $D_f = (-\infty,-2) \cup (-2,-1) \cup [3,+\infty)$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 $a = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{6}} = 2^{\overset{3}{\frac{1}{2}}+\overset{3}{\frac{1}{3}}+\overset{1}{\frac{1}{6}}} = 2^{\frac{3}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{6}} = 2^{\frac{6}{6}} = 2^1 = 2$

$b = \sqrt[3]{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{27} = 3$

Γ2 Αφού $a=2$ και $b=3$ τα τριώνυμα είναι τα $2x^2-3x-2$ και $2x^2+7x+3$

- $2x^2-3x-2$

$\Delta = (-3)^2-4\cdot 2(-2) = 9+16 = 25$ άρα έχει δύο ρίζες $x_{12} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \dots = \begin{cases} 2 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$

επομένως $2x^2-3x-2 = 2(x-2)(x+\frac{1}{2})$

- $2x^2+7x+3$

$\Delta = 7^2-4\cdot 2\cdot 3 = 49-24 = 25$ άρα έχει δύο ρίζες $x_{12} = \frac{-7\pm\sqrt{25}}{4} = \dots = \begin{cases} -3 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$

επομένως $2x^2+7x+3 = 2(x+3)(x+\frac{1}{2})$

Γ3. Συμφωνα με τα παραπανω το κλασμα γινεται $\frac{\cancel{2}(x-2)\cancel{(x+\frac{1}{2})}}{\cancel{2}(x+3)\cancel{(x+\frac{1}{2})}} = \frac{x-2}{x+3}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Το σημειο $A(1,7)$ ανηκει στην C_f αφα $f(1)=7 \Leftrightarrow 3+5+k=7 \Leftrightarrow k=-1$

Δ2 Αφαι η ε ειναι παραλληλη στην ευθεια $y=26x$ πρεπει $\lambda^3-1=26 \Leftrightarrow$
$\lambda^3=27 \Leftrightarrow \lambda=\sqrt[3]{27} \Leftrightarrow \lambda=3$

Αφαι τέμνει τον $y'y$ στο σημειο $(0,-1)$ αφα $\beta=-1$

Δ3 Για $k=\beta=-1$ και $\lambda=3$ εχαι/ε $f(x)=3x^2+5x+k$ και $\varepsilon: y=26x-1$

Το πεδιο ορισμού και των δυο ειναι το $\mathbb{R}$ και για να ειναι η C_f πανω απο την ε αρκει $f(x)>y \Leftrightarrow 3x^2+5x-1>26x-1 \Leftrightarrow 3x^2-21x>0$

Το τριωνυμο $3x^2-21x = 3x(x-7)$ αφα εχει δυο ριζες $x=0$ και $x=7$

και το προσημο του ειναι

	$-\infty$		0		7		$+\infty$
$3x^2-21x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

αφα πρεπει $x<0$ ή $x>7$ δηλ $x\in(-\infty,0)\cup(7,+\infty)$

Δ4 Για να βρίσκεται η C_f και πάνω και κάτω από τον άξονα $x'x$ αρκεί να δείξουμε ότι παίρνει και θετικές και αρνητικές τιμές.

Δηλαδή ν.δ.ο. υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x)<0$ και $x \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x)>0$

Προς τούτο αρκεί να αποδείξουμε ότι το τριώνυμο $3x^2+5x-1$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο δηλ ότι $\Delta>0$ που ισχύει αφού $\Delta=5^2-4\cdot3\cdot(-1)=37>0$.

Β' τρόπος Αφού $f(1)=7$ (από υπόθεση) και $f(0)=-1$ άρα η f παίρνει και θετικές και αρνητικές τιμές