ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΗ ΓΕΩΡΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ

ΣΧ. ΕΤΟΣ: 2016 – 17
ΤΑΞΗ: Α΄
ΗΜΕΡ/ΝΙΑ: 15/5/2017

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Α΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ: ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2017
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με την ένδειξη Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος).

i. Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $|\alpha+\beta| = |\alpha| + |\beta|$

ii. Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$

iii. Αν ο ν περιττός, τότε η εξίσωση $x^\nu = \alpha^\nu$ έχει μοναδική λύση, τη $x = \alpha$

iv. Αν $\Delta > 0$, τότε $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x + x_1)(x + x_2)$, όπου x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου.

v. Το πεδίο ορισμού Α της *f* είναι το «ευρύτερο» από τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ στα οποία το $f(x)$ έχει νόημα.

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

Α2. Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ και x_1, x_2 οι λύσεις της.

Να αποδείξετε ότι $x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 15

ΘΕΜΑ Β

Β1. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $4x^2 + 3x - 1$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Β2. Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + 3x(x+1) - 1 \leq 0$

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

Β3. Να λύσετε την εξίσωση $2(x^4 + 1) = \dfrac{1 - 3x^2}{2} + 2$

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{5-|2-x|}}{|x-1|-4}$

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

Γ2. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

Γ3. Να δείξετε ότι $f\left(4\right)=-\sqrt{3}$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $x^2-2|x|+5\sqrt{3}\cdot f\left(4\right)=0$

ΜΟΝΑΔΕΣ 9

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι εξισώσεις:
$x^2-6x+9=0$ (1) και $x^2-\left(x-1\right)\mu^2=x+2$ (2), με άγνωστο το x και $\mu\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να λύσετε την εξίσωση (1) και να δείξετε ότι η εξίσωση (2) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\mu\in\mathbb{R}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

Δ2. Αν η ρίζα της εξίσωσης (1) επαληθεύει και την εξίσωση (2), να βρείτε τις τιμές του μ.

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

Δ3. Αν για τις ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (2) ισχύει $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=-1$, να βρείτε τις τιμές του μ.

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

Εύχομαι επιτυχία!

Ο
Δ/ντης

Ο
Καθηγητής

ΣΥΝΤΟΜΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. **i.** Λ **ii.** Λ **iii.** Σ **iv.** Λ **v.** Σ

Α2. Σελίδα 90 του σχολικού βιβλίου.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για το τριώνυμο $4x^2+3x-1$ έχουμε

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=9+16=25$$

Επομένως

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-3\pm5}{8}$$

$$x_1=-1 \text{ ή } x_2=\frac{1}{4}$$

Τελικά το τριώνυμο παραγοντοποιείται ως εξής

$$4x^2+3x-1=4(x+1)\left(x-\frac{1}{4}\right)$$

Β2. Έχουμε

$$x^2+3x(x+1)-1\le 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 4x^2+3x-1\le 0$$

Με τη βοήθεια του Β1, κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμων

x	$-\infty$		-1		$1/4$		$+\infty$
$4x^2+3x-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Επομένως, οι λύσεις της ανίσωσης είναι

$$x\in\left[-1,\frac{1}{4}\right]$$

Β3. Έχουμε

$$2\left(x^4+1\right)=\frac{1-3x^2}{2}+2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 4x^4+3x^2-1=0$$

Θέτουμε $\omega=x^2$, οπότε

$$4\omega^2+3\omega-1=0 \overset{\text{Β1}}{\Leftrightarrow} \omega_1=-1 \text{ ή } \omega_2=\frac{1}{4}$$

Επομένως

$$x^2=-1 \quad \text{Αδύνατη}$$

ή

$$x^2=\frac{1}{4}\Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{2}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Πρέπει

$$\begin{cases} 5-|2-x|\geq 0 \\ |x-1|-4\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2-x|\leq 5 \\ |x-1|\neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5\leq 2-x\leq 5 \\ x-1\neq \pm 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -7\leq -x\leq 3 \\ x\neq -3 \text{ και } 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\leq x\leq 7 \\ x\neq -3 \text{ και } 5 \end{cases}$$

Επομένως, το πεδίο ορισμού είναι

$$\mathrm{A}=(-3,5)\cup(5,7]$$

Γ2. Για τον $x'x$, λύνουμε

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{5-|2-x|}}{|x-1|-4}=0 \Leftrightarrow \sqrt{5-|2-x|} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow |2-x|=5 \Leftrightarrow 2-x=\pm 5$$

$$x=-3 \ \ (\text{Απορρίπτεται}) \quad \text{ή} \quad x=7$$

Επομένως, το κοινό σημείο με τον $x'x$ είναι το

$$\mathrm{A}(7,0)$$

Για τον $y'y$, υπολογίζουμε το

$$f(0)=\frac{\sqrt{5-|2-0|}}{|0-1|-4}=\frac{\sqrt{5-2}}{1-4}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Επομένως, το κοινό σημείο με τον $y'y$ είναι το

$$\mathrm{B}\left(0,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Γ3. Έχουμε

$$f(4)=\frac{\sqrt{5-|2-4|}}{|4-1|-4}=\frac{\sqrt{5-2}}{3-4}=-\sqrt{3}$$

και

$$x^2-2|x|+5\sqrt{3}\cdot f(4)=0 \Leftrightarrow |x|^2-2|x|-15=0$$

Θέτουμε $\omega=|x|$, οπότε

$$\omega^2-2\omega-15=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \omega_1=-3 \text{ ή } \omega_2=5$$

Επομένως

$$|x|=-3 \quad \text{Αδύνατη}$$

ή

$$|x|=5 \Leftrightarrow x=\pm 5$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε

$$x^2-6x+9=0 \Leftrightarrow (x-3)^2=0 \Leftrightarrow x=3$$

και

$$x^2-(x-1)\mu^2=x+2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x^2-(\mu^2+1)x+\mu^2-2=0$$

Έχουμε

$$\Delta=\left[-(\mu^2+1)\right]^2-4(\mu^2-2)=\ldots=\mu^4-2\mu^2+1+8=(\mu^2-1)^2+8>0$$

Επομένως, η εξίσωση (2) έχει πραγματικές ρίζες.

Δ2. Έχουμε

$$x^2-(x-1)\mu^2=x+2 \overset{x=3}{\Rightarrow} 9-2\mu^2=5 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \mu^2=2 \Leftrightarrow \mu=\pm\sqrt{2}$$

Δ3. Έχουμε

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=-1 \Leftrightarrow \frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}=-1 \Leftrightarrow \frac{-\frac{\beta}{\cancel{\alpha}}}{\frac{\gamma}{\cancel{\alpha}}}=-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mu^2+1}{\mu^2-2}=-1 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \mu^2=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \mu=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$