ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α$_1$. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν $\alpha \geq 0$, β>0 και ν θετικός ακέραιος τότε $\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}}$.

β) Για κάθε $\alpha \in$ R είναι $|-\alpha| = |\alpha|$.

γ) Αν α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε ισχύει πάντοτε β=$\frac{\alpha+\gamma}{2}$.

δ) Αν γ<0 και α>β, τότε αγ>βγ.

ε) Αν $\alpha \neq 0$ **,** τότε η εξίσωση αχ+β=0 έχει μοναδική λύση τη χ= -$\frac{\beta}{\alpha}$.

Α$_2$. Αν η εξίσωση **$\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$** με **$\alpha \neq 0$** έχει πραγματικές ρίζες **χ_1, χ_2** να αποδειχθεί ότι:
$\chi_1+\chi_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$ και **$\chi_1 \cdot \chi_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$.**

Μονάδες10+15

ΘΕΜΑ Β

Β$_1$. Να λύσετε την εξίσωση **$3\chi^2+\chi-4=0$.** (1)

Β$_2$. Να λύσετε την ανίσωση $3|\chi-1|-2 \leq |\chi-1|$. (2)

Β$_3$. Να βρείτε την κοινή λύση της εξίσωσης (1) και της ανίσωσης (2).

Μονάδες 10+10+5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση **f** με **f(x)=** $-3\chi^2+\kappa\chi+\lambda,\ \chi\in R$.

Γ$_1$. Αν η γραφική παράσταση της **f** τέμνει τον άξονα ψ΄ψ στο σημείο Μ(0,3) και διέρχεται από το σημείο Ν(-1,2), να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ και λ.

Γ$_2$. Για κ=-2 και λ=3

(i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης **g** με **g(x)=** $\frac{f(\chi)-\chi+3}{4-x^2}$.

(ii) Να απλοποιηθεί ο τύπος της **g**.

Μονάδες 10+5+10

ΘΕΜΑ Δ

΄Εστω **(α_ν)** αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega\neq 2$.

Δ$_1$. Να δείξετε ότι η εξίσωση **$(\omega-2)\chi^2-(2\omega+1)\chi+10=0$ (Ι)** έχει πραγματικές ρίζες.

Δ$_2$. Αν οι αριθμοί **χ_1+2, 7, χ_2+5** είναι οι τρεις πρώτοι διαδοχικοί όροι της προόδου **(α_ν)** όπου **χ_1, χ_2** είναι οι ρίζες της εξίσωσης (Ι) με **$\chi_1<\chi_2$**, να βρείτε το ω.

Δ$_3$. Να βρείτε ποιος όρος της προόδου ισούται με 31.

Μονάδες 10+10+5

ΛΥΣΕΙΣ – ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

α) Σ, Σ, Λ, Λ, Σ

β)

Στην περίπτωση που η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ έχει πραγματικές ρίζες x_1, x_2, έχουμε:

$$x_1 + x_2 = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} + \frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2\beta}{2\alpha} = -\frac{\beta}{\alpha} \text{ και}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \cdot \frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{(-\beta)^2-\left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4\alpha^2} = \frac{\beta^2-\left(\beta^2-4\alpha\gamma\right)}{4\alpha^2} = \frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

ΘΕΜΑ Β

B_1) Έχουμε την εξίσωση $3\chi^2+\chi-4=0$.

Η διακρίνουσα είναι $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=1+48=49>0$ άρα έχει δυο άνισες ρίζες που δίνονται από τις σχέσεις $\chi_{1,2} = \frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1\pm7}{6}$. Άρα $\chi_1=-\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$ και $\chi_2 = \frac{6}{6} = 1$.

B_2) $3|\chi-1|-2\leq |\chi-1| \Leftrightarrow 2|\chi-1|\leq 2 \Leftrightarrow |\chi-1|\leq 1 \Leftrightarrow -1\leq \chi-1\leq 1 \Leftrightarrow 0\leq \chi\leq 2$.

B_3) Από τις λύσεις της εξίσωσης μόνο η $\chi_2=1$ ικανοποιεί τις ανισώσεις $0\leq\chi\leq2$ άρα αυτή είναι η ζητούμενη κοινή λύση.

ΘΕΜΑ Γ

Γ_1) Αφού η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο Μ(0,3) θα πρέπει να ισχύει f(0)=3 οπότε προκύπτει με αντικατάσταση στον τύπο της συνάρτησης, ότι **λ=3**. Επίσης αφού η γραφική παράσταση διέρχεται και από το σημείο Ν(-1,2) θα πρέπει να ισχύει $f(-1)=2 \Leftrightarrow -3(-1)^2+\kappa(-1)+\lambda=2 \Leftrightarrow -3-\kappa+3=2 \Leftrightarrow$ **κ=-2**.

Γ_2) για κ=-2 και λ=3 έχουμε $f(x)=-3x^2-2x+3$ οπότε $g(x) = \frac{f(x)-x+3}{4-x^2} = \frac{-3x^2-2x+3-x+3}{4-x^2} = \frac{-3x^2-3x+6}{4-x^2}$. Για να ορίζεται η συνάρτηση g θα πρέπει να ισχύει $4-\chi^2\neq 0 \Leftrightarrow (2-\chi)(2+\chi) \neq 0 \Leftrightarrow \chi\neq -2$ και $\chi\neq 2$. Έτσι το πεδίο ορισμού της g είναι το σύνολο:

$A=\mathbb{R} - \{-2,2\}=(-\infty,-2) \cup (-2,2) \cup (2,+\infty)$

Γ_3) $g(x) = \frac{f(x)-x+3}{4-x^2}=\frac{-3x^2-2x+3-x+3}{4-x^2} = \frac{-3x^2-3x+6}{4-x^2}=\frac{-3(\chi-1)(\chi+2)}{(2-\chi)(2+\chi)} = \frac{-3(\chi-1)}{2-\chi}$. Ο παρονομαστής παραγοντοποιείται ως διαφορά τετραγώνων ενώ ο αριθμητής ως τριώνυμο του οποίου οι ρίζες είναι οι αριθμοί -2 και 1, με βάση τον τύπο παραγοντοποίησης $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=\alpha(\chi-\chi_1)(\chi-\chi_2)$.

ΘΕΜΑ Δ

$Δ_1$) Η διακρίνουσα της δοσμένης εξίσωσης είναι $Δ=β^2-4αγ=(2ω+1)^2-4(ω-2)10=$ $4ω^2+4ω+1-40ω+80=4ω^2-36ω+81=(2ω-9)^2 \geq 0$. Άρα η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.

$Δ_2$) Αφού οι αριθμοί $χ_1+2$, 7, $χ_2+5$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, σύμφωνα με τον τύπο $α+γ=2β$ θα πρέπει $χ_1+2+χ_2+5=14 \Leftrightarrow χ_1+χ_2=7 \Leftrightarrow \frac{2ω+1}{ω-2} = 7 \Leftrightarrow 2ω+1=7ω-14 \Leftrightarrow$ $5ω=15 \Leftrightarrow ω=3$.

$Δ_3$) Για $ω=3$ η εξίσωση (1) γίνεται $χ^2-7χ+10=0$. Οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι αριθμοί $χ_1=2$, $χ_2=5$ (αφού $S=7$ και $P=10$). Ο πρώτος όρος της ακολουθίας $α_ν$ είναι $α_1=χ_1+2=2+2=4$. Αυτό που θέλουμε να υπολογίσουμε είναι ο φυσικός αριθμός ν για τον οποίο $α_ν=31$. Θα έχουμε έτσι $α_1+(ν-1)ω=31 \Leftrightarrow 4+(ν-1)3=31 \Leftrightarrow 3ν=30 \Leftrightarrow ν=10$.