

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ
ΤΑΞΗ : Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α (Μονάδες 15 + 10)

A1. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ με $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$, παριστάνει

κύκλο με κέντρο το σημείο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί στην κάθε πρόταση.

α) Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει η ισοδυναμία

$$\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$$

β) Αν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} < 0$ τότε $0 < \widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} < \frac{\pi}{2}$

γ) Ένα διάνυσμα κάθετο στην ευθεία $(\varepsilon) : Ax + By + \Gamma = 0$ είναι το $\vec{\delta} = (A, B)$

δ) Ο κύκλος με εξίσωση $(x - \alpha)^2 + (y - \alpha)^2 = \alpha^2$, $\alpha \neq 0$ εφάπτεται στους άξονες των συντεταγμένων.

ε) Έστω μία ευθεία $(\delta) : Ax + By + \Gamma = 0$ και ένα σημείο $E(x_0, y_0)$ εκτός της ευθείας (δ) . Ένα σημείο $M(x_M, y_M)$ ανήκει στην παραβολή με διευθετούσα την ευθεία (δ) και εστία το σημείο E , αν και μόνο αν :

$$\frac{|Ax_M + By_M + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \sqrt{(x_M - x_0)^2 + (y_M - y_0)^2}$$

ΘΕΜΑ Β (Μονάδες 8 + 8 + 9)

Θεωρούμε τα διανύσματα \vec{u} , \vec{v} με $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 1$ και $|\vec{u} - \vec{v}| = 2$

B1. Να αποδείξετε ότι $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$

B2. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα \vec{u} , \vec{v} είναι ομόρροπα .

B3. Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{w} = \vec{u} + 3\vec{v}$

ΘΕΜΑ Γ (Μονάδες 7 + 2 + 10 + 6)

Δίνεται η εξίσωση $2x^2 - 2y^2 - 3xy + 10y - 8 = 0$ (1)

Γ1. Αποδείξτε ότι η (1) παριστάνει τις ευθείες $(\epsilon_1): -x + 2y - 2 = 0$, $(\epsilon_2): -2x - y + 4 = 0$

Γ2. Έστω A το σημείο τομής της ευθείας (ϵ_1) με τον άξονα x'/x και B το σημείο τομής της ευθείας (ϵ_2) με τον άξονα x'/x

i) Βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και B

ii) Βρείτε σημείο Δ της ευθείας (ϵ_1) , του πρώτου τεταρτημορίου, ώστε το εμβαδόν του τριγώνου ABΔ να είναι ίσο με 6

iii) Έστω (ϵ) η ευθεία που είναι κάθετη στον άξονα x'/x στο σημείο A. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου M για τα οποία ισχύει $(MB) = d(M, \epsilon)$

ΘΕΜΑ Δ (Μονάδες 7 + 7 + 6 + 5)

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + (\mu + 1)x + (\mu - 1)y + \mu^2 + 3\mu + 3 = 0$ (1) όπου $\mu \in \mathbb{R}$ παράμετρος.

Δ1. Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου μ , ώστε η (1) να παριστάνει κύκλο.

Δ2. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο του επιπέδου από το οποίο να διέρχονται όλοι οι κύκλοι της εξίσωσης (1)

Δ3. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των παραπάνω κύκλων.

Δ4. Δίνονται οι παράλληλες ευθείες $(\epsilon_1): y = x - 1$ και $(\epsilon_2): y = x + 3$. Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι της εξίσωσης (1) βρίσκονται στη ζώνη που ορίζεται από τις παράλληλες ευθείες (ϵ_1) και (ϵ_2)

ΜΑΡΟΥΣΙ 19 / 5 / 2015

Ο Διευθυντής

Οι εισηγητές καθηγητές