ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ
ΜΑΙΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α΄ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

26/5/2017

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση. **ΜΟΝΑΔΕΣ 10**

α. Δύο ορθογώνια τρίγωνα με ίσες υποτείνουσες είναι πάντοτε ίσα.

β. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διάμεσος του είναι διχοτόμος και ύψος.

γ. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\hat{A} = \hat{B} + \hat{\Gamma}$ τότε αυτό είναι ορθογώνιο.

δ. Τα μέσα των πλευρών τετραπλεύρου που έχει κάθετες διαγώνιες είναι πάντοτε κορυφές ρόμβου.

ε. Σε κάθε ισοσκελές τραπέζιο οι γωνίες που πρόσκεινται στις βάσεις του είναι ίσες.

Α2. Να αποδείξετε ότι: Αν ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο τότε οι διαγώνιοι του διχοτομούνται και αντιστρόφως, αν σε ένα τετράπλευρο οι διαγώνιοι του διχοτομούνται τότε αυτό είναι παραλληλόγραμμο. **ΜΟΝΑΔΕΣ 15**

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$. Στις προεκτάσεις της πλευράς ΒΓ από τα σημεία Β και Γ, παίρνουμε αντίστοιχα τα ίσα τμήματα ΒΔ και ΓΕ. Φέρουμε επίσης ΒΚ κάθετη στην ΑΔ και ΓΛ κάθετη στην ΑΕ. Να αποδείξετε ότι:

Β1. ΑΔ = ΑΕ **ΜΟΝΑΔΕΣ 7**

Β2. Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΑΛΓ είναι ίσα. **ΜΟΝΑΔΕΣ 8**

Β3. Αν οι ευθείες ΚΒ και ΓΛ τέμνονται στο σημείο Μ, τότε η ΑΜ είναι μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος ΚΛ **ΜΟΝΑΔΕΣ 10**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) με γωνία $\hat{B} = 30^o$. Φέρνουμε την διχοτόμο ΒΔ της γωνίας Β και από την κορυφή Α την κάθετη στην διχοτόμο ΒΔ που τέμνει την υποτείνουσα ΒΓ στο σημείο Ε. Αν Μ είναι το μέσο της διχοτόμου ΒΔ, να αποδείξτε ότι:

$Γ_1$. ΔΑ = ΔΕ **ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

$Γ_2$ Το τρίγωνο ΑΜΕ είναι ισοσκελές. **ΜΟΝΑΔΕΣ 8**

$Γ_3$ ΜΔ = ΑΕ **ΜΟΝΑΔΕΣ 12**

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και τυχαίο σημείο Ε της πλευράς του ΒΓ. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τετραγώνου ένα δεύτερο τετράγωνο ΒΕΖΗ. Το τμήμα ΗΕ προεκτεινόμενο τέμνει την ΓΔ στο σημείο Θ. Από τη κορυφή Γ φέρνουμε παράλληλη προς την ΘΗ που τέμνει την ΖΗ στο σημείο Μ. Να αποδείξετε ότι:

$Δ_1$ Το τετράπλευρο ΘΓΜΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο. **ΜΟΝΑΔΕΣ 8**

$Δ_2$. ΑΘ = ΘΜ **ΜΟΝΑΔΕΣ 9**

$Δ_3$ Η γωνία ΑΘΜ είναι ορθή. **ΜΟΝΑΔΕΣ 8**

Ευχόμαστε Επιτυχία

Ο διευθυντής **Οι εισηγητές**

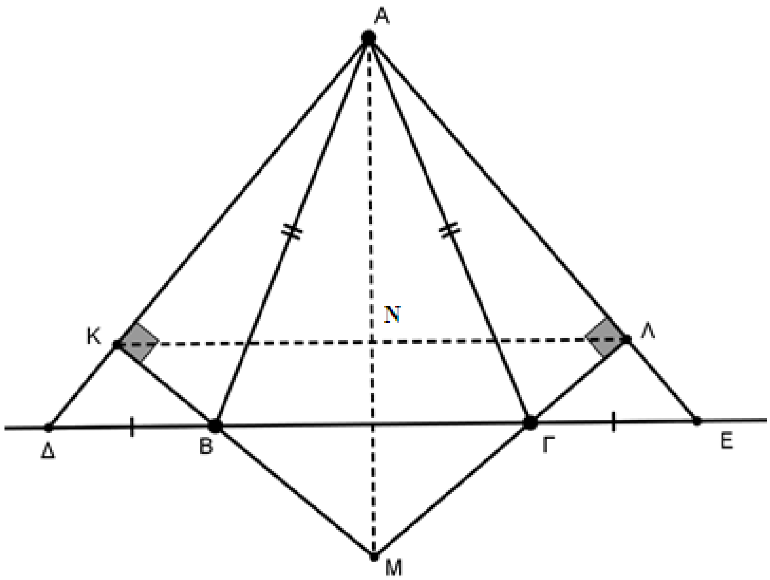
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ ΠΡΩΤΟ

A_1 Λ – Λ – Σ – Λ – Σ

Α2 θεωρία

ΘΕΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟ



B_1. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν:

- $ΑΒ = ΑΓ$ (υπόθεση)
- $ΒΔ = ΓΕ$ (υπόθεση)
- $Α\hat{Β}Δ = Α\hat{Γ}Ε$ (ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\hat{Β}$, $\hat{Γ}$)

Άρα είναι ίσα, τότε ΑΔ = ΑΕ

B_2. Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΑΛΓ έχουν:

- είναι ορθογώνια ($\hat{Κ} = \hat{Λ} = 90^0$)
- ΑΒ = ΑΓ (υπόθεση)
- $Κ\hat{Α}Β = Γ\hat{Α}Λ$ (αφού από το ερώτημα Β1 είναι $Δ\hat{Α}Β = Γ\hat{Α}Ε$)

B_3. Το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισοσκελές αφού

$$Μ\hat{Β}Γ = 180^o - Α\hat{Β}Κ - \hat{Β} \overset{(1)}{=} 180^o - Α\hat{Γ}Λ - \hat{Γ} = Β\hat{Γ}Μ$$

Επομένως ΒΜ = ΜΓ και επειδή είναι ΚΒ = ΛΓ έχουμε

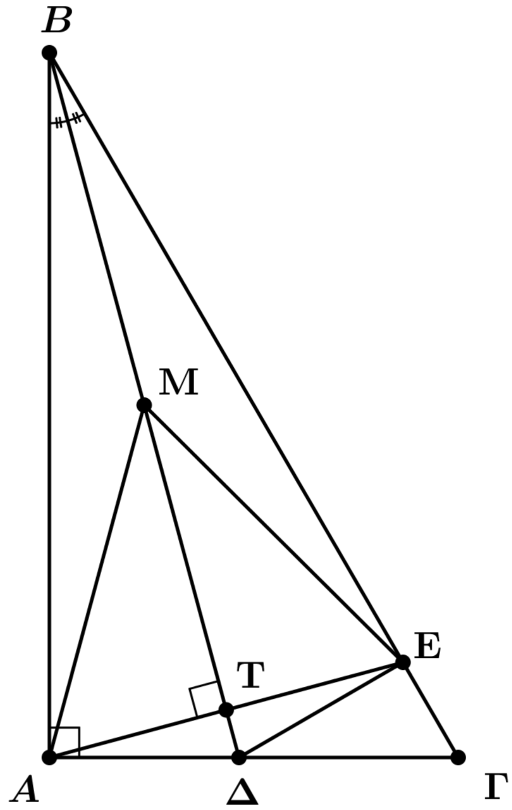
$$ΚΜ = ΚΒ + ΒΜ = ΛΓ + ΓΜ = ΛΜ$$

Επιπλέον από την ισότητα των τριγώνων ΑΚΒ και ΑΛΓ έχουμε ΑΚ = ΑΛ

Δηλαδή τα σημεία Α και Μ ισαπέχουν από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος ΚΛ, άρα η ΑΜ είναι μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος ΚΛ

ΘΕΜΑ ΤΡΙΤΟ

Γ1 . Ονομάζουμε Τ το σημείο τομής της ΑΕ με την ΒΔ. Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές αφού η ΒΤ είναι διχοτόμος ύψος του, άρα είναι ΑΒ = ΑΕ.



Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΔΕ έχουν

ΑΒ = ΑΕ

ΒΔ κοινή πλευρά

$A\hat{B}\Delta = \Delta\hat{B}E$ αφού η ΒΔ είναι διχοτόμος της Β

Άρα είναι ίσα, τότε ΑΔ = ΔΕ.

Γ2 Τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΒΜΕ είναι ίσα αφού έχουν

ΑΒ = ΒΕ από την ισότητα των τριγώνων στο α ερώτημα

ΒΜ = ΒΜ κοινή πλευρά

$A\hat{B}M = M\hat{B}E = \frac{\hat{B}}{2}$

Άρα ΑΜ = ΜΕ, δηλαδή το τρίγωνο ΑΜΕ είναι ισοσκελές.

Γ3 Από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΜΕ έχουμε ότι

$$AE = 2AT \quad (1)$$

Επιπλέον αφού η γωνία Β είναι 30^o και η ΒΔ είναι διχοτόμος της Β τότε ΑΒΜ = 15^o. Αφού η ΑΜ είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΒΑΔ είναι

$$AM = \frac{B\Delta}{2} = BM$$

άρα το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισοσκελές, τότε θα είναι

ΒΜΑ = 15^o και

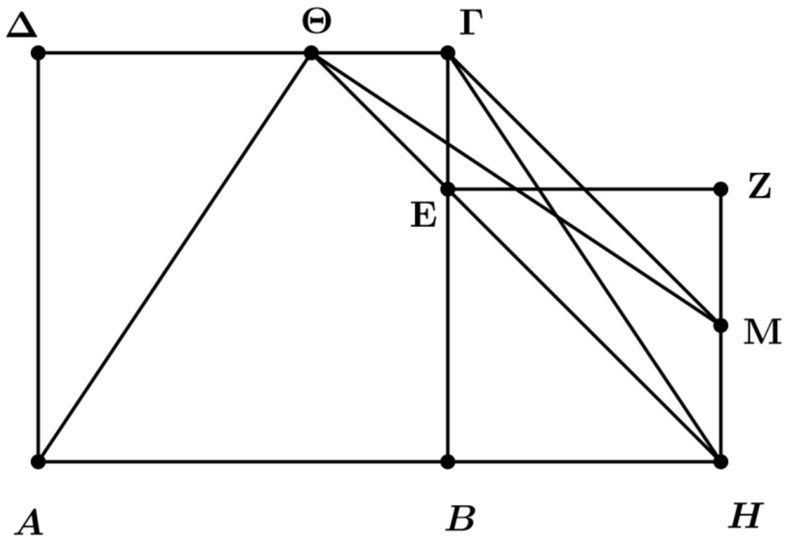
ΑΜΔ = 30^o (ως εξωτερική γωνία του τριγ. ΑΜΒ)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΜΤ η γωνία ΑΜΔ = 30^o, άρα

$$AT = \frac{AM}{2} \Rightarrow AM = 2AT \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι ΑΜ = ΑΕ

ΘΕΜΑ ΤΕΤΑΡΤΟ

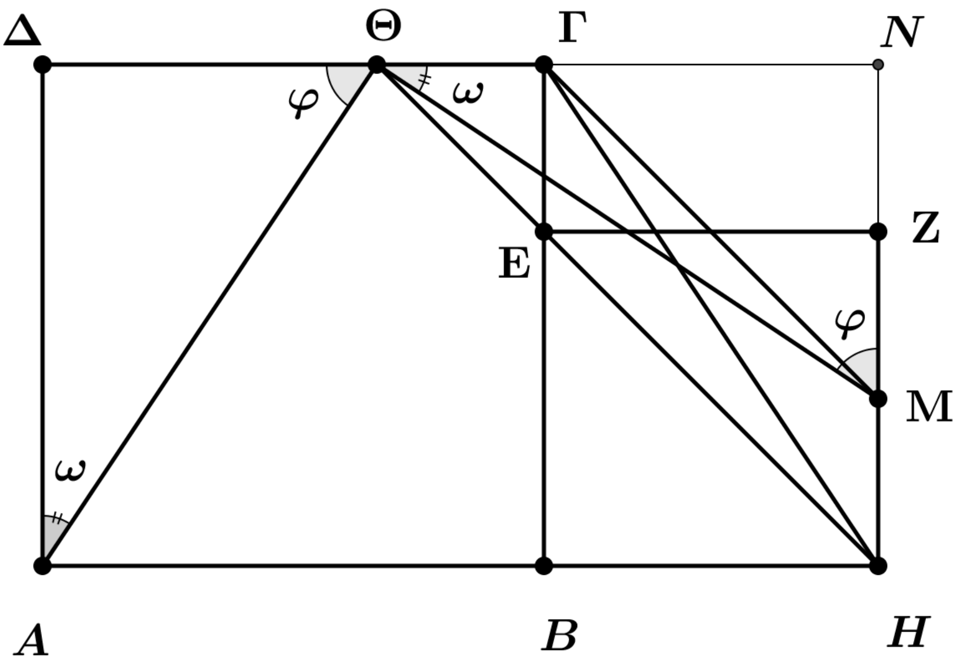


Δ₁. Είναι ΓΜ//ΘΗ από υπόθεση και ΓΕ //ΜΗ αφού το ΕΖΗΒ είναι τετράγωνο, επομένως το τετράπλευρο ΓΜΗΕ είναι παραλληλόγραμμο.

Επιπλέον η γωνία ΒΕΗ είναι 45^o και είναι ίση με την κατακορυφή της ΘΕΓ. Από το ορθογώνιο ΘΓΕ έχουμε ότι και η γωνία ΕΘΓ είναι 45^o, άρα το τρίγωνο ΘΓΕ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές οπότε ΘΓ = ΓΕ = ΜΗ, άρα το τετράπλευρο ΓΜΗΘ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Δ₂. Τα τρίγωνα ΑΔΘ και ΓΒΗ είναι ορθογώνια, έχουν ΑΔ = ΒΓ (πλευρές τετραγώνου) και ΔΘ = ΒΗ (=ΕΒ ως διαφορές ίσων ευθυγράμμων τμημάτων), άρα είναι ίσα τότε ΑΘ = ΓΗ = ΘΜ αφού από το ΘΓΜΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο και έχει ίσες διαγώνιες.

Δ₃. Λύση πρώτη με προεκτάσεις των πλευρών των δύο τετραγώνων.



Προεκτείνουμε τα τμήματα ΔΓ και ΗΖ που τέμνονται στο σημείο Ν. Τα τρίγωνα ΑΔΘ και ΘΜΝ είναι ίσα αφού έχουν ίσες πλευρές Τότε

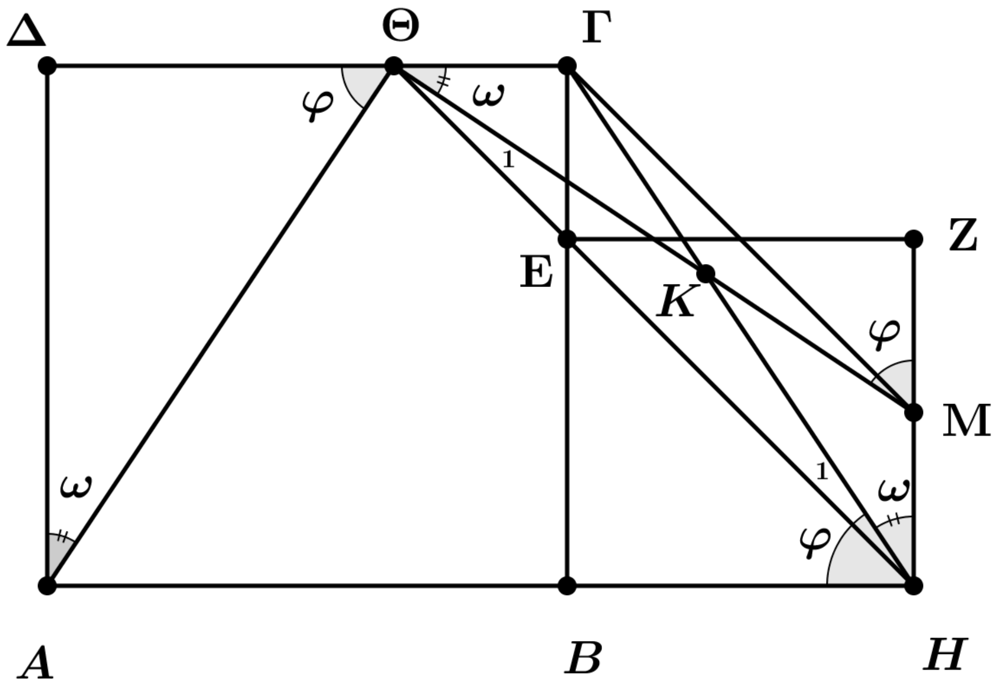
ΔΘΑ = ΘΜΝ = φ και

ΔΑΘ = ΝΘΜ = ω

Από τα ορθογώνια τρίγωνα προκύπτει ότι $\hat{\varphi}+\hat{\omega}=90^{o}$ και για τις γωνίες

$$\hat{\varphi}+\mathrm{A\hat{\Theta}M}+\hat{\omega}=180^{o}\Rightarrow 90^{o}+\mathrm{A\hat{\Theta}M}=180^{o}\Rightarrow \mathrm{A\hat{\Theta}M}=90^{o}$$

Δ_3. Λύση δεύτερη χωρίς τις προεκτάσεις των πλευρών των δύο τετραγώνων.



Από την ισότητα των τριγώνων ΔΘΑ και ΓΒΗ έχουμε

$$\mathrm{\Gamma\hat{\Theta}A}=\mathrm{\Gamma\hat{H}B}=\hat{\varphi}$$

Από το ισοσκελές τραπέζιο ΘΓΜΗ επειδή οι διαγώνιες του διχοτομούνται έχουμε

ΘΚ = ΚΗ (Κ είναι η τομή των δύο διαγωνίων του)

Άρα

$$\hat{\Theta}_1=\hat{\Theta}_2\Rightarrow \mathrm{\Gamma\hat{\Theta}M}=\mathrm{K\hat{M}H}=\hat{\omega}$$

Η γωνία Η του τετραγώνου ΒΕΖΗ είναι ορθή, επομένως έχουμε

$$\mathrm{B\hat{H}\Theta}+\mathrm{\Gamma\hat{H}Z}=\hat{\varphi}+\hat{\omega}=90^{o}$$

Άρα

$$\hat{\varphi}+\mathrm{A\hat{\Theta}M}+\hat{\omega}=180^{o}\Rightarrow 90^{o}+\mathrm{A\hat{\Theta}M}=180^{o}\Rightarrow \mathrm{A\hat{\Theta}M}=90^{o}$$