ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΤΑΞΗ Α΄

ΜΑΘΗΜΑ : Άλγεβρα

ΘΕΜΑ 1

Α1. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ και $\Delta \geq 0$ να αποδείξετε ότι $x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha}$ και $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha}$

(Μονάδες 15)

Α2. Χαρακτηρίστε ως Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) τις ακόλουθες προτάσεις:

α) Ισχύει $|\alpha|^2 = |\alpha|$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

β) Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έχει γραφική παράσταση ευθεία που τέμνει τον άξονα $y'y$ πάντα στο σημείο $(0, -\beta)$.

γ) Αν για τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει : $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ τότε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$.

δ) Ισχύει ότι $\sqrt{x^2} = |x|$ με $x \in \mathbb{R}$.

ε) Αν $\gamma < 0$ τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma > \alpha \cdot \gamma$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Έστω $A = \dfrac{1}{(\sqrt{3}+1)} + \dfrac{1}{(\sqrt{3}-1)}$

α) Να αποδείξετε ότι : $A = \sqrt{3}$.

(Μονάδες 9)

β) Αν $B = \sqrt{x^2 - 4x + 4} - \sqrt{x^2 + 6x + 9}$ με $-3 \leq x \leq 2$, να αποδείξετε ότι

$B = -2x - 1$.

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την εξίσωση : $|B| = A^2$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=\sqrt{x^2+x-2}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της .

(Μονάδες 9)

β) Να εξετάσετε αν γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και να βρείτε τα σημεία τομής (εφόσον υπάρχουν).

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $-3f(-3)\cdot x-f\left(2\right)<4$ στο $\mathbb{R}$ **.**

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $\left(E\right)$: $x^2-\lambda x+\lambda-1=0$ **,** $\lambda\in\mathbb{R}$

α) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\left(E\right)$ έχει πάντοτε πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τον $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $\left(E\right)$ να έχει διπλή ρίζα ρ την οποία να βρείτε .

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η $\left(E\right)$ έχει δύο άνισες θετικές ρίζες .

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΕΙΣ

<u>ΘΕΜΑ 1</u>

Α1. Απόδειξη σχολικό βιβλίο σελ.90

Α2.

α) Λ ,β) Λ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Λ

<u>ΘΕΜΑ 2</u>

α)

$$A = \frac{1}{(\sqrt{3}+1)} + \frac{1}{(\sqrt{3}-1)} =$$
$$= \frac{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)\cdot(\sqrt{3}-1)}$$
$$= \frac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2-1}$$
$$= \frac{2\sqrt{3}}{2}$$
$$= \sqrt{3}$$

β) Για $-3 \le x \le 2$ είναι $x-2 \le 0$ και $x+3 \ge 0$

$$B = \sqrt{x^2-4x+4} - \sqrt{x^2+6x+9} =$$
$$= \sqrt{(x-2)^2} - \sqrt{(x+3)^2}$$
$$= |x-2| - |x+3|$$
$$= -x+2-x-3$$
$$= -2x-1$$

γ) Για $-3 \le x \le 2$ είναι :

$$|B| = A^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |-2x-1| = \left(\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |-2x-1| = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x-1 = 3 \text{ ή } -2x-1 = -3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=-2 ή x=1$$

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=\sqrt{x^2+x-2}$

α) Θα πρέπει $x^2+x-2\geq 0$

Είναι

$$\begin{aligned}
&x^2+x-2=0\Rightarrow\\
&\Rightarrow \Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=9\\
&x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}\Rightarrow\\
&\Rightarrow x_1=-2 \quad ή \quad x_2=1
\end{aligned}$$

Από πίνακα προσήμων είναι : $x^2+x-2\geq 0\Leftrightarrow x\in(-\infty,-2]\cup[1,+\infty)$

Άρα $A_f=(-\infty,-2]\cup[1,+\infty)$

β) Για τα σημεία τομής με τους άξονες είναι :

$$\begin{aligned}
&f(\chi)=\sqrt{x^2+x-2}=0\Rightarrow\\
&\Rightarrow x^2+x-2=0\Rightarrow x_1=-2 \;\; ή \;\; x_2=1
\end{aligned}$$

Τα σημεία τομής με τον άξονα $x'x$ είναι $A(-2,0)$ και $B(1,0)$

Το $x=0$ δεν ανήκει στο $A_f=(-\infty,-2]\cup[1,+\infty)$ επομένως η C_f δεν τέμνει τον άξονα $y'y$.

γ) Έχουμε

$$\begin{aligned}
&-3f(-3)\cdot x-f(2)<4\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow -3\left(\sqrt{(-3)^2+(-3)-2}\right)\cdot x-\sqrt{(2)^2+(2)-2}<4\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow -6x-2<4\Leftrightarrow x>-1
\end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση (E): $x^2-\lambda x+\lambda-1=0$ **,** $\lambda\in\mathbb{R}$

α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι :

$$\begin{aligned}
&x^2-\lambda x+\lambda-1=0\\
&\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-2)^2\\
&\Delta=(\lambda-2)^2\geq 0,\lambda\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

η εξίσωση $\left(E\right)$ έχει πάντοτε πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Η εξίσωση $\left(E\right)$ να έχει διπλή ρίζα ρ όταν $\Delta = \left(\lambda - 2\right)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$

Για $\lambda = 2$ είναι :

$$x_{1,2} = \rho = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{2}{2} = 1$$

γ) Η $\left(E\right)$ έχει δύο άνισες θετικές ρίζες όταν :

$$\Delta = \left(\lambda - 2\right)^2 > 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 2$$

και

$$S = x_1 + x_2 > 0 \Rightarrow \frac{-\beta}{\alpha} > 0 \Rightarrow \lambda > 0 \Rightarrow \lambda > 0$$

και

$$P = x_1 \cdot x_2 > 0 \Rightarrow \frac{\gamma}{\alpha} > 0 \Rightarrow \lambda - 1 > 0 \Rightarrow \lambda > 1$$

Άρα $\lambda \in \left(1,2\right) \cup \left(2,+\infty\right)$.