Τάξη Β   Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α$_1$. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$ και αντίστροφα.

β) Η κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από το σημείο Α(χ_0,ψ_0) έχει εξίσωση $\chi=\chi_0$.

γ) Η ευθεία με εξίσωση ΑΧ+Βψ+Γ=0 είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\eta}=(\mathrm{A},\mathrm{B})$.

δ) Η εξίσωση $\chi^2+\psi^2+\mathrm{A}\chi+\mathrm{B}\psi+\Gamma=0$ παριστάνει κύκλο όταν $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma>0$.

ε) Η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $\chi^2+\psi^2=\rho^2$ στο σημείο του Α(χ_1,ψ_1) είναι $\chi\chi_1+\psi\psi_1=\rho$.

Α$_2$. Αν θεωρήσουμε δύο σημεία Α(χ_1,ψ_1) και Β(χ_2,ψ_2) του καρτεσιανού επιπέδου και υποθέσουμε ότι (χ,ψ) είναι οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ΑΒ, να αποδείξετε ότι:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2} \text{ και } \psi=\frac{\psi_1+\psi_2}{2}$$

(Μονάδες 10+15)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα σημεία Α(2,3), Β(-4,5), Γ(5,-6). Έστω Μ το μέσο του ΑΒ και ΓΔ το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ από την κορυφή Γ.

Β$_1$. Να υπολογιστεί το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\mathrm{AB}}\cdot\vec{\Gamma\mathrm{M}}$.

Β$_2$. Να βρεθεί η εξίσωση του ύψους ΓΔ.

Β$_3$. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ

(**Μονάδες 10+10+5)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + \psi^2 + \mu x - 2\mu\psi + \frac{(3\mu - 1)\mu}{2} - \frac{3}{4} = 0$ **(1)**

Γ$_1$. Να βρεθούν οι τιμές του **φυσικού** αριθμού **μ** ώστε η εξίσωση **(1)** να παριστάνει κύκλο.

Γ$_2$. Για **μ=0** να βρεθεί η εξίσωση το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου που προκύπτει από την **(1)**.

Γ$_3$. Για τον κύκλο που προκύπτει από το **Γ$_2$** ερώτημα να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων του, που σχηματίζουν γωνία 60^o με τον άξονα χ΄χ.

(Μονάδες 10+5+10)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι ευθείες **ε$_1$**: x+2y+3=0 και **ε$_2$**: 2x-y-4=0

Δ$_1$. Να αποδειχτεί ότι οι ευθείες τέμνονται κάθετα και να βρεθεί το σημείο τομής τους Τ.

Δ$_2$. Δείξτε ότι η εξίσωση **$\lambda(x+2y+3)+\lambda^2(2x-y-4)=0$ (ε)** παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in R^*$ και στη συνέχεια ότι όλες οι ευθείες (ε) διέρχονται από το σημείο Τ.

Δ$_3$. Να βρεθεί η ευθεία (ε) η οποία τέμνει τους αρνητικούς ημιάξονες συντεταγμένων Οx΄ και Οy΄ σε σημεία Α και Β έτσι ώστε το τρίγωνο ΟΑΒ να είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 5+10+10)

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ

ΛΥΣΕΙΣ

Θέμα Α

Α1. Σ, Σ, Λ, Σ, Λ

Α2. Σχ βιβλίο σελ. 33.

Θέμα Β

$A(2,3)$, $B(-4,5)$, $\Gamma(5,-6)$

Β1. $x_M = \dfrac{2+(-4)}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1$, $y_M = \dfrac{3+5}{2} = 4$ άρα $M(-1,4)$

$\vec{AB} = (-6,2)$, $\vec{\Gamma M} = (-6,10)$

άρα $\vec{AB}\cdot\vec{\Gamma M} = (-6)\cdot(-6) + 2\cdot 10 = 36 + 20 = 56$

Β2. $\lambda_{AB} = \dfrac{5-3}{-4-2} = \dfrac{2}{-6} = -\dfrac{1}{3}$

$\lambda_{AB}\,\lambda_{\Gamma\Delta} = -1$, άρα $\lambda_{\Gamma\Delta} = 3$

$\Gamma\Delta$: $y+6 = 3(x-5) \iff y = 3x-21$

Β3. $\vec{AB} = (-6,2)$ $\quad \vec{A\Gamma} = (3,-9)$

$\det(\vec{AB},\vec{A\Gamma}) = \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} = 54-6 = 48$

Άρα $(AB\Gamma) = \dfrac{1}{2}\cdot|\det(\vec{AB},\vec{A\Gamma})| = \dfrac{1}{2}\cdot 48 = 24.$

Θέμα Γ

Γ1) Αρκεί $A^2+B^2-4\Gamma > 0 \Leftrightarrow \mu^2+4\mu^2-2(3\mu-1)\mu+3>0 \Leftrightarrow$

$5\mu^2-6\mu^2+2\mu+3>0 \Leftrightarrow -\mu^2+2\mu+3>0$

μ	$-\infty$ -1	3	$+\infty$
$-\mu^2+2\mu+3$	$-$	$+$	$-$

Άρα $\mu \in (-1,3) \overset{\mu \text{ φυσικός}}{\Longleftrightarrow}$

$\mu = 0, 1, 2$

Γ2) Για $\mu=0$ η (1) γίνεται: $x^2+\psi^2=\frac{3}{4}$ Άρα

Κέντρο $O(0,0)$ και $\rho=\frac{\sqrt{3}}{2}$. (ακτίνα)

Γ3) Για τις εξισώσεις των εφαπτομένων, αν $A(x_1,\psi_1)$ είναι το σημείο επαφής ισχύει $x_1 x+\psi_1\psi=\frac{3}{4}$ (1)

και $x_1^2+\psi_1^2=\frac{3}{4}$ (2)

$\lambda=\varepsilon\varphi 60=\sqrt{3}$ αλλά από την (1) $\lambda=-\frac{x_1}{\psi_1}$ οπότε

$$\begin{cases} x_1^2+\psi_1^2=\frac{3}{4} \\ x_1=-\sqrt{3}\psi_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\psi_1^2=\frac{3}{4} \\ x_1=-\sqrt{3}\psi_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi_1=\pm\frac{\sqrt{3}}{4} \\ x_1=\mp\frac{3}{4} \end{cases}$$ Άρα

Αν $A\left(-\frac{3}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ $\varepsilon_1: -\frac{3}{4}x+\frac{\sqrt{3}}{4}\psi=\frac{3}{4}$ ή $\varepsilon_1: -\sqrt{3}x+\psi=\sqrt{3}$

$A\left(\frac{3}{4},-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ $\varepsilon_2: \frac{3}{4}x-\frac{\sqrt{3}}{4}\psi=\frac{3}{4}$ ή $\varepsilon_2: \sqrt{3}x-\psi=\sqrt{3}$

Θέμα Δ

Δ1. $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, $\lambda_2 = 2$

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -\frac{1}{2} \cdot 2 = -1$, άρα $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$.

$$\begin{cases} x+2y+3=0 \\ 2x-y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+3=0 \\ 4x-2y-8=0 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} 5x-5=0 \Leftrightarrow x=1$$

Έτσι από την $x+2y+3=0$ έχουμε $1+2y+3=0 \Leftrightarrow y=-2$

Άρα $T(1,-2)$

Δ2. $\lambda(x+2y+3)+\lambda^2(2x-y-4)=0 \Leftrightarrow$

$(\lambda+2\lambda^2)x+(2\lambda-\lambda^2)\cdot y+3\lambda-4\lambda^2=0$ (2)

Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{cases} \lambda+2\lambda^2=0 \\ 2\lambda-\lambda^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda(1+2\lambda)=0 \\ \lambda(2-\lambda)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=0 \text{ ή } \lambda=-\frac{1}{2} \\ \lambda=0 \text{ ή } \lambda=2 \end{cases} \quad \text{άρα } \lambda=0$$

Επομένως όταν $\lambda \neq 0$ οι συντελεστές Α, Β δεν μηδενίζονται ταυτόχρονα, συνεπώς η (Ε) παριστάνει ευθεία.

Δεδομένου ότι το Τ επαληθεύει το σύστημα $\begin{cases} x+2y+3=0 \\ 2x-y-4=0 \end{cases}$

θα επαληθεύει και την εξίσωση $\lambda(x+2y+3)+\lambda^2(2x-y-4)=0$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Έτσι όλες οι ευθείες $\cancel{\text{η}}$ (Ε) διέρχονται από το Τ

Δ3. Αφού $(OA)=(OB)$ θα έχουμε

$\hat{A}_1 = 45^\circ$ άρα ο συντελεστής

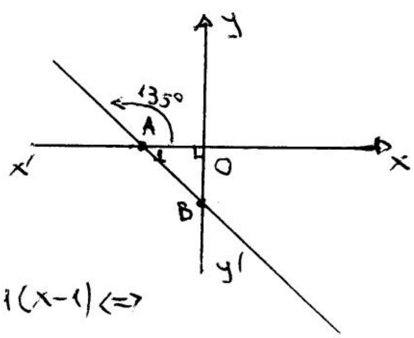
διεύθυνσης της Ε θα είναι

$\lambda_\varepsilon = \varepsilon\varphi 135^\circ = -1$.

Η (Ε) διέρχεται και από το $T(1,-2)$

Άρα η εξίσωσή της θα είναι $y+2=-1(x-1) \Leftrightarrow$

$x+y+1=0$. (3)



* Θα πρέπει να επαληθεύσουμε ότι η (3) είναι κάποια από τις ευθείες (Ε)

Είναι $\lambda_\varepsilon = -\frac{\lambda+2\lambda^2}{2\lambda-\lambda^2} = \frac{1+2\lambda}{\lambda-2}$.

Αφού $\lambda_\varepsilon = -1$ θα είναι $1+2\lambda=-\lambda+2 \Leftrightarrow 3\lambda=1 \Leftrightarrow \lambda=\frac{1}{3}$.

Με αντικατάσταση το $\lambda=\frac{1}{3}$ στην (Ε) προκύπτει η εξίσωση $x+y+1=0$.

Άλλη λύση

Δ3. Σημείο τομής με $y'y$: θέτουμε $x=0$, οπότε $(2\lambda-\lambda^2)y+3\lambda-4\lambda^2=0$

Άρα $y=-\dfrac{\lambda(3-4\lambda)}{\lambda(2-\lambda)}=-\dfrac{3-4\lambda}{2-\lambda}$ δηλ. $B\left(0,-\dfrac{3-4\lambda}{2-\lambda}\right)$ ή $B\left(0,\dfrac{4\lambda-3}{2-\lambda}\right)$ $\lambda\neq 2$

Σημείο τομής με $x'x$: θέτουμε $y=0$, οπότε $(\lambda+2\lambda^2)x+3\lambda-4\lambda^2=0$

Άρα $x=\dfrac{4\lambda^2-3\lambda}{\lambda+2\lambda^2}=\dfrac{4\lambda-3}{1+2\lambda}$, δηλ. $A\left(\dfrac{4\lambda-3}{1+2\lambda},0\right)$, $\lambda\neq-\dfrac{1}{2}$

Για να είναι το $\overset{\triangle}{OAB}$ ισοσκελές, πρέπει $(OA)=(OB)$ δηλαδή

$\left|\dfrac{4\lambda-3}{1+2\lambda}\right|=\left|\dfrac{4\lambda-3}{2-\lambda}\right|\Leftrightarrow\dfrac{|4\lambda-3|}{|1+2\lambda|}=\dfrac{|4\lambda-3|}{|2-\lambda|}\Leftrightarrow|1+2\lambda|=|2-\lambda|$ (είναι $4\lambda-3\neq0$ διαφορετικά η (ε) θα διερχόταν από το σημείο O). Άρα

$1+2\lambda=2-\lambda$ ή $1+2\lambda=-2+\lambda$. Άρα $\lambda=\frac{1}{3}$ ή $\lambda=-3$. Από τις τιμές αυτές δεκτή είναι μόνο η $\lambda=\frac{1}{3}$ γιατί αυτή δίνει τομές με τους αρνητικούς ημιάξονες.