ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ 2017

ΛΙΒΑΔΕΙΑ 15 ΜΑΪΟΥ 2017

ΤΑΞΗ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

ΖΗΤΗΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις: **Μονάδες 2x5=10**

α) Αν το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, με $\alpha\neq 0$, είναι ομόσημο του α για κάθε πραγματικό αριθμό x, τότε $\Delta>0$.

β) Για κάθε $\alpha\geq 0$ και $\beta\geq 0$ ισχύει $\sqrt{\alpha+\beta}=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$.

γ) Αν $\alpha\neq 0$, τότε ισχύει πάντα $\alpha x>\beta\Leftrightarrow x>\dfrac{\beta}{\alpha}$.

δ) Αν $|\alpha|+|\beta|>0$, τότε $\alpha\neq 0$ ή $\beta\neq 0$.

ε) Ο νιοστός όρος α_ν μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω δίνεται από τον τύπο $\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega$.

Α2. Να αποδείξετε ότι ισχύει $|\alpha\cdot\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|$, για κάθε $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$. **Μονάδες 15**

ΖΗΤΗΜΑ Β

Β1. Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{x+8}{3}-\dfrac{3(x-1)}{2}<4-x$. **Μονάδες 10**

Β2. Να λύσετε την ανίσωση $|x-2|\leq 3$. **Μονάδες 10**

Β3. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις των ερωτημάτων **Β1** και **Β2** και να τις γράψετε σε μορφή διαστήματος.

Μονάδες 5

ΖΗΤΗΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2-4x+a$ και $g(x)=ax-5$, με $a\in\mathbb{R}$.

Γ1. Αν ισχύει $f(2)=g(2)$ να υπολογίσετε την τιμή του $a\in\mathbb{R}$. **Μονάδες 8**

Γ2. Για $a=1$:

α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=g(x)$. **Μονάδες 8**

β) Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$, για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g.

Μονάδες 9

ΖΗΤΗΜΑ Δ

Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=x^2-2\lambda x+\lambda^2-1$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι το τριώνυμο $f(x)$ έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$. **Μονάδες 5**

Δ2. Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου $f(x)$, να υπολογίσετε τον $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $(x_1-1)(x_2-1)\leq -1$. **Μονάδες 5**

Δ3. **α)** Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $f(x)$ για τις διάφορες τιμές του $x\in\mathbb{R}$. **Μονάδες 5**

β) Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $A=f(\lambda-2017)\cdot f(\lambda)\cdot f(\lambda+2017)$.

Μονάδες 5

Δ4. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\sqrt{-f(x)}$. Να υπολογίσετε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε η συνάρτηση g να έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $[1,3]$. **Μονάδες 5**

ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΪΟΣ 2017

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΖΗΤΗΜΑ Α

Α1. α) Λ β) Λ γ) Λ δ) Σ ε) Σ

Α2. $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta| \Leftrightarrow |\alpha \cdot \beta|^2 = (|\alpha| \cdot |\beta|)^2 \Leftrightarrow (\alpha \cdot \beta)^2 = |\alpha|^2 \cdot |\beta|^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\alpha \cdot \beta)^2 = \alpha^2 \cdot \beta^2$ που ισχύει.

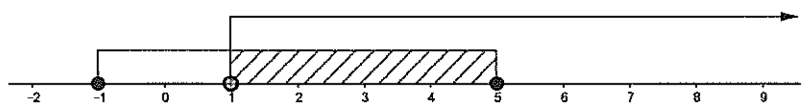
ΖΗΤΗΜΑ Β

Β1. $\frac{x+8}{3} - \frac{3(x-1)}{2} < 4 - x \Leftrightarrow 2(x+8) - 9(x-1) < 6(4-x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x + 16 - 9x + 9 < 24 - 6x \Leftrightarrow -x < -1 \Leftrightarrow x > 1$.

Β2. $|x-2| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x - 2 \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 5$.

Β3.



Άρα $x \in (1, 5]$.

ΖΗΤΗΜΑ Γ

Γ1. $f(2) = g(2) \Leftrightarrow 4 - 8 + a = 2a - 5 \Leftrightarrow -a = -1 \Leftrightarrow a = 1$.

Γ2. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = 3$.

Γ3. Πρέπει $f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 > x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 > 0$

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$		+	0	-	0	+	

Άρα $x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$.

ΖΗΤΗΜΑ Δ

Δ1. $f(x)=x^2-2\lambda x+\lambda^2-1$

$\Delta=(-2\lambda)^2-4\cdot 1(\lambda^2-1)=4\lambda^2-4\lambda^2+4=4>0$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

Άρα το τριώνυμο $f(x)$ έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

Δ2. Έχουμε $x_1+x_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}=2\lambda$ και $x_1\cdot x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}=\lambda^2-1$.

$(x_1-1)(x_2-1)\le -1 \Leftrightarrow x_1\cdot x_2-(x_1+x_2)+2\le 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda^2-1-2\lambda+2\le 0\Leftrightarrow(\lambda-1)^2\le 0$.

Άρα $\lambda=1$

Δ3. **α)** Έχουμε $\Delta=4$, οπότε $x_{1,2}=\dfrac{2\lambda\pm\sqrt{4}}{2\cdot 1}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{2(\lambda+1)}{2}\Rightarrow x_1=\lambda+1\\ x_2=\dfrac{2(\lambda-1)}{2}\Rightarrow x_2=\lambda-1\end{cases}$

Το πρόσημο του τριωνύμου $f(x)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	**-∞**		**λ-1**		**λ+1**		**+∞**
f (x)		**+**	**0**	**-**	**0**	**+**	

β) $\lambda-2017\in(-\infty,\lambda-1)$, οπότε $f(\lambda-2017)>0$,

$\lambda\in(\lambda-1,\lambda+1)$, οπότε $f(\lambda)<0$ και

$\lambda+2017\in(\lambda+1,+\infty)$, οπότε $f(\lambda+2017)>0$

Άρα $A<0$.

Δ4 Πρέπει $-f(x)\ge 0\Leftrightarrow f(x)\le 0\overset{\Delta 3\alpha}{\Leftrightarrow} x\in[\lambda-1,\lambda+1]$.

Επομένως έχουμε $\lambda-1=1$ και $\lambda+1=3\Leftrightarrow\lambda=2$.

Επιμέλεια – λύση:

Νίκος Παπαγγελής