ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΜΑΙΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2016
Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ - ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

Θέμα Α

Α1. Να δείξετε ότι:

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1\lambda_2 = -1$$

όπου $\lambda_1 = \lambda_{\vec{\alpha}}$, $\lambda_2 = \lambda_{\vec{\beta}}$ και $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \not\parallel y'y$.

Μονάδες 15

Α2. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή ή Λανθασμένη:

α) Αν δύο διανύσματα έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης, τότε σχηματίζουν πάντα ίσες γωνίες με τον άξονα x΄x.

β) Αν $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$

γ) Για κάθε διάνυσμα $\vec{\alpha} \neq \vec{0}, \vec{v}$ ισχύει $\vec{\alpha} \cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{v} = \vec{\alpha} \cdot \vec{v}$.

δ) Η εξίσωση της εφαπτομένης κάθε κύκλου $C: x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο $M(x_1, y_1)$ είναι $xx_1 + yy_1 = \rho$.

ε) Όταν μια ευθεία δεν έχει συντελεστή διεύθυνσης, τότε θα έχει εξίσωση της μορφής $y = y_0$.

Μονάδες 10

Θέμα Β

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ τέτοια ώστε:

- $|\vec{\alpha}| = 2$
- $|\vec{\beta}| = 3$
- $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \dfrac{2\pi}{3}$

Αν $\vec{\gamma} = 3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ τότε:

Β1. Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -3$

Μονάδες 6

Β2. Να αποδείξετε ότι $|\vec{\gamma}| = 6$

Μονάδες 8

Β3. Να υπολογίσετε τις γωνίες $(\vec{\alpha}, \vec{\gamma}), (\vec{\gamma}, \vec{\beta})$ *(μονάδες 10).* Τι παρατηρείτε για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ *(μονάδα 1);*

Μονάδες 11

Θέμα Γ

Δίνεται εξίσωση

$$(\lambda+1)x+(3-\lambda)y+2016=0,\ \lambda\in\mathbb{R}\ (1)$$

Γ1. Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του λ η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία γραμμή *(μονάδες 4)* και στη συνέχεια ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από αυτήν, διέρχονται από το ίδιο σημείο *(μονάδες 5).*

Μονάδες 9

Γ2. Δίνονται τα σημεία M(x, y) του επιπέδου για τα οποία ισχύει $\left|\overrightarrow{OM}\right|^2=3+2y$ με $y\geq-\frac{3}{2}$ και O η αρχή των αξόνων. Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου είναι κύκλος C_1 με κέντρο $K(0,1)$ και ακτίνα $\rho=2$.

Μονάδες 5

Γ3. Ποια από τις παραπάνω ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (1) τέμνει τον κύκλο C_1 του ερωτήματος Γ2 σε δύο αντιδιαμετρικά σημεία;

Μονάδες 5

Γ4. Έστω N τυχαίο σημείο της ευθείας που προκύπτει για λ = 1 και M ένα τυχαίο σημείο του κύκλου C_1 του ερωτήματος Γ2. Να υπολογίσετε την ελάχιστη απόσταση (MN).

Μονάδες 6

Θέμα Δ

Δίνονται οι κύκλοι C_1, C_2 τέτοιοι ώστε:

- $O(0,0)$, $K(2,-4)$ αντίστοιχα τα κέντρα τους
- οι κύκλοι είναι ίσοι, δηλαδή έχουν ίσες ακτίνες ρ
- και εφάπτονται εξωτερικά

Δ1. Να γράψετε τις εξισώσεις των C_1, C_2.

Μονάδες 6

Δ2. Να βρείτε το σημείο επαφής M των δύο κύκλων.

Μονάδες 4

Δ3. Βρείτε την εξίσωση της κοινής (εσωτερικής) εφαπτομένης στο σημείο M(1, -2).

Μονάδες 7

Δ4. Να υπολογίσετε το σημείο της ευθείας $\varepsilon: 2x+y=7$ από το οποίο οι εφαπτόμενες προς τον κύκλο $C_1: x^2+y^2=5$ να είναι κάθετες.

Μονάδες 8

ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

ΙΩΑΝΝΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΟΥ

ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ

ΒΟΥΔΟΥΡΗΣ ΠΟΛΥΒΙΟΣ

ΜΟΥΤΑΦΗΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ

ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ ΔΗΜΗΤΡΑ

ΧΑΤΖΟΠΟΥΛΟΣ ΜΑΚΗΣ