Άλγεβρα Α΄ Λυκείου
15/5/2017
ΓΕΛ Νομός Αττικής

Θέμα Α

Α1. Δίνεται η εξίσωση $ax^2+\beta x+\gamma=0$ με $a\neq 0$. Να αποδείξετε ότι αν συμβολίσουμε με x_1, x_2 τις ρίζες της παραπάνω εξίσωσης και S το άθροισμά τους x_1+x_2 τότε $S=-\frac{\beta}{a}$.

(15 μονάδες)

Α2 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει $\sqrt{a^2}=a$

β. Για κάθε αρνητικό πραγματικό αριθμό ισχύει $|x|=-x$

γ. Για κάθε ζεύγος πραγματικών και ομόσημων αριθμών a,β ισχύει $|a+\beta|=|a|+|\beta|$.

δ. Αν η διακρίνουσα ενός τριωνύμου είναι αρνητικός αριθμός, τότε το τριώνυμο διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ε. Κάθε εξίσωση της μορφής $0x=0$ είναι αδύνατη.

(5x2 μονάδες)

Θέμα Β

α. Να λύσετε την εξίσωση $2x^2-x-6=0$ (1).

β. Να λύσετε την ανίσωση $|x-1|<2$ (2)

γ. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και(2).

(10+10+5 μονάδες)

Θέμα Γ

Δίνεται η εξίσωση $\frac{1}{4}x^2-(\lambda-3)x+(\lambda-1)=0$, (1) με άγνωστο τον $x\in\mathbb{R}$ και παράμετρο τον $\lambda\in\mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta=\lambda^2-7\lambda+10$.

β. Αν η εξίσωση (1) έχει δυο πραγματικές και άνισες ρίζες, να δείξετε ότι $\lambda\in(-\infty,2)\cup(5,+\infty)$.

γ. Αν $\lambda=-3$ δείξτε ότι οι ρίζες της εξίσωσης θα είναι ετερόσημες.

δ. Αν $\lambda=-3$ και x_2 είναι η αρνητική ρίζα, να λύσετε την ανίσωση $|x+2017|\leq x_2$.

(5+8+7+5 μονάδες)

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x-5\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}-2}$

α. Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{x}-2=0$.

β. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f και να δείξετε ότι αυτή γράφεται στην μορφή $f(x)=\sqrt{x}-3$ για κάθε $x\in\mathrm{A}$.

γ. Να εξετάσετε αν το σημείο $\mathrm{K}(9,0)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρτησης. Ισχύει το ίδιο για το σημείο $\Lambda(4,-1)$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

δ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2)\geq x-3$ για $x\neq\pm 2$.

(4+10+6+5 μονάδες)

Ενδεικτικές Λύσεις

Θέμα Α.

Α1. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελ. 90.

Α2.

α. Λ	**β.** Σ	**γ.** Σ	**δ.** Σ	**ε.** Λ

Θέμα Β.

α. Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και είναι τριώνυμο με $a=2$, $\beta=-1$ και $\gamma=-6$.

Ισχύει $\Delta=\beta^2-4a\gamma=(-1)^2-4\cdot 2\cdot(-6)=1+48=49>0$.

Άρα η εξίσωση έχει 2 πραγματικές και άνισες ρίζες που δίνονται από τον τύπο:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{49}}{2\cdot 2}=\frac{1\pm 7}{4}$$

Άρα λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί $x_1=\frac{1+7}{4}=\frac{8}{4}=2$ και $x_2=\frac{1-7}{4}=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}$

β. Η ανίσωση ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και γράφεται:

$|x-1|<2\Leftrightarrow -2<x-1<2\Leftrightarrow -2+1<x-1+1<2+1\Leftrightarrow -1<x<3$.

Άρα λύσεις της ανίσωσης είναι όλοι οι αριθμοί που ανήκουν στο διάστημα $(1,3)$

γ. Παρατηρώ ότι $x_1=2\in(1,3)$ ικανοποιεί ενώ $x_2=-\frac{3}{2}\notin(1,3)$.

Άρα μόνο ο αριθμός 2, ικανοποιεί τις (1) και (2).

Θέμα Γ

α. Η εξίσωση είναι τριώνυμο με $a=\frac{1}{4}$, $\beta=-(\lambda-3)$ και $\gamma=(\lambda-1)$.

Η διακρίνουσα του τριωνύμου δίνεται από τον τύπο:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = \left[-(\lambda-3)\right]^2 - \cancel{4}\cdot\frac{1}{\cancel{4}}\cdot(\lambda-1) =$$
$$= (\lambda-3)^2 - \cdot(\lambda-1) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 - \lambda + 1 = \lambda^2 - 7\lambda + 10$$

β. Η εξίσωση (1) έχει πραγματικές και άνισες ρίζες όταν και μόνο όταν:

$\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 7\lambda + 10 > 0$

Παρατηρώ ότι οι λύσεις του τριωνύμου $\lambda^2 - 7\lambda + 10$, είναι οι αριθμοί $\lambda = 2$ και $\lambda = 5$ οπότε κατασκευάζω πίνακα προσήμων.

Άρα $\lambda \in (-\infty, 2) \cup (5, +\infty)$.

γ. Αν $\lambda = -3$ το τριώνυμο είναι το $\frac{1}{4}x^2 - (-3-3)x + (-3-1) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2 + 6x - 4 = 0$ με

$\Delta = (-3)^2 - 7(-3) + 10 = 9 + 21 + 10 = 40 > 0$ άρα έχει δυο πραγματικές και άνισες ρίζες. (Διαφορετικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι $-3 \in (-\infty, 2) \cup (5, +\infty)$, άρα το τριώνυμο έχει δυο πραγματικές και άνισες ρίζες)

Παρατηρώ ότι $P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{a} = \frac{-4}{\frac{1}{4}} = -16 < 0$. Άρα οι ρίζες είναι πράγματι ετερόσημες.

δ. Αν x_2 είναι η αρνητική ρίζα, τότε η εξίσωση $|x + 2017| \le x_2$ είναι αδύνατη, αφού κανένας μη αρνητικός αριθμός ($|x + 2017|$) δεν μπορεί να γίνει μικρότερος ή ίσος από έναν αρνητικό (x_2).

Θέμα Δ.

α. Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \ge 0$ και γράφεται: $\sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$.

Άρα λύση της εξίσωσης είναι ο αριθμός 4.

β. Η συνάρτηση ορίζεται όταν και μόνο όταν $\left.\begin{matrix}\sqrt{x} - 2 \ne 0 \\ x \ge 0\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}\sqrt{x} \ne 2 \\ x \ge 0\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}x \ne 4 \\ x \ge 0\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$.

Άρα το πεδίο (σύνολο) ορισμού της εξίσωσης είναι το σύνολο $A = [0, 4) \cup (4, +\infty)$.

Παρατηρώ ότι $x - 5\sqrt{x} + 6 = \sqrt{x}^2 - 5\sqrt{x} + 6 = (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)$

Για κάθε $x \in [0, 4) \cup (4, +\infty)$ η συνάρτηση γράφεται:

$$f(x) = \frac{x - 5\sqrt{x} + 6}{\sqrt{x} - 2} = \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)}{\sqrt{x} - 2} = \sqrt{x} - 3$$

(Διαφορετικά μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε αριθμητή και παρανομαστή με την συζυγή παράσταση του παρανομαστή και να γίνει ομαδοποίηση στον αριθμητή)

γ. Το σημείο $\mathrm{K}(9,0)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f αν και μόνο αν $f(9)=0$. Πράγματι $f(9)=\sqrt{9}-3=3-3=0$, άρα $\mathrm{K}\in C_f$.

Το σημείο $\Lambda(4,-1)$ δεν ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f, εφόσον η συνάρτηση δεν ορίζεται στο 4.

δ. Η ανίσωση ορίζεται όταν και μόνο όταν $x\in A=\mathbb{R}-\{\pm 2\}$ και γράφεται:

$$f\left(x^2\right)\geq x-3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2}-3\geq x-3 \Leftrightarrow |x|-3\geq x-3 \Leftrightarrow |x|\geq x$$

που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{\pm 2\}$.

Άρα λύσεις της ανίσωσης είναι κάθε $x\in\mathbb{R}-\{\pm 2\}$.

Οι παραπάνω λύσεις είναι απλά ενδεικτικές. Εννοείται ότι κάθε θέμα μπορεί και να λυθεί και με διαφορετικό τρόπο. Σε κάθε περίπτωση ισχύει ο κανόνας «Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι και σωστή».