ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Β΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΛ ΕΡΕΤΡΙΑΣ
26/5/2016
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η συνάρτηση $f(x) = ° \cdot ¦«(μx)$ με ρ, $ω > 0$, έχει περίοδο $T = \frac{2μ}{®}$ **Μονάδες 02**

β) Η συνάρτηση f(x) = $α^x$, x $\in \Re$ με 0 < α < 1, είναι γνησίως αύξουσα στο R. **Μονάδες 02**

γ) Ένας αριθμός *ρ*, λέγεται ρίζα ενός πολυωνύμου $P(x)$, αν και μόνο αν, ισχύει $P(°) = 0$ **Μονάδες 02**

δ) Για κάθε x > 0, ισχύει $e^{\ln x} = x$. **Μονάδες 02**

ε) Ισχύει $\ln\frac{{}_1}{{}_2} = \frac{\ln {}_1}{\ln {}_2}$, με $θ_1$, $θ_2 > 0$ **Μονάδες 02**

Α2. Αν α > 0 με α ≠ 1, να αποδείξετε ότι για κάθε θ > 0 και κ $\in$ R, ισχύει $\log_α θ^κ = κ \cdot \log_α θ$ **Μονάδες 15**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$ με $x \in \mathbb{R}$

Β1. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-1)$ **Μονάδες 8**

Β2. Να βρεθεί το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-2)$ και να γραφεί η ταυτότητα της διαίρεσης. **Μονάδες 9**

Β3. Να λυθεί η ανίσωση $P(x) > 0$ **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f(x) = $\frac{1}{±³¬x} - \frac{¦«x}{±¨x}$, με x ≠ kπ και x ≠ kπ + $\frac{®}{2}$, k$\in \mathbb{Z}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι f(x) = συνx **Μονάδες 8**

Γ2. Να υπολογίσετε την τιμή f($\frac{19®}{4}$) **Μονάδες 8**

Γ3. Να λύσετε την εξίσωση: f(x) = ημ(x + $\frac{®}{6}$) **Μονάδες 9**

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε τη συνάρτηση f(x) = log(10^x – k), με k $\in \mathbb{R}$

Δ1. Αν k είναι η θετική ρίζα της εξίσωσης $3^{2x} - 3^x - 6 = 0$, να αποδείξετε ότι k = 1. **Μονάδες 6**

Δ2. Αν f(x) = log(10^x – 1),

i) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της f **Μονάδες 3**

ii) Να αποδείξετε ότι: $3 \cdot 10^{f(1)} + 20 \cdot 10^{f(2)} + f(\log 101) + e^{\ln 7} = 2016$ **Μονάδες 5**

iii) Να λυθεί η εξίσωση: f(2x) = f(x) + log11 **Μονάδες 6**

iv) Να λυθεί η ανίσωση: $10^{f(x)} < 9$ **Μονάδες 5**

<u>ΣΥΝΟΠΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ</u>

Οι παρακάτω απαντήσεις είναι ενδεικτικές. Κάθε επιστημονικά τεκμηριωμένη απάντηση είναι αποδεκτή.

ΘΕΜΑ Α
Α1. α) Λάθος
β) Λάθος
γ) Σωστό
δ) Σωστό
ε) Λάθος

Α2. Θεωρία. Απόδειξη θεωρήματος σελ. 134.

ΘΕΜΑ Β
Β1. $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$
Αφού ο διαιρέτης είναι x – 1 θα είναι ρ = 1 για το σχήμα Horner

2	– 5	1	2	ρ = 1
	2	– 3	– 2	
2	– 3	– 2	**υ = 0**	

Άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-1)$ είναι **υ = 0**
<u>2ος τρόπος</u> με διαίρεση πολυωνύμων.....
<u>3ος τρόπος</u> ….. $υ = P(1) = 2 \cdot 1^3 - 5 \cdot 1^2 + 1 + 2 = 2 - 5 + 1 + 2 = 0$

Β2.
Αφού ο διαιρέτης είναι x – 2 θα είναι ρ = 2 για το σχήμα Horner

2	– 5	1	2	ρ = 2
	4	– 2	– 2	
2	– 1	– 1	**υ = 0**	

Άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-2)$ είναι **υ = 0** και το πηλίκο είναι το
$π(x) = 2x^2 - x - 1$. Η ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης $P(x):(x-2)$ είναι
$P(x) = δ(x) \cdot π(x) + υ \Rightarrow 2x^3 - 5x^2 + x + 2 = (x-2)(2x^2 - x - 1)$

Β3.
Λύνω πρώτα την εξίσωση P(x) = 0 για να βρω τις ρίζες του P(x)
Από το προηγούμενο ερώτημα και την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης έχουμε:
$P(x) = π(x) \cdot δ(x) + υ$
$2x^3 - 5x^2 + x + 2 = (x-2)(2x^2 - x - 1)$
Άρα $P(x) = 0 \Leftrightarrow$
$(x-2)(2x^2 - x - 1) = 0 \Leftrightarrow$
$x - 2 = 0$ ή $2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow$
$x = 2$ ή $x = 1$ ή $x = -\frac{1}{2}$
φτιάχνω πίνακα τιμών...

x	-∞		- 1/2		1		2		+∞
x – 1		-		-	o	+		+	
$2x^2 – x – 1$		+	o	-		-	o	+	
$P(x) = (x – 2)(2x^2 – x – 1)$		-	o	+	o	-	o	+	

$P(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\frac{1}{2},-1) \cup (2,+\infty)$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f(x) = \frac{1}{συνx} - \frac{ημx}{σφx}$,

$f(x) = \frac{1}{συνx} - \frac{ημx}{σφx} = \frac{1}{συνx} - \frac{ημx}{\frac{συνx}{ημx}} = \frac{1}{συνx} - \frac{ημ^2x}{συνx} = \frac{1-ημ^2x}{συνx} = \frac{συν^2x}{συνx} = συνx$

Γ2. $f(\frac{19π}{4}) = συν\frac{19π}{4} = συν\frac{16π+3π}{4} = συν(\frac{16π}{4}+\frac{3π}{4}) = συν(4π+\frac{3π}{4}) = συν\frac{3π}{4} =$

$συν(π - \frac{π}{4}) = -συν\frac{π}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Γ3. Για κάθε $x \in R – \{kπ, kπ + \frac{π}{2}\}, k \in \mathbb{Z}$

$f(x) = ημ(x + \frac{π}{6}) \Leftrightarrow συνx = ημ(x + \frac{π}{6}) \Leftrightarrow συνx = συν(\frac{π}{2} – (x + \frac{π}{6})) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow συνx = συν(\frac{π}{2} – x – \frac{π}{6}) \Leftrightarrow συνx = συν(\frac{3π}{6} – x – \frac{π}{6}) \Leftrightarrow συνx = συν(\frac{2π}{6} – x) \Leftrightarrow$

$συνx = συν(\frac{π}{3} – x) \Leftrightarrow x = 2kπ + \frac{π}{3} – x$ ή $x = 2kπ + \frac{π}{3} + x$ (αδύνατη) $\Leftrightarrow 2x = 2kπ + \frac{π}{3} \Leftrightarrow$

$x = kπ + \frac{π}{6}, k \in \mathbb{Z}$

<u>2ος τρόπος, μέσω του τύπου ημ(α+β) = ημασυνβ+συναημβ</u>:

Για κάθε $x \in R – \{kπ, kπ + \frac{π}{2}\}, k \in \mathbb{Z}$

$f(x) = ημ(x + \frac{π}{6}) \Leftrightarrow συνx = ημ(x + \frac{π}{6}) \Leftrightarrow συνx = ημx·συν\frac{π}{6} + συνx·ημ\frac{π}{6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow συνx = ημx·\frac{\sqrt{3}}{2} + συνx·\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\,συνx = 2ημx·\frac{\sqrt{3}}{2} + 2συνx·\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$2\,συνx – συνx = \sqrt{3} \cdot ημx \Leftrightarrow συνx = \sqrt{3} \cdot ημx \Leftrightarrow \frac{συνx}{ημx} = \sqrt{3} \Leftrightarrow σφx = \sqrt{3} \Leftrightarrow$

$x = kπ + \frac{π}{6}, k \in \mathbb{Z}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x) = \log(10^x – k)$, με $k \in \mathbb{R}$,

k είναι η θετική ρίζα της εξίσωσης $3^{2k} – 3^k – 6 = 0$

$3^{2k} – 3^k – 6 = 0$, έστω $3^k = ω > 0$, τότε η εξίσωση γίνεται $ω^2 – ω – 6 = 0$,

$Δ = (–1)^2 – 4(–6) = 25$…..άρα: ω = 3 ή ω = – 2, δεκτή μόνο η ω = 3 γιατί ω > 0

Άρα επειδή $ω = 3 \Rightarrow 3^k = 3 \Leftrightarrow k = 1$

Δ2.

i) $f(x) = \log(10^x - 1)$, για το πεδίο ορισμού της πρέπει: $10^x - 1 > 0 \Leftrightarrow 10^x > 1 \Leftrightarrow 10^x > 10^0 \overset{10^x\uparrow}{\Leftrightarrow} x > 0$, άρα πεδίο ορισμού της f είναι το $(0, +\infty)$

ii) πρώτα βρίσκω:

$f(1) = \log(10^1 - 1) = \log 9$,

$f(2) = \log(10^2 - 1) = \log(100 - 1) = \log 99$,

$f(\log 101) = \log(10^{\log 101} - 1) = \log(101 - 1) = \log 100 = \log 10^2 = 2$,

$e^{\ln 7} = 7$,

άρα: $3\cdot 10^{f(1)} + 20\cdot 10^{f(2)} + f(\log 101) + e^{\ln 7} = 3\cdot 10^{\log 9} + 20\cdot 10^{\log 99} + 2 + 7 =$

$3\cdot 9 + 20\cdot 99 + 2 + 7 = 27 + 1980 + 9 = 2016$

iii) $f(2x) = f(x) + \log 11$

καταρχάς, πρέπει $2x > 0$ και $x > 0$, δηλαδή $x > 0$

$\log(10^{2x} - 1) = \log(10^x - 1) + \log 11 \Leftrightarrow$

$\log(10^{2x} - 1) = \log[(10^x - 1)\cdot 11] \Leftrightarrow$

$(10^x - 1)\cdot(10^x + 1) = 10^x - 1)\cdot 11 \Leftrightarrow$

$10^x + 1 = 11 \Leftrightarrow 10^x = 10 \Leftrightarrow x = 1$ δεκτή, αφού $x > 0$

Έγινε διαγραφή του όρου $10^x - 1 \neq 0$,

αφού για $x > 0 \overset{10^x\uparrow}{\Leftrightarrow} 10^x > 10^0 \Leftrightarrow 10^x > 1 \Leftrightarrow 10^x - 1 > 0$

iv)

για $x > 0$,

$10^{f(x)} < 9 \Leftrightarrow 10^{\log(10^x - 1)} < 9 \Leftrightarrow 10^x - 1 < 9 \Leftrightarrow 10^x < 10 \overset{10^x\uparrow}{\Leftrightarrow} x < 1$

τελικά με $x > 0$ και $x < 1$, προκύπτει ότι οι λύσεις της ανίσωσης $10^{f(x)} < 9$ είναι: $0 < x < 1$