

**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Για τα διανύσματα  $\vec{a} = (x_1, y_1), \vec{b} = (x_2, y_2)$  να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$\lambda \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

**Μονάδες 15**

**A2.** Στις παρακάτω προτάσεις να σημειώσετε σε κάθε μια ένα  $\Sigma$ , αν πιστεύετε ότι είναι σωστή ή ένα  $\Lambda$ , αν πιστεύετε ότι είναι λανθασμένη.

i. Μια ευθεία που διέρχεται από τα σημεία  $A(x_1, y_1)$  και  $B(x_2, y_2)$  έχει συντελεστή

$$\text{διεύθυνσης } \lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

ii. Ένα διάνυσμα παράλληλο στην ευθεία  $Ax + By + \Gamma = 0$  είναι το  $\vec{d} = (-B, A)$

iii. Κάθε εξίσωση της μορφής  $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$  παριστάνει κύκλο με κέντρο

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right).$$

iv. Αν A, B και Γ σημεία του καρτεσιανού επιπέδου, το εμβαδό του τριγώνου ABΓ δίνεται

$$\text{από τον τύπο } (AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma})|$$

v. Για διανύσματα  $\vec{a}, \vec{b}$  ισχύει:  $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a}, \vec{\beta}$  με  $|\vec{\beta}| = 2|\vec{a}| = 4$  και  $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = -8$

**B1.** Να υπολογίσετε τη γωνία  $(\vec{a}, \vec{\beta})$

**Μονάδες 10**

**B2.** Να αποδείξετε ότι  $\vec{\beta} + 2\vec{a} = \vec{0}$ .

**Μονάδες 10**

**B3.** Να αποδείξετε ότι το διάνυσμα  $\vec{u} = \vec{a} \cdot \vec{\beta}^2 - \vec{a}^2 \cdot \vec{\beta}$  είναι ομόρροπο του  $\vec{a}$ .

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνονται οι ευθείες  $\varepsilon : 2\kappa x - (1 + \kappa)\psi + 1 - 3\kappa = 0$  και

$\zeta : (1 + 3\kappa)x + (\kappa - 1)\psi + 2 - 6\kappa = 0$ , όπου  $\kappa \in \mathbb{R}$ .

**Γ1.** Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του  $\kappa$ , ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες.

**Μονάδες 8**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι οι ευθείες  $\varepsilon$  και  $\zeta$  για  $\kappa = 1$  τέμνονται σε σημείο A του οποίου να υπολογίσετε τις συντεταγμένες.

**Μονάδες 5**

**Γ3.** Για ποιες τιμές του  $\kappa$ ,  $\kappa \in \mathcal{R}$ , η ευθεία  $\varepsilon$  απέχει από το σημείο  $B(1, -1)$  απόσταση ίση με 1.

**Μονάδες 7**

**Γ4.** Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου  $OAB$ .

**Μονάδες 5**

### ΘΕΜΑ Δ

Ο εξωπλανήτης 1c του αστέρα Trappist – 1 κινείται σε τροχιά που δίνεται από την εξίσωση

$$x^2 + y^2 - \sqrt{9-t^2} \cdot x + t \cdot y - 180 = 0, \quad -3 \leq t \leq 3$$

**Δ1.** Να δείξετε ότι ο εξωπλανήτης κινείται σε κυκλική τροχιά με ακτίνα  $\rho = \frac{27}{2}$ .

**Μονάδες 7**

**Δ2.** Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του αστέρα Trappist – 1.

**Μονάδες 7**

**Δ3.** Μια διαστημική αποστολή από την Γη με τον διάσημο Ινδό αστροναύτη Chris Tara ξεκινά να προσεγγίσει τον εξωπλανήτη και μετά την εκτόξευση, ακολουθεί ευθύγραμμη τροχιά που δίνεται από την εξίσωση  $2x - 3y + 3 = 0$

Την στιγμή όπου  $t = 0$  να εξετάσετε αν θα συναντήσει την τροχιά του εξωπλανήτη ή τον αστέρα στο κέντρο του.

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Μια άλλη αποστολή με επικεφαλής τον Εσθονό κοσμοναύτη Vassily Christarons κατάφερε να φτάσει στον εξωπλανήτη. Για να μπορέσει να γυρίσει πίσω θα πρέπει να φύγει για  $t = 0$  και όταν ο πλανήτης βρίσκεται στο σημείο

$T\left(\frac{3}{2}, \frac{27}{2}\right)$ . Θα πρέπει να απογειωθεί εφαπτομενικά στην τροχιά του εξωπλανήτη.

**Μονάδες 5**

Να βρείτε την εφαπτομένη ευθεία τροχιά της αποστολής.

**Καλή επιτυχία**

**Ο εισηγητής**

**Β. Χρισταράς**