ΘΕΜΑ Α

Α.1 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στη κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι αληθής, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Αν $\det(\vec{\alpha},\vec{\beta})$ είναι η ορίζουσα των διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$, τότε πάντα ισχύει η ισοδυναμία:

$$\vec{\alpha} \,//\, \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = 0$$

(β) Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ πάντα ισχύει η συνεπαγωγή: Αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$ τότε $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$

(γ) Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου, των οποίων η διαφορά των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία Ε και Ε′ είναι σταθερή και μικρότερη του (ΕΕ′), είναι κλάδος υπερβολής με εστίες τα σημεία Ε και Ε′.

(δ) Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ ισχύει: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}\Rightarrow\vec{\beta}=\vec{\gamma}$

(ε) Η ευθεία (ε) με εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ είναι πάντα κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\delta}=\left(-A,-B\right)$.

(Μονάδες 5 x 2 = 10)

Α.2 Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και κάθε πραγματικό αριθμό λ ισχύει:

$$\left(\lambda\vec{\alpha}\right)\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot\left(\lambda\vec{\beta}\right)$$ **(Μονάδες 15)**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η έλλειψη $x^2+4y^2=4$ (1). Να βρεθούν:

Β.1 τα μήκη των αξόνων, **(Μονάδες 6)**

Β.2 οι εστίες, **(Μονάδες 6)**

Β.3 η εκκεντρότητα και **(Μονάδες 6)**

Β.4 η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της έλλειψης (1) στο σημείο της $A\left(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **(Μονάδες 7)**

ΘΕΜΑ Γ

Έστω οι ευθείες με εξισώσεις:

$$(\varepsilon_1)\;\; x-\lambda y=0 \;\;\text{και}\;\; (\varepsilon_2)\;\; x+y=\lambda(\lambda+1),\; \lambda\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda\neq-1$:

Γ.1 Οι (ε_1), (ε_2) τέμνονται σε σημείο **Μ** του οποίου να υπολογίσετε τις συντεταγμένες συναρτήσει του λ.

(Μονάδες 9)

Γ.2 Η (ε_2) είναι εφαπτόμενη του κύκλου με εξίσωση

$$\left(x-\lambda^2\right)^2+\left(y-\lambda-2\right)^2=2$$ **(Μονάδες 9)**

Γ.3 Το κοινό σημείο **Μ** των (ε_1), (ε_2) ισαπέχει από την ευθεία $x=-\dfrac{1}{4}$ και το σημείο $E\left(\dfrac{1}{4},0\right)$.

(Μονάδες 7)

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}$ με γωνία $\left(\vec{u},\vec{v}\right)=90^\circ$.

Δ.1 Να αποδείξετε ότι οι ευθείες

$$(\varepsilon_1)\ \ |\vec{u}+\vec{v}|x+|\vec{u}-\vec{v}|y+5=0 \ \text{ και } \ (\varepsilon_2)\ \ |\vec{u}-\vec{v}|x+|\vec{u}+\vec{v}|y+25=0$$

είναι παράλληλες. **(Μονάδες 6)**

Δ.2 Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών (ε_1), (ε_2) αν επιπλέον γνωρίζετε ότι $|\vec{u}|=3$ και $|\vec{v}|=4$.

(Μονάδες 6)

Αν (ε_1): $x+y+1=0$, (ε_2): $x+y+5=0$ και Κ, Λ τα σημεία όπου οι (ε_1), (ε_2) τέμνουν τον άξονα y’y, τότε να βρείτε:

Δ.3 σημείο $M\left(\tau,2017\right)$, $\tau<0$, αν γνωρίζετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΚΛΜ είναι 4032 τ.μ.

(Μονάδες 6)

Δ.4 και την εξίσωση του κύκλου C ο οποίος εφάπτεται στις (ε_1), (ε_2) και το κέντρο του είναι επί της ευθείας (ε): $2x-y=0$

(Μονάδες 7)