**ΕΠ ΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 12 ΙΟΥΝΙΟΥ 2015**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα . Αν η  είναι μια παράγουσα της  στο , τότε να αποδείξετε ότι:

όλες οι συναρτήσεις της μορφής ,  είναι παράγουσες της  στο , και

κάθε άλλη παράγουσα της  στο  παίρνει τη μορφή , . **Μονάδες 7**

**A2.** Πότε μια συνάρτηση  λέγεται συνάρτηση **; Μονάδες 4**

**A3.** Πότε η ευθεία  λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας

συνάρτησης **;** **Μονάδες 4**

**A4.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι*

*λανθασμένη.*

**α)** Αν , τότε , όπου  θετικός ακέραιος.

**β)** Αν οι συναρτήσεις  έχουν όριο στο  και ισχύει  κοντά στο , τότε

.

**γ)** Αν , τότε  κοντά στο .

**δ)** Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2, της οποίας η γραφική παράσταση έχει ασύμπτωτη.

**ε)** Αν  είναι μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα  και  είναι μία παράγουσα της  στο τότε πάντοτε ισχύει: , **Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς  για τους οποίους ισχύουν:

* 
*  .

**B1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  είναι η ευθεία με εξίσωση . **Μονάδες 9**

**B2.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών είναι η παραβολή με εξίσωση . **Μονάδες 9**

**B3.** Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς  να βρείτε την ελάχιστη τιμή του μέτρου .

 **Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση , .

**Γ1.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

 **Μονάδες 6**

**Γ2.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης με , όπου

. **Μονάδες 6**

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες . **Mονάδες 6**

**Γ4.** Αν για τις ρίζες  του ερωτήματος **Γ3** ισχύει ότι τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  τέτοιο , ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  στο σημείο

 να διέρχεται από το σημείο . **Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Δ**

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση  για την οποία ισχύει:

 για κάθε .

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι  . **Μονάδες 6**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι , για κάθε . **Μονάδες 4**

**Δ3. α.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  ,  είναι κοίλη. (μονάδες 5)

**β.** Έστω το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της , την

εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  στο σημείο που η γραφική παράσταση της 

τέμνει τον άξονα  και την ευθεία . Να αποδείξετε ότι . (μονάδες 4)

 **Μονάδες 9**

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι , για κάθε . **Μονάδες 6**