7ο Γενικό Λύκειο Περιστερίου	
ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2014	
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ	
ΤΑΞΗ: Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ	ΤΜΗΜΑ:
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΜΑΘΗΤΗ:	
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 29 / 5 / 2014	
ΕΠΙΤΗΡΗΤΕΣ: …….. ……..	

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου με εξίσωση $x^2 + y^2 = \rho^2$ $(\rho > 0)$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.

Μονάδες 10

Β. Τι ονομάζουμε έλλειψη;

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα αναφοράς σας τη λέξη "**Σωστό**" αν η πρόταση είναι σωστή και "**Λάθος**" αν η πρόταση είναι λανθασμένη, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε μία από τις προτάσεις: ***Γ1, Γ2, Γ3, Γ4*** και ***Γ5***.

Γ1. Η ευθεία με εξίσωση $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ εκφράζει όλες τις ευθείες που περνούν από το σημείο (x_0, y_0).

Γ2. Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$, όπου Α, Β, Γ $\in \mathbb{R}$, εκφράζει πάντα ευθεία όταν $|A| + |B| \neq 0$.

Γ3. Η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ με Α, Β, Γ$\in \mathbb{R}$ παριστάνει πάντα κύκλο.

Γ4. Αν για τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ έχουμε ότι $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$, τότε ισχύει πάντα ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$.

Γ5. Αν για τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ έχουμε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$, ισχύει πάντα ότι $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται το διάνυσμα u με $|\vec{u}| = 4$ και ότι η γωνία των $\vec{u}, \vec{AB}$ είναι 60°, όπου Α(2, –4), Β(–2, –1).

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΑΒ.

Μονάδες 6

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Κ, που είναι το σημείο τομής του ΑΒ και της κάθετης ευθείας στην ΑΒ που διέρχεται από το σημείο Ο.

Μονάδες 6

γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες της προβολής του $\vec{u}$ πάνω στο $\vec{AB}$.

Μονάδες 7

δ) Να βρείτε τη γωνία των $\vec{OA}, \vec{OB}$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ο κύκλος C_1 με κέντρο το σημείο Ε(3, 0) και ακτίνα 1. Έστω επίσης η έλλειψη C_2 με εστίες Ε, Ε΄(–3, 0) και μήκος μεγάλου άξονα 10.

Α. α) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης C_2 και τις συντεταγμένες των κορυφών της.

Μονάδες 8

β) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων την έλλειψη C_2 και τον κύκλο C_1 και χρησιμοποιώντας το σχήμα να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη απόσταση ανάμεσα στις δύο καμπύλες.

Μονάδες 8

Β. Έστω ε_1, ε_2 οι εφαπτομένες του κύκλου C_1 που διέρχονται από το Ε΄.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών ε_1, ε_2.

Μονάδες 6

β) Αν Κ είναι ένα από τα τέσσερα σημεία τομής των εφαπτομένων ε_1, ε_2 με την έλλειψη C_2, να υπολογίσετε το άθροισμα ΚΕ + ΚΕ΄.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται οι εξισώσεις (ε_λ) $(2\lambda+5)x+(3\lambda+5)y-5=0, \lambda\in\mathbb{R}$.

Α. α) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις (ε_λ) εκφράζουν ευθεία για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ και διέρχονται από σταθερό σημείο Α, του οποίου να υπολογίσετε τις συντεταγμένες.

Μονάδες 6

β) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζονται από τις ευθείες με εξισώσεις (ε_λ) για $\lambda = 0$ ή $\lambda = -1$ είναι οι

$$\left(\sqrt{13}-3\sqrt{2}\right)x+\left(\sqrt{13}-2\sqrt{2}\right)y-\sqrt{13}+5\sqrt{2}=0 \text{ ή}$$

$$\left(\sqrt{13}+3\sqrt{2}\right)x+\left(\sqrt{13}+2\sqrt{2}\right)y-\sqrt{13}-5\sqrt{2}=0$$

Μονάδες 7

Β. Έστω επιπλέον η παραβολή που έχει διευθετούσα την ευθεία (ε_λ) που είναι παράλληλη στον άξονα y΄y, κορυφή το (0, 0) και άξονα συμμετρίας τον άξονα x΄x.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της παραβολής είναι $y^2=-12x$.

Μονάδες 6

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που διέρχεται από το σημείο Κ(–3, 6).

Μονάδες 6

Καλή Επιτυχία

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

Ψύχαλος Γεώργιος

ΟΙ ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ

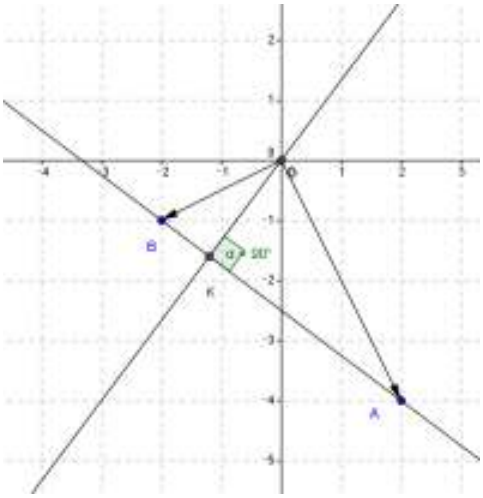
Παπαβλάχος Ευστάθιος

Πρωτοπαπάς Ελευθέριος

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2013 – 2014
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Α. Σχολικό βιβλίο σελίδα 83.
Β. Σχολικό βιβλίο σελίδα 100, 101.
Γ. Γ1. Λ **Γ2.** Σ, **Γ3.** Λ, **Γ4.** Λ, **Γ5.** Λ.

ΘΕΜΑ 2ο



α) $\lambda_{AB} = \dfrac{-4-(-1)}{2-(-2)} = -\dfrac{3}{4}$, οπότε η ευθεία ΑΒ έχει εξίσωση

$y-(-4) = -\dfrac{3}{4}(x-2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x + 4y = -10.$

β) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που είναι κάθετη στην ΑΒ είναι $\lambda = \dfrac{4}{3}$ και αφού η ευθεία διέρχεται από το (0, 0) έχει εξίσωση $y = \dfrac{4}{3}x$.

Οι συντεταγμένες του σημείου Κ προσδιορίζονται από τη λύση του συστήματος

$$\begin{cases} 3x+4y=-10 \\ y=\dfrac{4}{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+\dfrac{16}{3}x=-10 \\ y=\dfrac{4}{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{6}{5} \\ y=-\dfrac{8}{5} \end{cases}, \text{ δηλαδή } K\left(-\dfrac{6}{5},-\dfrac{8}{5}\right).$$

γ) Έχουμε ότι: $\overrightarrow{AB} = (-2-2, -1-(-4)) = (-4,3)$ με $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-4)^2+3^2} = 5$.

Επίσης ισχύει: $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB} = \left|\vec{u}\right|\left|\overrightarrow{AB}\right| \text{συν}\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AB}}\right) = 4\cdot 5\cdot\dfrac{1}{2} = 10$.

Έστω ότι $\text{προβ}_{\overrightarrow{AB}}\vec{u} = \lambda\overrightarrow{AB}, \lambda\in\mathbb{R}$.

Αφού $\text{προβ}_{\overrightarrow{AB}}\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB} = \vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}$, έχουμε ότι $\lambda\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = \vec{u}\cdot\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \lambda\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}$,

οπότε $\lambda\cdot 5^2 = 10 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{2}{5}$.

Συνεπώς $\text{προβ}_{\overrightarrow{AB}}\vec{u} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB} = \dfrac{2}{5}(-4,3) = \left(-\dfrac{8}{5},\dfrac{6}{5}\right)$.

δ) Έχουμε ότι: $\overrightarrow{OA} = (2,-4)$ και $\overrightarrow{OB} = (-2,-1)$,

οπότε $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(2,-4)\cdot(-2,-1)=-4+4=0$,

δηλαδή η γωνία των $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ είναι 90°.

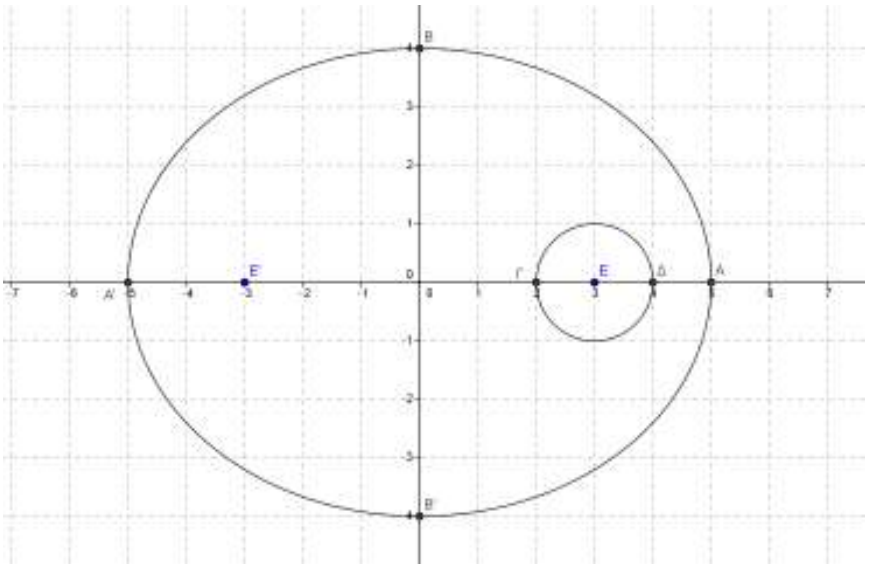
ΘΕΜΑ 3ο

Α. α) Έχουμε ότι γ = 3 και 2α = 10 ⇔ α = 5, οπότε $\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$.

Αφού οι εστίες της έλλειψης βρίσκονται πάνω στον άξονα x΄x και είναι συμμετρικές ως προς το (0, 0), η εξίσωση της έλλειψης έχει μορφή $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, δηλαδή έχει εξίσωση $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

Οι κορυφές του μεγάλου άξονα είναι Α(5, 0) και Α΄(–5, 0), ενώ οι κορυφές του μικρού άξονα είναι Β(4, 0) και Β΄(–4, 0).

β) Ο κύκλος C_1 έχει εξίσωση $(x-3)^2+y^2=1$.



Η ελάχιστη απόσταση ανάμεσα στις δύο καμπύλες δίνεται από το μήκος του τμήματος ΑΔ που είναι 1, ενώ η μέγιστη απόσταση από το μήκος του τμήματος ΔΑ΄ που είναι 9.

Β. Έστω Μ(α, β) το σημείο του κύκλου που είναι το σημείο επαφής της ζητούμενης εφαπτομένης με τον κύκλο, οπότε ισχύουν οι σχέσεις:

$(\alpha-3)^2+\beta^2=1$ **(Ι)** και $\overrightarrow{ME}\perp\overrightarrow{ME'}$.

Συνεπώς:

$\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{ME'}=0$ ⇔ $(3-\alpha,0-\beta)\cdot(-3-\alpha,0-\beta)=0$ ⇔ $\alpha^2-9+\beta^2=0$ ⇔

⇔ $\beta^2=9-\alpha^2$ **(ΙΙ)**

Από την (Ι) προκύπτει:

$(\alpha-3)^2+9-\alpha^2=1$ ⇔ $-6\alpha+9+9=1$ ⇔ $\alpha=\frac{17}{6}$,

άρα $\beta^2=9-\frac{289}{36}=\frac{35}{36}$ ⇔ $\beta=\pm\frac{\sqrt{35}}{6}$.

Συνεπώς $M_1\left(\frac{17}{6},\frac{\sqrt{35}}{6}\right)$ ή $M_2\left(\frac{17}{6},-\frac{\sqrt{35}}{6}\right)$.

- Αν $\Lambda_1(x,y)$ είναι σημείο της εφαπτομένης του κύκλου στο M_1, έχουμε:

$$\overrightarrow{M_1E} \perp \overrightarrow{\Lambda M_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1E}\cdot\overrightarrow{M_1\Lambda} = 0 \Leftrightarrow \left(3-\frac{17}{6}, 0-\frac{\sqrt{35}}{6}\right)\cdot\left(x-\frac{17}{6}, y-\frac{\sqrt{35}}{6}\right) = 0$$

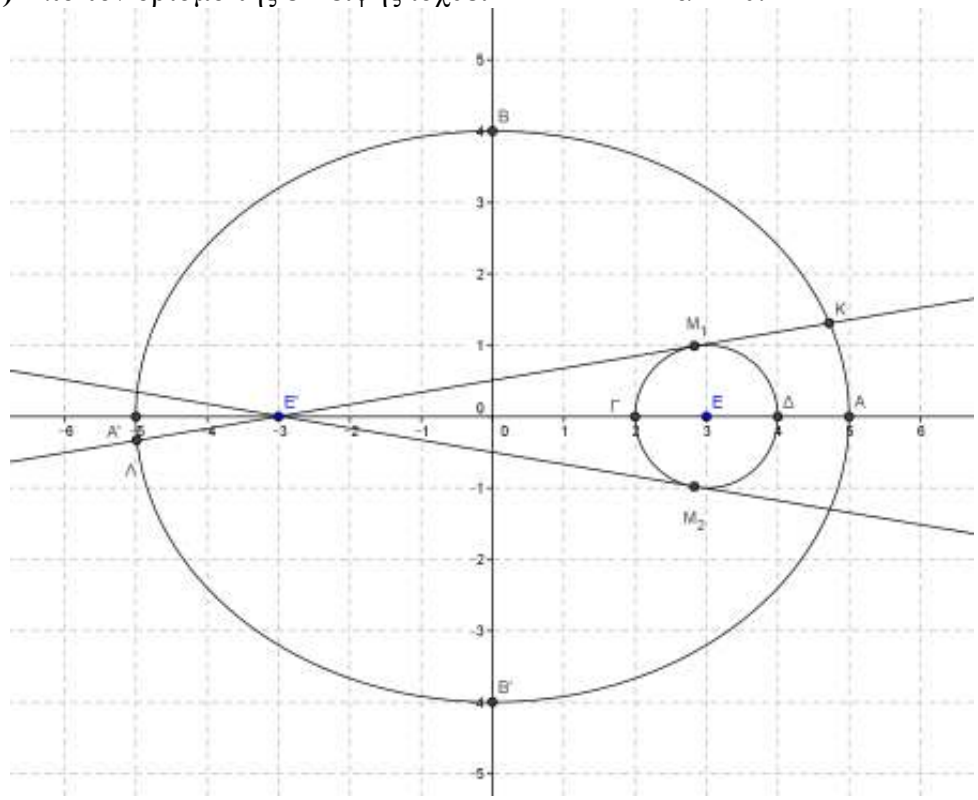
$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}x - \frac{17}{36} - \frac{\sqrt{35}}{6}y + \frac{35}{36} = 0 \Leftrightarrow x - \sqrt{35}y + 3 = 0.$$

- Αν $\Lambda_2(x,y)$ είναι σημείο της εφαπτομένης του κύκλου στο M_2, έχουμε:

$$\overrightarrow{M_2E} \perp \overrightarrow{\Lambda M_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_2E}\cdot\overrightarrow{M_2\Lambda} = 0 \Leftrightarrow \left(3-\frac{17}{6}, 0+\frac{\sqrt{35}}{6}\right)\cdot\left(x-\frac{17}{6}, y+\frac{\sqrt{35}}{6}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}x - \frac{17}{36} + \frac{\sqrt{35}}{6}y + \frac{35}{36} = 0 \Leftrightarrow x + \sqrt{35}y + 3 = 0.$$

β) Από τον ορισμό της έλλειψης ισχύει ΚΕ + ΚΕ΄ = 2α = 10.



ΘΕΜΑ 4ο

Α. α) Για $\lambda \neq -\frac{5}{2}$ οι εξισώσεις (ε_λ) παριστάνουν ευθείες.

Για $\lambda = -\frac{5}{2}$ έχουμε ότι $\left(\varepsilon_{-\frac{5}{2}}\right)$: $0x + \left(-\frac{5}{2}\right)y - 5 = 0$, η οποία είναι εξίσωση ευθείας, οπότε για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ οι εξισώσεις (ε_λ) παριστάνουν ευθείες.

Για $\lambda = 0$ έχουμε (ε_0): $5x + 5y - 5 = 0$, ενώ

για $\lambda = -1$ έχουμε (ε_{-1}): $3x + 2y - 5 = 0$.

Τότε:

$$\begin{cases} 5x + 5y - 5 = 0 \\ 3x + 2y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ 3x + 2(1-x) - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 3 = -2 \\ x = 3 \end{cases},$$

δηλαδή «υποψήφιο» σταθερό σημείο είναι το Α(3, –2).
Επαληθεύουμε στις εξισώσεις (ε_λ).
$(2\lambda+5)\cdot 3+(3\lambda+5)(-2)-5=6\lambda+15-6\lambda-10-5=0$,
οπότε οι ευθείες με εξισώσεις διέρχονται από το σημείο Α(3, –2).

β) Έστω Μ(x, y) σημείο των διχοτόμων, οπότε ισχύει:

$$d(M,\varepsilon_0)=d(M,\varepsilon_{-1}) \Leftrightarrow \frac{|x+y-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|3x+2y-5|}{\sqrt{3^2+2^2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{13}(x+y-1)=\sqrt{2}(3x+2y-5) \text{ ή } \sqrt{13}(x+y-1)=-\sqrt{2}(3x+2y-5) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{13}-3\sqrt{2}\right)x+\left(\sqrt{13}-2\sqrt{2}\right)y-\sqrt{13}+5\sqrt{2}=0 \text{ ή}$$

$$\left(\sqrt{13}+3\sqrt{2}\right)x+\left(\sqrt{13}+2\sqrt{2}\right)y-\sqrt{13}-5\sqrt{2}=0.$$

Β. α) Για $\lambda=-\frac{5}{3}$ έχουμε ότι $\left(\varepsilon_{-\frac{5}{3}}\right)$: $\left(-\frac{10}{3}+5\right)x-5=0 \Leftrightarrow x=3$, είναι η εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη στον άξονα y΄y.
Αφού η παραβολή που έχει διευθετούσα την ευθεία (ε_λ) που είναι παράλληλη στον άξονα y΄y, κορυφή το (0, 0) και άξονα συμμετρίας τον άξονα x΄x, έχει τη μορφή $y^2=2px$ με διευθετούσα την ευθεία με εξίσωση $x=-\frac{p}{2}$.

Συνεπώς $-\frac{p}{2}=3 \Leftrightarrow p=-6$ και η εξίσωση της παραβολής είναι $y^2=-12x$.

β) Το Κ(–3, 6) είναι σημείο της παραβολής αφού $6^2=-12(-3)$, και κατά συνέπεια η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση:
$y\cdot 6=-6(x-3) \Leftrightarrow y=-x+3$.