Τάξη Β'

Ονοματεπώνυμο……………………………………………………………………………

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα Οι απαντήσεις να γραφούν στο καθαρό
Καμιά σημείωση να μη γίνει στο φύλλο των θεμάτων

ΘΕΜΑ 1ο

Α. **Α1. Στο γραπτό σας** να γράψετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση στην ερώτηση:

Ο κύκλος με εξίσωση $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ έχει κέντρο Κ και ακτίνα ρ

Α. $K(-\frac{B}{2},-\frac{\Gamma}{2})$ και $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$ Β. $K(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2})$ και $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2+4\Gamma}}{2}$

Γ. $K(-A,-B)$ $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$ Δ. $K(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2})$ και $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$

Μον. 2

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο **γραπτό** σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

Α2. Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(x_1,y_1)$ και $\mathrm{B}(x_2,y_2)$ δίνεται σε κάθε περίπτωση από τον τύπο . $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ **Μον.3**

Α3. Κάθε παραβολή στο επίπεδο των αξόνων Οχψ έχει εξίσωση $\psi^2=2\rho x$ ή $x^2=2\rho\psi$, όπου $\rho\neq0$, η παράμετρος της παραβολής. **Μον. 3**

Α4. Κάθε έλλειψη με κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων, έχει εξίσωση $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$,όπου α>β >0. **Μον. 3**

Α5. **<u>Να μεταφέρετε στο γραπτό σας το 2ο πίνακα</u>** και να συμπληρώσετε την 2η γραμμή του με το γράμμα του αποτελέσματος της 2ης στήλης που αντιστοιχεί στη συνθήκη της 1ης.

1η Στήλη	2η Στήλη
I. $\lambda_{\vec{\alpha}}=\lambda_{\vec{\beta}}$	**Α.** $\vec{a}, \vec{\beta}$ **συγγραμμικά**
II. $\lambda_{\vec{\alpha}}\lambda_{\vec{\beta}}=-1$	**Β.** $\vec{a}, \vec{\beta}$ **αντίρροπα**
III. $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\pi$	**Γ.** $\vec{a}, \vec{\beta}$ **ομόρροπα**
IV. $\det(\vec{a}, \vec{\beta})=0$	**Δ.** $\vec{a}, \vec{\beta}$ **κάθετα**

I	II	III	IV

Μον. 4

Β. Αν $\mathrm{A}(x_1, y_1)$ και $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ δυο σημεία του καρτεσιανού επιπέδου και Μ(x, y) το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, να αποδείξετε ότι $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ και $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

Μον. 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται διανύσματα $\vec{a} = (\sqrt{3}, 3)$, $\vec{\beta} = \left(3, \sqrt{3}\right)$ και τα διανύσματα $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ με $|\vec{\gamma}| = 6$

$\left|\vec{\delta}\right| = 1$ και $(\widehat{\vec{\gamma}, \vec{\delta}}) = \frac{\pi}{3}$

Β1. Να υπολογίσετε το εσωτερικά γινόμενα $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta}$ **Μον.8**

Β2. Να υπολογίσετε την γωνία των διανυσμάτων **Μον. 5**

Αν το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ είναι ομόρροπο στο $\vec{a}$,

Β3. να αποδείξετε ότι $\vec{\gamma} = \sqrt{3}\vec{a}$ **Μον. 5**

Β4. Να βρεθεί η προβολή του $\vec{\gamma}$ πάνω στο $\vec{\beta}$ **Μον. 7**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται τα σημεία Μ(1+λ, 3–λ) , όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι τα σημεία Μ ανήκουν σε ευθεία **ζ** . **Μον. 8**

β. Να βρείτε τα σημεία που η ευθεία **ζ,** τέμνει τους άξονες **Μον. 8**

γ. Να προσδιορίστε το σημείο της ευθείας **ζ,** που είναι πλησιέστερο στην αρχή των αξόνων. **Μον. 9**

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Δίνεται η εξίσωση c: $x^2 + y^2 - 10y + 9 = 0$. Να αποδείξετε ότι είναι εξίσωση κύκλου και να προσδιορίσετε το κέντρο Κ και την ακτίνα του ρ. **Μον. 10**

Δ2. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων ε_1, ε_2 του κύκλου που διέρχονται από την αρχή των αξόνων. **Μον. 8**

Δ3. Αν οι ευθείες ε_1: και ε_2: $y = -\frac{3}{4}x$ είναι οι ασύμπτωτες υπερβολής με μια εστία το κέντρο Κ του παραπάνω κύκλου, να βρείτε την εξίσωση της και την εκκεντρότητα της. **Μον. 7**

Καλή Επιτυχία!

Απαντήσεις

Θέμα Α

Α. Α1. Σωστό το Δ

Α2. Λάθος . Δεν ισχύει για $x_1 = x_2$

Α3. Λάθος . Μόνο για αυτές με κορυφή την αρχή των αξόνων

Α4. Λάθος . Μόνο για αυτές με κέντρο το Ο και εστίες στον $x'x$.

Α5.

I	**II**	**III**	**IV**
Α	**Δ**	**Β**	**Α**

Β Θεωρία

Θέμα Β

Είναι
$|\,|\vec{a}| = |\vec{\beta}| = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Β1. Είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \sqrt{3}\cdot 3 + 3\cdot\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$.

$\vec{\gamma}\cdot\vec{\delta} = |\,\vec{\gamma}\,|\,|\,\vec{\delta}\,|\,\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{3} = 6\cdot 1\cdot\dfrac{1}{2} = 3$

Β2. Είναι $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|} = \dfrac{6\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, και επειδή $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$ κυρτή είναι $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \dfrac{\pi}{6}$.

Το $\vec{\gamma}$ είναι ομόρροπο στο $\vec{a}$ σημαίνει ότι $\vec{\gamma} = \lambda\vec{a}$, με $\lambda > 0$.

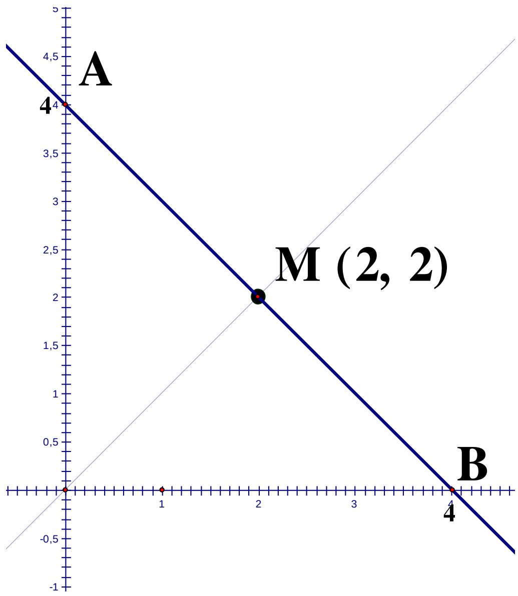
Β3. Έτσι $|\vec{\gamma}| = 6 \Leftrightarrow |\,\lambda\,|\,|\,\vec{a}\,| = 6 \overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow} \lambda\cdot 2\sqrt{3} = 6 \Leftrightarrow \lambda = \sqrt{3}$. Οπότε $\vec{\gamma} = \sqrt{3}\vec{a}$.

Β4. Η προβολή του $\vec{\gamma}$ πάνω στο $\vec{\beta}$, $\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\gamma} = \dfrac{\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}}{\vec{\beta}^2}\vec{\beta} = \dfrac{\sqrt{3}\vec{\alpha}\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|^2}\vec{\beta} = \dfrac{\sqrt{3}\cdot 6\sqrt{3}}{12}(3, \sqrt{3}) =$

$$\frac{3}{2}(3, \sqrt{3}) = \left(\frac{9}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right).$$

Θέμα Γ.

Δ1. Αν Μ(x, ψ) τα σημεία τότε $x = 1+\lambda$ και $\psi = 1-\lambda$ οπότε $x+\psi = 4$.



Δ2. Όταν x=0 τότε ψ=4 και όταν ψ=0 τότε = 4,

επομένως η ευθεία τέμνει τον $x'x$ στο Β(4,0)

και τον ψ'ψ στο Α (0,4).

Δ3. Η ευθεία σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο. Το πλησιέστερο σημείο στην αρχή Ο θα είναι το ίχνος της κάθετης από το Ο προς την ευθεία δηλ το μέσο Μ (2, 2) του ΑΒ.

Θέμα Δ.

Η εξίσωση γίνεται $x^2 + y^2 - 2\cdot 5\cdot y + 25 = 25 - 9 \Leftrightarrow x^2 + (y-5)^2 = 4^2$.

Δ1. Επομένως παριστάνει το κύκλο με κέντρο το Κ(0, 5) και ακτίνα $\rho = 4$.

Δ2. Οι ευθείες που διέρχονται από το Ο είναι της μορφής $\lambda x - \psi = 0$, με $\lambda \in \mathbb{R}$ ή ο $\psi'\psi$.

Ο $\psi'\psi$ δεν είναι δυνατόν να είναι εφαπτόμενη γιατί περνά από το Κ.

Επομένως οι ευθείες $\lambda x - \psi = 0$ είναι εφαπτόμενες του κύκλου αν και μόνο αν

$$d(K, \lambda x - \psi = 0) = 4 \Leftrightarrow \frac{|\lambda \cdot 0 - 5|}{\sqrt{1+\lambda^2}} = 4 \Leftrightarrow 25 = 16 + 16\lambda^2 \Leftrightarrow 16\lambda^2 = 9 \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{9}{16} \Leftrightarrow \lambda = \pm\frac{3}{4}.$$

Έτσι ε_1 : $y = \frac{3}{4}x$ και ε_2 : $y = -\frac{3}{4}x$.

Δ3. Επειδή η μια εστία είναι στον $\psi'\psi$ και οι ασύμπτωτές της τέμνονται στην αρχή των αξόνων, η υπερβολή θα έχει εξίσωση της μορφής

$\frac{\psi^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$, με α , $\beta > 0$. Η υπερβολή αυτή θα έχει τις ε_1, ε_2 για ασύμπτωτες όταν

$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{4}$, δηλ $\alpha = 3\rho$ και $\beta = 4\rho$, όπου $\rho > 0$. Όμως $\alpha^2 + \beta^2 = 5^2$ δηλ $9\rho^2 + 16\rho^2 = 25 \Leftrightarrow \rho = 1$

Άρα η υπερβολή έχει εξίσωση $\frac{\psi^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$.

Έχει εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{5}{3}$.