ΠΡΟΤΥΠΟ ΛΥΚΕΙΟ ΑΝΑΒΡΥΤΩΝ

ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2015 – 2016

ΑΝΑΒΡΥΤΑ 31-5-2016

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ
ΤΑΞΗ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ
ΑΛΓΕΒΡΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ ΠΡΩΤΟ

A1 Αν $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ και $\theta_1, \theta_2 > 0$ να αποδείξετε ότι: $\log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_\alpha\theta_1 + \log_\alpha\theta_2$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 15**

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Η εξίσωση $\eta\mu x = \frac{\pi}{2}$ έχει λύση στο $\mathbb{R}$. **ΜΟΝΑΔΕΣ 2**

β. Αν το άθροισμα των συντελεστών ενός πολυωνύμου P(x) ισούται με μηδέν, τότε ο (x – 1) είναι παράγοντας του P(x). **ΜΟΝΑΔΕΣ 2**

γ. Ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι πάντα ίσος με το γινόμενο των βαθμών τους. **ΜΟΝΑΔΕΣ 2**

δ. Η συνάρτηση $f(x) = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα **ΜΟΝΑΔΕΣ 2**

ε. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει η ισότητα $\log x^2 = 2\log x$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 2**

ΘΕΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟ

Δίνεται η παράσταση συνάρτηση $f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x}$

B1. Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η συνάρτηση. **ΜΟΝΑΔΕΣ 6**

B2. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu x}$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 10**

B3. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = -4$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 9**

ΘΕΜΑ ΤΡΙΤΟ

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ για τα οποία ισχύουν:

- $P(\alpha)=\beta$, $P(\beta)=\alpha$ με $\alpha\neq\beta$ και
- $P(P(x))=Q(x)+x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι ρίζες του πολυωνύμου $Q(x)$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 8**

Γ2. Αν $\pi(x)$ είναι το πηλίκο της τέλειας διαίρεσης $Q(x):(x-\alpha)$ να αποδείξετε ότι $\pi(\beta)=0$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 8**

Γ3. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $Q(x)$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 9**

ΘΕΜΑ ΤΕΤΑΡΤΟ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(x\cdot e^{x-1}\right)$, $x>0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f(x)<0$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

Δ2. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+1=x-\ln^2 x$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 7**

Δ3. Να λύσετε την ανίσωση $f\left(e^{x-1}\right)>x+2^x-2$. **ΜΟΝΑΔΕΣ 7**

Δ4. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει: $\sigma\upsilon\nu\theta<\ln\left(\frac{e}{\sigma\upsilon\nu\theta}\right)$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 6**

ΝΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΤΕ ΣΕ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

ΚΙΟΥΛΑΦΑΣ ΜΑΝΟΥΗΛ

ΟΙ ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ

ΚΑΝΤΑΣ ΚΩΣΤΑΣ

ΚΑΡΔΑΜΙΤΣΗΣ ΣΠΥΡΟΣ

ΜΙΧΑΛΙΑ ΔΗΜΗΤΡΑ

ΣΩΤΗΡΟΠΟΥΛΟΣ ΝΙΚΟΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ ΠΡΩΤΟ

Α1 Έστω ότι είναι: $\log_\alpha \theta_1 = x$ και $\log_\alpha \theta_2 = y$, τότε ισοδύναμα έχουμε

$$\left\{\begin{matrix}\log_\alpha \theta_1 = x \\ \log_\alpha \theta_2 = y\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\alpha^x = \theta_1 \\ \alpha^y = \theta_2\end{matrix}\right\}$$

και πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη έχουμε:

$$\alpha^{x_1} \cdot \alpha^{x_2} = \theta_1\theta_2 \Leftrightarrow \alpha^{x_1+x_2} = \theta_1\theta_2 \Leftrightarrow \log_\alpha(\theta_1\theta_2) = x_1 + x_2 \Leftrightarrow \log_\alpha(\theta_1\theta_2) = \log_\alpha\theta_1 + \log_\alpha\theta_2$$

Α2 Λ – Σ - Λ – Λ – Λ

ΘΕΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟ

Β1. Για να έχει έννοια η συνάρτηση πρέπει και αρκεί

$$\left\{\begin{matrix}1-\eta\mu x \neq 0 \\ 1+\eta\mu x \neq 0\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\eta\mu x \neq 1 \\ \eta\mu x \neq -1\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}x \neq 2k\pi + \dfrac{\pi}{2} \\ x \neq 2k\pi - \dfrac{\pi}{2}\end{matrix}\right\}$$

Επομένως η συνάρτηση ορίζεται στο σύνολο $A = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$

Β2. Η συνάρτηση f παίρνει την μορφή:

$$f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x} = = \frac{\sigma\upsilon\nu x(1+\eta\mu x) + \sigma\upsilon\nu x(1-\eta\mu x)}{(1-\eta\mu x)(1+\eta\mu x)} =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{(1-\eta\mu x)(1+\eta\mu x)} = \frac{2\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu^2 x} = \frac{2\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu x}$$

Β3. $f(x) = -4 \Leftrightarrow \dfrac{2}{\sigma\upsilon\nu x} = -4 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\dfrac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \dfrac{2\pi}{3}\ \ k \in \mathbb{Z}$ τιμές που είναι δεκτές.

ΘΕΜΑ ΤΡΙΤΟ

Γ1 Από δεύτερη σχέση που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, θα ισχύει και για $x = \alpha$
Άρα $P(P(\alpha)) = Q(\alpha) + \alpha \Leftrightarrow P(\beta) = Q(\alpha) + \alpha \Leftrightarrow \cancel{\alpha} = Q(\alpha) + \cancel{\alpha} \Leftrightarrow Q(\alpha) = 0$
επομένως το α είναι ρίζα του $Q(x)$
Όμοια για $x = \beta$ έχουμε
$P(P(\beta)) = Q(\beta) + \beta \Leftrightarrow P(\alpha) = Q(\beta) + \beta \Leftrightarrow \cancel{\beta} = Q(\beta) + \cancel{\beta} \Leftrightarrow Q(\beta) = 0$
επομένως το β είναι ρίζα του $Q(x)$

Γ2 Αφού το $\pi(x)$ είναι το πηλίκο της τέλειας διαίρεσης $Q(x):(x-\alpha)$, τότε ισχύει
$Q(x) = (x-\alpha)\pi(x)$ (1) και για $x = \beta$ η σχέση (1) δίνει
$Q(\beta) = (\beta-\alpha)\pi(\beta) \Rightarrow 0 = (\beta-\alpha)\pi(\beta) \Rightarrow \pi(\beta) = 0$ αφού $\alpha \neq \beta$

Γ3 Αφού είναι $\pi(\beta)=0$, τότε το $x-\beta$ είναι παράγοντας του $\pi(x)$ και ισχύει:
$\pi(x)=(x-\beta)\cdot\kappa(x)$ (1) όπου $\kappa(x)$ πολυώνυμο του x
Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:
$Q(x)=(x-\alpha)\pi(x)=(x-\alpha)(x-\beta)\cdot\kappa(x)=(x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta)\cdot\kappa(x)$
Δηλαδή το πολυώνυμο $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $Q(x)$

ΘΕΜΑ ΤΕΤΑΡΤΟ

Δ1. έχουμε $x\in(0,1)\Leftrightarrow 0<x<1 \overset{e^{x-1}>0}{\Leftrightarrow} x\,e^{x-1}<e^{x-1} \overset{\ln x}{\Leftrightarrow} \ln(x\,e^{x-1})<\ln e^{x-1}\Leftrightarrow f(x)<x-1<0$
Αφού είναι x < 1

Δ2. Για x > 0 η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$f(x)+1=x-\ln^2x\Leftrightarrow \ln(x\cdot e^{x-1})+1=x-\ln^2x\Leftrightarrow \ln x+\ln e^{x-1}+1=x-\ln^2x\Leftrightarrow \ln x+x-1+1=x-\ln^2x\Leftrightarrow$$

$$\ln^2x+\ln x=0\Leftrightarrow \ln x(\ln x+1)=0\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}\ln x=0\\ \ln x=-1\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}x=1\\ x=\dfrac{1}{e}\end{Bmatrix}$$ που είναι δεκτές τιμές.

Δ3. $f\left(e^{x-1}\right)>x+2^x-2\Leftrightarrow \ln(e^{x-1}\cdot e^{e^{x-1}-1})>x+2^x-2\Leftrightarrow \ln(e^{x-1+e^{x-1}-1})>x+2^x-2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-1+e^{x-1}-1>x+2^x-2\Leftrightarrow e^{x-1}>2^x \overset{\ln x}{\Leftrightarrow} \ln e^{x-1}>\ln 2^x\Leftrightarrow x-1>x\ln 2\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x-x\ln 2>1\Leftrightarrow x\left(1-\ln 2\right)>1$
Όμως 1 – ln2 > 0 αφού ln2 < 1, τότε η ανίσωση γράφεται
$x>\dfrac{1}{1-\ln 2}$ που είναι δεκτή αφού $\dfrac{1}{1-\ln 2}>0\Leftrightarrow 1-\ln 2>0$

Δ4. Για να αποδείξουμε ότι: $\sigma\upsilon\nu\theta<\ln\left(\dfrac{e}{\sigma\upsilon\nu\theta}\right)$

Αρκεί να δείξουμε ότι: $\ln e^{\sigma\upsilon\nu\theta}<\ln\left(\dfrac{e}{\sigma\upsilon\nu\theta}\right)\Leftrightarrow e^{\sigma\upsilon\nu\theta}<\dfrac{e}{\sigma\upsilon\nu\theta}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta\cdot e^{\sigma\upsilon\nu\theta}<\cancel{\sigma\upsilon\nu\theta}\,\dfrac{e}{\cancel{\sigma\upsilon\nu\theta}}$
Αφού $0<\sigma\upsilon\nu\theta<1$ αφού $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

Επομένως αρκεί να αποδείξουμε
$\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\dfrac{e^{\sigma\upsilon\nu\theta}}{e}<1\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta\cdot e^{\sigma\upsilon\nu\theta-1}<1\Leftrightarrow \ln(\sigma\upsilon\nu\theta\cdot e^{\sigma\upsilon\nu\theta-1})<\ln 1\Leftrightarrow f(x)<0$ που ισχύει από το Δ_1 ερώτημα.