ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Α΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΛ .....
24/5/2016
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Ισχύει ότι $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$ για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α και β. **Μονάδες (02)**

β) Αν $A \subseteq B$, τότε $P(A) \geq P(B)$. **Μονάδες (02)**

γ) η εξίσωση: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ **(1),** με x_1, x_2 οι πραγματικές ρίζες της μετασχηματίζεται ισοδύναμα στην εξίσωση: $x^2 + Sx + P = 0$ όπου S και P, το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της **(1)**. **Μονάδες (02)**

δ) Αν $\theta > 0$, ισχύει η ισοδυναμία: $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$ **Μονάδες (02)**

ε) Η ανίσωση: $x^2 - x + 1 > 0$, αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x. **Μονάδες (02)**

Α2. Αν x_1, x_2, είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ και $\Delta \geq 0$ να αποδείξετε ότι:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{και} \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha},$$

όπου S, P το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης **Μονάδες (8+7)**

ΘΕΜΑ Β

Για τα ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω δίνεται $P(A) = 0,7$ $P(B) = 0,4$ και $P(A \cap B) = 0.2$.

Β1. Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(B')$ **Μονάδες (8)**

Β2. Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(A \cup B)$ **Μονάδες (9)**

Β3. Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου να πραγματοποιηθεί **μόνο** το ενδεχόμενο Α. **Μονάδες (8)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = |x - 2| \quad \text{και} \quad B = |2x - 3| - 2$$

Γ1. Να λύσετε την εξίσωση: $A = 1$ **Μονάδες (5)**

Γ2. Να λύσετε την ανίσωση: $B > 1$ **Μονάδες (7)**

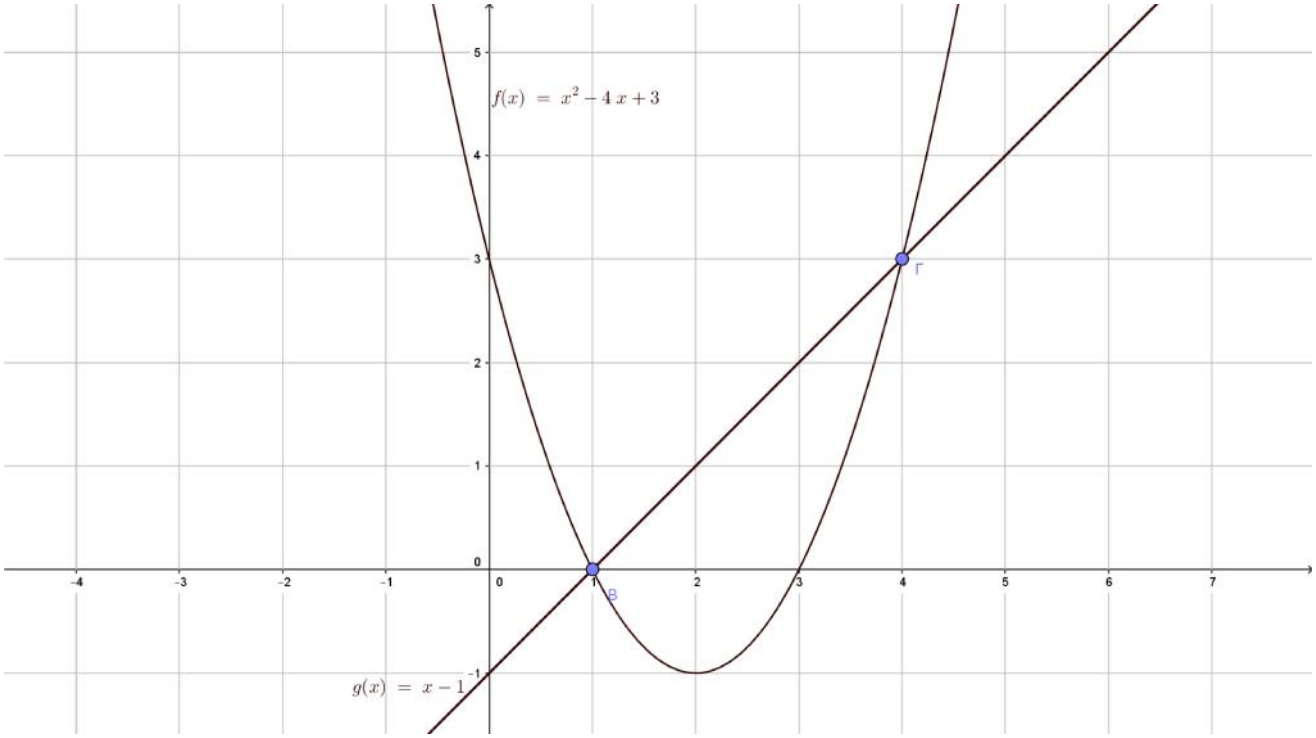
Γ3. Να λύσετε την εξίσωση: $A - 2 = B$ **Μονάδες (6)**

Γ4. Να λύσετε την εξίσωση: $A^2 - A - 2 = 0$ **Μονάδες (7)**

ΘΕΜΑ Δ

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$f(x) = x^2 - 4x + 3$, που είναι ορισμένη σε όλο το R και η ευθεία $g(x) = x - 1$.



Δ1. Να συμπληρωθεί γραφικά (από το σχήμα) ο παρακάτω πίνακας:

x	0	1		4
f(x)			-1	

Μονάδες (4)

Δ2. Να βρείτε γραφικά (από το σχήμα) τα σημεία τομής της ευθείας $g(x) = x - 1$ με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f **Μονάδες (2)**

Δ3. Να λύσετε γραφικά (από το σχήμα):

i) τις εξισώσεις: $f(x) = 0$ και $f(x) = g(x)$ **Μονάδες (1+1)**

ii) τις ανισώσεις: $f(x) > 0$ και $f(x) > g(x)$ **Μονάδες (1+1)**

Δ4. Να λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση $f(x) > g(x)$ **Μονάδες (8)**

Δ5. Αν h(x) μία συνάρτηση με τύπο $h(x) = \frac{\sqrt{f(x)}}{g(x)}$, (όπου f(x) , g(x) οι συναρτήσεις των προηγούμενων ερωτημάτων), να βρείτε το πεδίο ορισμού της h(x).

Μονάδες (7)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Οι παρακάτω λύσεις είναι ενδεικτικές. Κάθε επιστημονικά τεκμηριωμένη απάντηση είναι αποδεκτή.

ΘΕΜΑ Α

Α1.

α) Λάθος
β) Λάθος
γ) Λάθος
δ) Σωστό
ε) Σωστό

Α2. θεωρία σελ.90, η $1^{η}$ απόδειξη.

ΘΕΜΑ Β

$P(A) = 0,7$ $P(B) = 0,4$ και $P(A \cap B) = 0.2$

Β1. $P(B') = 1 - P(B) = 0,6$

Β2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,9$

Β3. Η πιθανότητα του ενδεχομένου να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο Α είναι η $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B) = 0,5$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $A = |x - 2|$

$A = 1 \Rightarrow |x - 2| = 1 \Leftrightarrow x - 2 = 1$ ή $x - 2 = -1 \Leftrightarrow x = 3$ ή $x = 1$

Γ2. $B > 1 \Rightarrow |2x - 3| - 2 > 1 \Leftrightarrow |2x - 3| > 3 \Leftrightarrow 2x - 3 < -3$ ή $2x - 3 > 3 \Leftrightarrow 2x < 0$ ή $2x > 6 \Leftrightarrow x < 0$ ή $x > 3$

Γ3. $A - 2 = B \Rightarrow |x - 2| - 2 = |2x - 3| - 2 \Leftrightarrow |x - 2| = |2x - 3| \Leftrightarrow x - 2 = 2x - 3$ ή $x - 2 = -2x + 3 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = \frac{5}{3}$

Γ4. $A^2 - A - 2 = 0 \Rightarrow |x - 2|^2 - |x - 2| - 2 = 0 \overset{|x-2|=\mu \geq 0}{\Leftrightarrow} \omega^2 - \omega - 2 = 0 \Leftrightarrow \Delta = \ldots 9$

$\omega = -1$ (απορρίπτεται γιατί $\omega \geq 0$) ή $\omega = 2$ (δεκτή)

$|x - 2| = 2 \Leftrightarrow x - 2 = 2$ ή $x - 2 = -2 \Leftrightarrow x = 4$ ή $x = 0$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $g(x) = x - 1$

x	0	1	2	4
f(x)	3	0	-1	3

Τα συμπληρωμένα είναι με άλλο χρώμα

Δ2. Τα σημεία τομής είναι τα (1, 0) και (4, 3)

Δ3. i) $f(x) = 0$, (οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f (C_f) με τον άξονα x΄x. Τα σημεία τομής είναι τα (1, 0) και (3, 0) Άρα οιλύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι $x = 1$ ή $x = 3$

$f(x) = g(x)$ (οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παράστασεων της f και g αντίστοιχα (C_f, C_g). Τα σημεία τομής είναι τα (1, 0) και (4, 3) Άρα οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι $x = 1$ ή $x = 4$)
ii) $f(x) > 0$ (οι λύσεις της ανίσωσης είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f (C_f) που είναι πάνω από τον άξονα x΄x, δηλαδή
$x \in (-\infty,1) \cup (3,+\infty)$

$f(x) > g(x)$ (οι λύσεις της ανίσωσης είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f (C_f) που είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της g (C_g), δηλαδή
$x \in (-\infty,1) \cup (4,+\infty)$

Δ4. Αλγεβρική επίλυση της ανίσωσης $f(x) > g(x)$
$x^2 - 4x + 3 > x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 > 0$ με ρίζες 1 και 4 και μετά από πίνακα προσήμων

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$
$x^2 - 5x + 4$	+	–	+	

προκύπτει $x \in (-\infty,1) \cup (4,+\infty)$

Δ5. $h(x) = \dfrac{\sqrt{f(x)}}{g(x)}$ πρέπει $f(x) \geq 0$ και $g(x) \neq 0$ δηλαδή: $x \in (-\infty,1] \cup [3,+\infty)$ και
$x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$. Άρα η h(x) ορίζεται για $x \in (-\infty,1) \cup [3,+\infty)$