ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΗ ΓΕΩΡΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ

ΣΧ. ΕΤΟΣ: 2016 – 17
ΤΑΞΗ: Β΄
ΗΜΕΡ/ΝΙΑ: 15/5/2017

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ: ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2017
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$, τότε για οποιαδήποτε $\theta_1, \theta_2 > 0$ να αποδείξετε ότι:

$$\log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2$$

Μονάδες 13

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με την ένδειξη Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος).

i. Η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x + 3$ έχει μέγιστο το 2

ii. Η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{2017}{2016}\right)^{-x}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

iii. Ισχύει ότι: αν $x > 0$ τότε $\ln^2 x = 2\ln x$

Μονάδες 6

Α3. Να μεταφέρετε τις παρακάτω προτάσεις στην κόλλα σας συμπληρωμένες κατάλληλα.

i. Η ταυτότητα της διαίρεσης του πολυωνύμου $\Delta(x)$ (διαιρετέος) με το $\delta(x)$ (διαιρέτης) είναι ………………………………, όπου $\pi(x)$ είναι το ………..… και $\upsilon(x)$ το ……..……

ii. $\varepsilon\varphi(\pi + \theta) = $ ………..

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Β

Β1. Να λύσετε την εξίσωση $5^{4x^2 - 8x + 6} = 125$

Μονάδες 8

Β2. Να λύσετε την εξίσωση $-4\sigma\upsilon\nu^2 x - 8\eta\mu x + 7 = 0$

Μονάδες 10

Β3. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(\pi + 4x) - 2\eta\mu(\pi - 4x)$. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή, καθώς και την περίοδο της συνάρτησης αυτής.

Μονάδες 7

ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΗ ΓΕΩΡΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ

ΣΧ. ΕΤΟΣ: 2016 – 17
ΤΑΞΗ: Β΄
ΗΜΕΡ/ΝΙΑ: 15/5/2017

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2+\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$

Γ1. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς *α, β* για τους οποίους το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα το $\ln e$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-\log 100$ είναι ίσο με 16

Μονάδες 10

Για $\alpha=3$ και $\beta=-4$

Γ2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία τη γραφική παράσταση του $P(x)$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 10

Γ3. Να λύσετε την ανίσωση $P(\eta\mu x)\geq 0$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln\left(e^{2x}-4e^x+3\right)$ και $g(x)=\ln 3+\ln\left(e^x-1\right)$

Δ1. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.

Μονάδες 10

Δ2. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 7

Δ3. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

Μονάδες 8

Ευχόμαστε επιτυχία!

Ο
Δ/ντης

Πάρης Πετράς

Οι
Καθηγητές

Νίκος Μαλακόζης

Μιχάλης Γιαννόπουλος

<u>ΣΥΝΤΟΜΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ</u>

<u>ΘΕΜΑ Α</u>

Α1. Σελίδα 175 σχολικού βιβλίου.

Α2. i.Λ**ii.** Σ**iii.**Λ

Α3. i. $\Delta(x)=\delta(x)\cdot\pi(x)+\upsilon(x)$, πηλίκο, υπόλοιπο

ii. $\varepsilon\varphi\theta$

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Β1. Έχουμε

$$5^{4x^2-8x+6}=125\Leftrightarrow 5^{4x^2-8x+6}=5^3\Leftrightarrow 4x^2-8x+6=3$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-8x+3=0\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow x_1=\frac{1}{2}\ \text{ή}\ x_2=\frac{3}{2}$$

Β2. Έχουμε

$$-4\sigma\upsilon\nu^2x-8\eta\mu x+7=0\Leftrightarrow -4\left(1-\eta\mu^2x\right)-8\eta\mu x+7=0$$

$$4\eta\mu^2x-8\eta\mu x+3=0$$

Με τη βοήθεια του Β1 βρίσκουμε

$$\eta\mu x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\eta\mu x=\eta\mu\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}\ \text{ ή }\ x=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6}\ ,\ \kappa\in\mathbb{Z}$$

ή

$$\eta\mu x=\frac{3}{2}\quad\text{Αδύνατη (αφού }-1\leq\eta\mu x\leq 1\text{)}$$

Β3. Με αναγωγή στο $1^{\text{ο}}$ τεταρτημόριο βρίσκουμε

$$f(x)=\eta\mu(\pi+4x)-2\eta\mu(\pi-4x)=-\eta\mu 4x-2\eta\mu 4x=-3\eta\mu 4x$$

Επομένως

$$\min_f=-3,\ \max_f=3\ \text{και}\ \mathrm{T}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1. Έχουμε

$$\ln e=1\,\text{και}\,\log 100=\log 10^2=2$$

Επομένως, πρέπει

$$\begin{cases}P(1)=0\\P(2)=16\end{cases}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=-1\\\underline{4\alpha+\beta=8\ \ (-)}\end{cases}$$

$$3\alpha=9\Leftrightarrow\alpha=3\quad\text{και}\quad\beta=-4$$

Γ2. Πρέπει

$$P(x)>0\Leftrightarrow x^3+3x^2-4>0$$

Με τη βοήθεια του σχήματος Horner

1	3	0	–4	1
	1	4	4	
1	4	4	0	

έχουμε

$$(x-1)\cdot(x^2+4x+4)>0 \Leftrightarrow (x-1)\cdot(x+2)^2>0$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμων

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+2)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
Γ		$-$	0	$-$	0	$+$	

Επομένως

$$x\in(1,+\infty)$$

Γ3. Έχουμε

$$P(\eta\mu x)\geq 0 \overset{\Gamma 2}{\Leftrightarrow} \eta\mu x\in[1,+\infty)\cup\{-2\}$$

Όμως

$$-1\leq \eta\mu x\leq 1$$

Επομένως

$$\eta\mu x=1 \Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\ ,\ \kappa\in\mathbb{Z}$$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Για την f πρέπει

$$e^{2x}-4e^x+3>0$$

Θέτουμε $\omega=e^x$ και έχουμε

$$\omega^2-4\omega+3>0$$

Το τριώνυμο $\omega^2-4\omega+3$ έχει διακρίνουσα ίση με 4 και λύσεις $\omega_1=1$ και $\omega_2=3$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμων

ω	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$\omega^2-4\omega+3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Επομένως

$$\omega<1 \Rightarrow e^x<1 \Rightarrow x<0$$

ή

$$\omega>3 \Rightarrow e^x>3 \Rightarrow x>\ln 3$$

Τελικά

$$\mathrm{A}_f=(-\infty,0)\cup(\ln 3,+\infty)$$

Για την g πρέπει

$$e^x>1 \Leftrightarrow x>0$$

Επομένως

$$\mathrm{A}_g=(0,+\infty)$$

Δ2. Λύνουμε την εξίσωση

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \ln\left(e^{2x}-4e^x+3\right)=0 \Leftrightarrow \ln\left(e^{2x}-4e^x+3\right)=\ln 1$$

$$\Leftrightarrow e^{2x}-4e^x+3=1 \Leftrightarrow e^{2x}-4e^x+2=0$$

Θέτουμε $\omega=e^x$ και έχουμε

$$\omega^2-4\omega+2=0$$

Το τριώνυμο $\omega^2-4\omega+2$ έχει διακρίνουσα ίση με 8 και λύσεις $\omega_{1,2}=2\pm\sqrt{2}$

Επομένως

$$e^x=2+\sqrt{2} \Leftrightarrow x=\ln\left(2+\sqrt{2}\right) \quad \text{Δεκτή}$$

ή

$$e^x=2-\sqrt{2} \Leftrightarrow x=\ln\left(2-\sqrt{2}\right) \quad \text{Δεκτή}$$

Έτσι, τα κοινά σημεία της C_f με τον άξονα $x'x$ είναι τα

$$\mathrm{A}\left(\ln\left(2+\sqrt{2}\right),0\right) \text{ και } \mathrm{B}\left(\ln\left(2-\sqrt{2}\right),0\right)$$

Δ3. Λύνουμε την εξίσωση $f(x)=g(x)$ στο διάστημα $\mathrm{A}_f \cap \mathrm{A}_g=(\ln 3,+\infty)$

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow \ln\left(e^{2x}-4e^x+3\right)=\ln 3+\ln\left(e^x-1\right) \Leftrightarrow \ln\left(e^{2x}-4e^x+3\right)=\ln\left(3e^x-3\right)$$

$$\Leftrightarrow e^{2x}-4e^x+3=3e^x-3 \Leftrightarrow e^{2x}-7e^x+6=0$$

Θέτουμε $\omega=e^x$ και έχουμε

$$\omega^2-7\omega+6=0$$

Το τριώνυμο $\omega^2-7\omega+6$ έχει διακρίνουσα ίση με 25 και λύσεις $\omega_1=1$ ή $\omega_2=6$

Επομένως

$$e^x=1 \Leftrightarrow x=0 \quad \text{Απορρίπτεται}$$

ή

$$e^x=6 \Leftrightarrow x=\ln 6 \quad \text{Δεκτή}$$

Έτσι, το κοινό σημείο των C_f και C_g είναι το $\mathrm{B}\left(\ln 6, g(\ln 6)\right) \equiv \mathrm{B}(\ln 6, \ln 12)$