Μάθημα: ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν είναι $P(\rho)=0$, τότε ο ρ λέγεται ρίζα του πολυωνύμου $P(\chi)$.

β) Κάθε μηδενικό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού.

γ) Η εκθετική συνάρτηση $f(x)=e^x$ είναι γνησίως αύξουσα.

δ) Αν $\alpha>0$ με $\alpha\neq 1$, τότε για κάθε $\chi\in R$ ισχύει: $\log_\alpha \alpha^\chi=\chi$.

ε) Αν $\alpha>1$ και $0<\chi_1<\chi_2$, τότε $\log_\alpha x_1>\log_\alpha x_2$.

Α2. Αν $\alpha>0$ με $\alpha\neq 1$, τότε για οποιαδήποτε $\theta 1,\theta 2>0$ να αποδείξετε ότι:

$$\log_\alpha(\theta_1\cdot\theta_2)=\log_\alpha\theta_1+\log_\alpha\theta_2$$

Μονάδες 10+15

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση $\mathbf{2\chi^3-7\chi^2-28\chi-12=0}$ (1)

Β$_1$. Ποιες είναι οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης (1);

Β$_2$. Να λύσετε την εξίσωση (1).

Β$_3$. Να λύσετε την ανίσωση $2\chi^3-7\chi^2-28\chi-12>0$.

Μονάδες 5+10+10

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται ότι **Α(χ) = εφχ+**$\frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{1+\eta\mu\chi}$**,** όπου συνχ $\neq$ 0 και ημχ $\neq$ -1

Γ$_1$. Να αποδείξετε ότι Α(χ)= $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\chi}$.

Γ$_2$. Να αποδείξετε ότι συν $(\frac{\pi}{2}-\chi)$ +ημ $(\frac{\pi}{2}-\chi)$ +ημ(π+χ)= $\frac{1}{\mathrm{A}(\chi)}$

Γ$_3$. Να λύσετε την εξίσωση συν $(\frac{\pi}{2}-\chi)$ +ημ $(\frac{\pi}{2}-\chi)$ +ημ(π+χ)= $\frac{1}{2}$

Μονάδες 10+5+10

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f με **f(x) = ln(e^x - 5) + x - ln2 - ln3**.

Δ$_1$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Δ$_2$. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα χ΄χ.

Δ$_3$. Για ποιες τιμές του χ η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα χ΄χ;

Μονάδες 5+10+10

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ (ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ)

ΘΕΜΑ Α

A1 α) Σ β) Λ γ) Σ δ) Σ ε) Λ

A2 Σχολικό βιβλίο (σελ. 175)

ΘΕΜΑ Β

B1 Πιθανές ακέραιες ρίζες είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου, δηλαδή οι αριθμοί $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$.

B2 Μια ακέραια ρίζα της εξίσωσης είναι το -2.

Σχήμα Horner

2	−7	−28	−12	ρ=−2
//////	−4	22	12	
2	−11	−6	0	

$2x^3 - 7x^2 - 28x - 12 = 0 \Leftrightarrow$

$(x+2)(2x^2 - 11x - 6) = 0$

$\rho_1 = -2 \quad \rho_2 = 6 \quad \rho_3 = -\frac{1}{2}$

B3 $\overbrace{2x^3 - 7x^2 - 28x - 12}^{P(x)} > 0 \Leftrightarrow$

$(x+2)(2x^2 - 11x - 6) > 0$

x	$-\infty$ -2	-2 $-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$ 6	6 $+\infty$
$x+2$	− 0	+	+	+
$2x^2-11x-6$	+	+ 0	− 0	+
$P(x)$	− 0	+	−	+

$x \in (-2, -\frac{1}{2}) \cup (6, +\infty)$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 $A(x) = \frac{ημx}{συνx} + \frac{συνx}{1+ημx} = \frac{ημx + ημ^2x + συν^2x}{συνx(1+ημx)} = \frac{1+ημx}{συνx(1+ημx)} = \frac{1}{συνx}$

Γ2 $συν(\frac{\pi}{2} - x) + ημ(\frac{\pi}{2} - x) + ημ(\pi + x) = ημx + συνx - ημx = συνx = \frac{1}{A(x)}$

Γ3 $συν(\frac{\pi}{2} - x) + ημ(\frac{\pi}{2} - x) + ημ(\pi + x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow συνx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow συνx = συν\frac{\pi}{3}$. Άρα $x = 2κ\pi \pm \frac{\pi}{3}$, $κ \in \mathbb{Z}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1 Πρέπει $e^x - 5 > 0 \Leftrightarrow e^x > 5 \Leftrightarrow \underset{ln\uparrow}{ln e^x > ln5}$. Άρα $x > ln5$ $D_f = (ln5, +\infty)$

Δ2 Λύνω την εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$ln(e^x - 5) + x - ln2 - ln3 = 0 \Leftrightarrow ln(e^x - 5) + ln e^x = ln2 + ln3 \Leftrightarrow$

$ln[(e^x-5) \cdot e^x] = ln6 \underset{ln\ "1-1"}{\Leftrightarrow} (e^x)^2 - 5e^x = 6 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 5e^x - 6 = 0$ Θέτω $e^x = ω > 0$

$ω^2 - 5ω - 6 = 0$ $ω = -1$ Απορρίπτεται, $ω = 6$ Δεκτή

$e^x = 6 \Leftrightarrow \boxed{x = ln6}$

Δ3 Λύνω την ανίσωση

$f(x) < 0 \Leftrightarrow ln(e^x - 5) + x - ln2 - ln3 < 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (e^x)^2 - 5e^x - 6 < 0$

$ω^2 - 5ω - 6 < 0$

$-1 < ω < 6$

$-1 < e^x < 6$

$e^x > -1$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$
$e^x < 6 \Leftrightarrow x < ln6$ $\Big\}$ $x < ln6$
Από (Δ1) $x > ln5$ $\Big\}$ Άρα $ln5 < x < ln6$