ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ ΣΤΗΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Τα θέματα ΔΕΝ θα μεταφερθούν στο καθαρό.

Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα. Οι απαντήσεις να γραφούν στο καθαρό

ΘΕΜΑ 1^o

Στο γραπτό σας να γράψετε τον αριθμό της πρότασης και δίπλα τη λέξη ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ, αν είναι σωστή ή λάθος αντίστοιχα.

Α1. Μία ευθεία και ένας κύκλος έχουν τουλάχιστον δύο κοινά σημεία. Μορ.2

Α2. Το τετράπλευρο στο οποίο οι διαγώνιες είναι ίσες και διχοτομούνται είναι ορθογώνιο. Μορ.2

Α3. Η διάμεσος ενός ορθογωνίου τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ισούται με το μισό της υποτείνουσας. Μορ.2

Στο γραπτό σας να γράψετε τον αριθμό της πρότασης και τις λέξεις ή σχέσεις πού συμπληρώνουν τα κενά στην παρακάτω πρόταση.

Α4. Η διάμεσος τραπεζίου είναι …………………… στις βάσεις του τραπεζίου και ισούται με το ………………… των βάσεων. Μορ.2

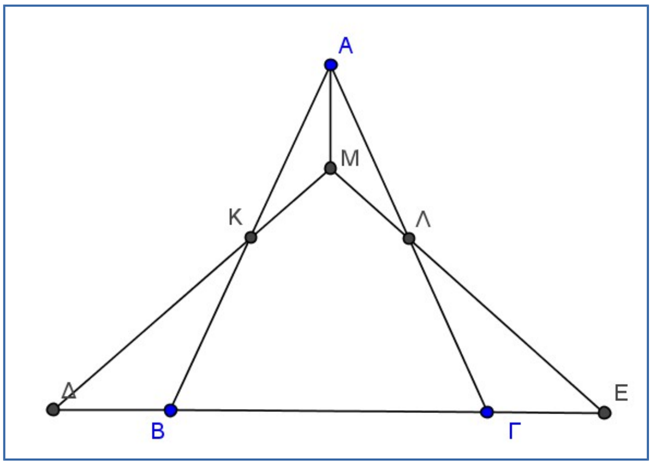
Στο γραπτό σας να γράψετε τον αριθμό της πρότασης και το γράμμα της επιλογής που είναι κατά τη γνώμη σας σωστή.

Α5. Θεωρούμε δύο κύκλους (Κ, R) και (Λ, ρ) και R> ρ και τη διάκεντρο δ αυτών. Αν οι κύκλοι έχουν ένα κοινό σημείο και ο κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται στο εσωτερικό του (Κ, R) τότε:

Α. δ >R – ρ   Β. δ <R - ρ   Γ. δ = R–ρ   Δ. δ > R + ρ   Μορ.2

Β. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στην βάση του είναι διχοτόμος και ύψος. Μορ.15

ΘΕΜΑ 2^o



Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) προεκτείνουμε την βάση ΒΓ προς το μέρος των Β και Γ και παίρνουμε αντίστοιχα ίσα τμήματα ΒΔ = ΓΕ . Αν Κ, Λ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα και Μ η τομή των ΔΚ και ΕΛ, να αποδείξετε ότι:

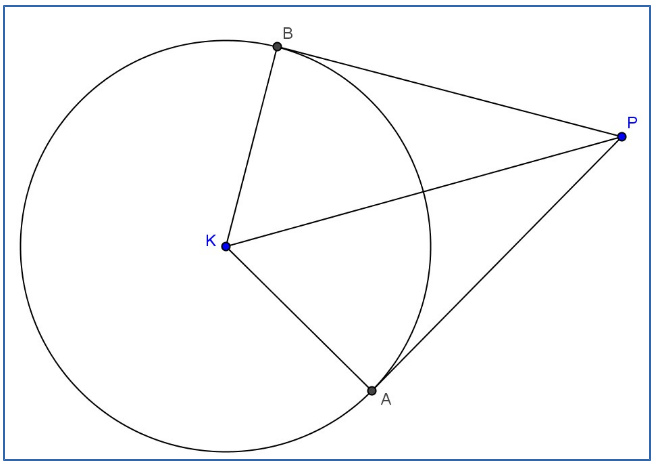
α) ΔΚ = ΕΛ Μορ.9

β) Το τρίγωνο ΔΜΕ είναι ισοσκελές. Μορ. 6

γ) Η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$.

Μορ. 10

ΘΕΜΑ 3^o



Στο διπλανό σχήμα τα τμήματα ΡΑ και ΡΒ είναι εφαπτόμενα στον κύκλο (Κ, ρ) και ισχύει

$A\hat{K}B = 2A\hat{P}B$

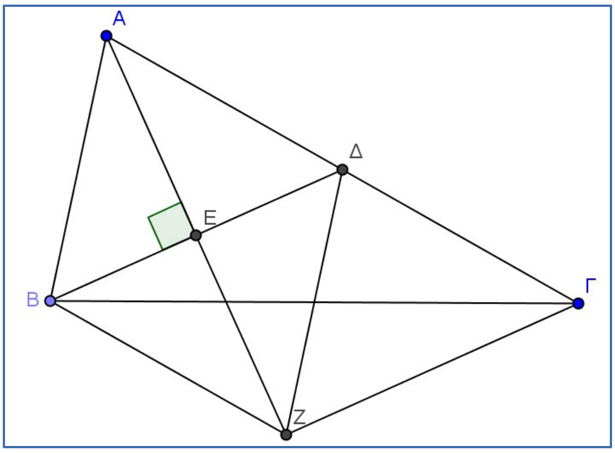
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΚΒΡ. Μορ.9

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΡΑΚ Μορ. 8

γ) Αν η ΡΚ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Μ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΜΚ είναι ισόπλευρο Μορ. 8

ΘΕΜΑ 4^o

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο ΑΓ = 2ΑΒ.
Από την κορυφή Β φέρνουμε ΒΕ κάθετη στην διχοτόμο της γωνίας $\widehat{A}$ η οποία τέμνει την ΑΓ στο Δ.
Από το Γ φέρνουμε την παράλληλη προς την ΒΔ η οποία τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας $\widehat{A}$ στο Ζ.



α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές. Μορ. 6
β) Το Ε είναι μέσο του ΑΖ. Μορ. 8
γ) Το τετράπλευρο ΑΒΖΔ είναι ρόμβος. Μορ. 6
δ) Το τετράπλευρο ΒΔΓΖ είναι παραλληλόγραμμο. Μορ. 5

Απαντήσεις

Θέμα 1ο

Α1. Λάθος (έχουν το πολύ δυο κοινά σημεία, Θεώρημα Ι σελ.67)

Α2. Σωστό (αφού οι διαγώνιοι διχοτομούνται είναι παραλληλόγραμμο και αφού είναι και ίσες είναι ορθογώνιο)

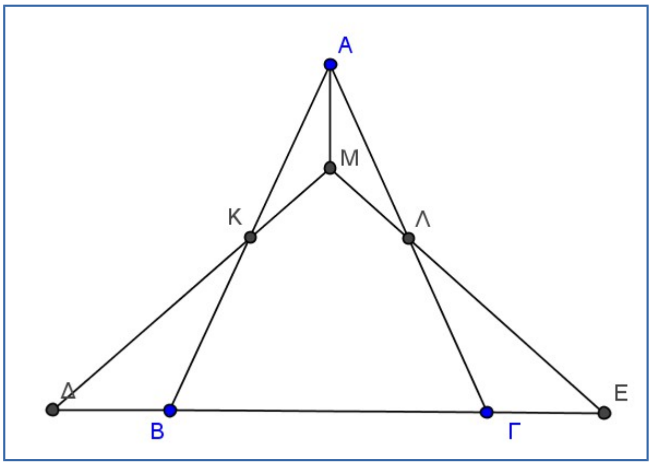
Α3. Σωστό (Θεώρημα Ι σελ. 114)

Α4. Η διάμεσος τραπεζίου είναι παράλληλη στις βάσεις του τραπεζίου και ισούται με το ημιάθροισμα των βάσεων

Α5. Οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά, άρα σωστό είναι το Γ.

Β. Πόρισμα Ι σελ.45

Θέμα 2ο



Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με κορυφή το Α, άρα ΑΒ = ΑΓ, $A\hat{B}\Gamma = A\hat{\Gamma}B$

και αφού Κ, Λ είναι τα μέσα των ίσων πλευρών τότε ΑΚ = ΚΒ = ΑΛ = ΛΓ. Επίσης γνωρίζουμε ότι ΔΒ = ΓΕ

α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΔΚΒ και ΓΛΕ

- ΚΒ = ΛΓ (δεδομένα)
- $\Delta\hat{B}K = E\hat{\Gamma}\Lambda$ (ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $A\hat{B}\Gamma,\ A\hat{\Gamma}B$)
- ΒΔ = ΓΕ

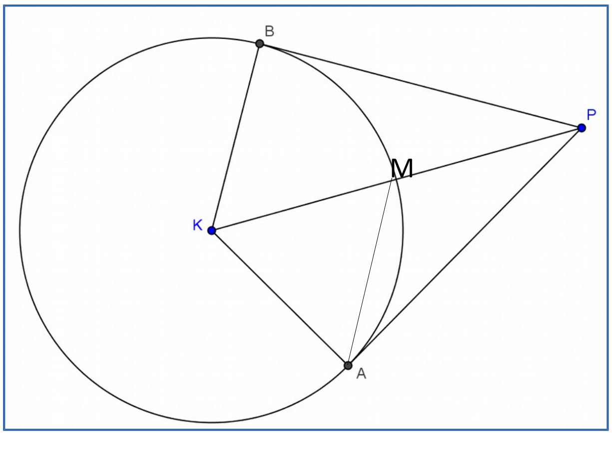
Άρα από κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΔΚΒ και ΓΛΕ είναι ίσα και επομένως ΚΔ = ΛΕ

β) Από την ισότητα των παραπάνω τριγώνων προκύπτει ότι $\hat{\Delta} = \hat{\mathrm{E}}$, άρα το τρίγωνο ΔΜΕ είναι ισοσκελές και επομένως ΔΜ = ΕΜ.

γ) Από το πρώτο ερώτημα ξέρουμε ότι ΚΔ = ΛΕ, από το δεύτερο ερώτημα ξέρουμε ότι ΔΜ = ΕΜ, επομένως ΜΚ = ΜΛ ως διαφορές ίσων τμημάτων .

Τα τρίγωνα ΑΜΚ και ΑΜΛ είναι ίσα γιατί έχουν ΑΜ κοινή πλευρά, ΑΚ = ΑΛ και ΜΚ = ΜΛ (κριτήριο ΠΠΠ), άρα θα είναι $\mathrm{K}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{M} = \Lambda\hat{\mathrm{A}}\mathrm{M}$ δηλαδή η ΑΜ χωρίζει τη γωνία Α σε δυο ίσες γωνίες, επομένως η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας Α.

Θέμα 3ο



α) Τα τμήματα ΡΑ και ΡΒ είναι εφαπτόμενα στον κύκλο και οι ακτίνες ΚΑ και ΚΒ είναι κάθετες σε αυτά άρα Α = Β = 90^0

Το άθροισμα των γωνιών του τετραπλεύρου είναι 360^0

Άρα

$$\hat{\mathrm{A}} + \hat{\mathrm{B}} + A\hat{K}B + A\hat{P}B = 360^0 \Rightarrow A\hat{K}B + A\hat{P}B = 180^0$$

Και αφού $A\hat{K}B = 2A\hat{P}B$ θα ισχύει :

$$2A\hat{P}B + A\hat{P}B = 180^0 \Leftrightarrow 3A\hat{P}B = 180^0 \Leftrightarrow A\hat{P}B = 60^0$$

Άρα $A\hat{K}B = 120^0$

β) Η διακεντρική ευθεία ΡΚ διχοτομεί τις γωνίες $A\hat{K}B,\ A\hat{P}B$

επομένως το τρίγωνο ΑΡΚ έχει γωνίες Κ = 60^0, Ρ = 30^0 και Α = 90^0

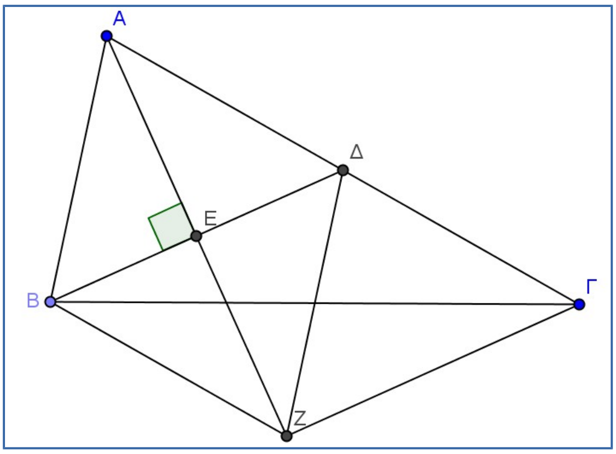
γ) Το τρίγωνο ΑΚΜ είναι ισοσκελές αφού ΚΜ = ΚΑ (ως ακτίνες του κύκλου) άρα $\hat{M} = \hat{A}$ και $\hat{K} = 60^0$ τότε

$$\hat{M} + \hat{A} = 120^0 \Rightarrow 2\hat{M} = 120^0 \Rightarrow \hat{M} = 60^0$$

Άρα $\hat{K} = \hat{A} = \hat{M} = 60^0$ δηλαδή το τρίγωνο ΚΑΜ είναι ισόπλευρο .

Θέμα 4ο

α) Το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ισοσκελές γιατί η ΑΕ είναι διχοτόμος και ύψος, άρα ΑΒ = ΑΔ και Ε είναι μέσο της ΒΔ.



β) Γνωρίζουμε ότι ΑΓ = 2ΑΒ και ΑΒ = ΑΔ άρα ΑΓ = 2ΑΔ, δηλαδή το Δ είναι μέσο της πλευράς ΑΓ.
Στο τρίγωνο ΑΖΓ από υπόθεση γνωρίζουμε ότι ΔΕ//ΖΓ (ΖΓ//ΒΔ από υπόθεση) και Δ είναι μέσο της ΑΓ, άρα και το Ζ είναι μέσο της ΑΔ.

γ) Το σημείο Ε είναι μέσο του ΑΖ και του ΒΔ άρα το τετράπλευρο ΑΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο γιατί οι διαγώνιοι του διχοτομούνται , επίσης είναι και κάθετες , άρα τελικά είναι ρόμβος.

δ) Από τον ρόμβο έχουμε ότι ΒΖ//= ΑΔ και γνωρίζουμε ότι ΑΔ = ΔΓ, άρα ΒΖ//=ΔΓ.
Επομένως το τετράπλευρο ΒΔΖΓ είναι παραλληλόγραμμο.