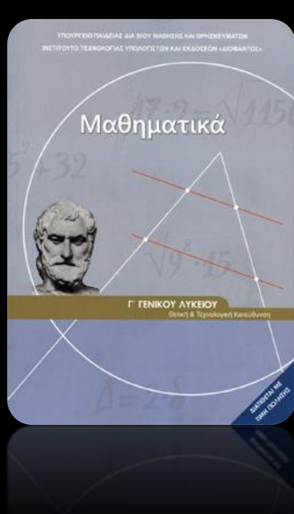
ΛΥΣΕΙΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΤΡΙΤΗ

05 – 09 – 17

20 : 20



ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

lisari team

ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2017

3η έκδοση

Χρήστος Κανάβης
Ανδρέας Πάτσης
Νίκος Σκομπρής
Νίκος Σπλήνης
Σταύρος Χαραλάμπους
Μάκης Χατζόπουλος

Οι απαντήσεις και οι λύσεις

είναι αποτέλεσμα της συλλογικής δουλειάς

των μελών της **lisari team**

http://lisari.blogspot.gr/

3η έκδοση: 08 – 09 – 2017 *(συνεχής ανανέωση)*

Οι λύσεις διατίθεται **αποκλειστικά**

από το μαθηματικό blog

http://lisari.blogspot.gr

Πρόλογος

Στο παρόν αρχείο περιλαμβάνονται οι λύσεις των Επαναληπτικών Πανελλαδικών Εξετάσεων 2017 στο μάθημα **Μαθηματικά Προσανατολισμού θετικών Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής.** Η παρουσίαση των λύσεων είναι πλήρης και αναλυτική στο μέγιστο δυνατό, προκειμένου οι μαθητές να μπορούν να μελετήσουν και να επεξεργαστούν εύκολα το αρχείο.

Η εργασία αυτή εκπονήθηκε αποκλειστικά από τη γνωστή **διαδικτυακή ομάδα Μαθηματικών** από διάφορα μέρη της Ελλάδος, τη **lisari team.** Φέτος εστιάσαμε στη ποικιλία των λύσεων και όσο στο χρόνο που θα αναρτηθούν οι λύσεις.

Την αρχική συγγραφή των λύσεων ακολούθησαν ενδελεχείς έλεγχοι, διορθώσεις και βελτιώσεις με στόχο μια **πληρέστερη και πιο ποιοτική παρουσίαση**. Ζητούμε συγνώμη για τυχόν παραλείψεις, λάθη ή αστοχίες που ενδεχομένως θα έχουν διαφύγει της προσοχής μας, γεγονός αναπόφευκτο δεδομένων των στενών χρονικών περιθωρίων. Θα ακολουθήσουν επόμενες εκδόσεις, όπου η εν λόγω παρουσίαση θα βελτιωθεί, ίσως εμπλουτιστεί και με εναλλακτικές λύσεις. Οποιαδήποτε σχόλια, παρατηρήσεις, διορθώσεις και βελτιώσεις επί των λύσεων είναι ευπρόσδεκτα στην ηλεκτρονική διεύθυνση lisari.blogspot@gmail.com.

Με εκτίμηση

lisari **team**

05 – 09 – 2017

lisari team

1. *Αντωνόπουλος Νίκος (Ιδιοκτήτης Φροντιστηρίου "Κατεύθυνση" - Άργος)*
2. *Αυγερινός Βασίλης (Ιδιοκτήτης Φροντιστηρίου "ΔΙΑΤΑΞΗ" - Ν. Σμύρνη και Νίκαια)*
3. *Βελαώρας Γιάννης (Φροντιστήριο "ΒΕΛΑΩΡΑΣ" - Λιβαδειά Βοιωτίας)*
4. *Βοσκάκης Σήφης (Φροντιστήριο "Ευθύνη" - Ρέθυμνο)*
5. *Γιαννόπουλος Μιχάλης (Θεσσαλονίκη - Αμερικάνικη Γεωργική Σχολή)*
6. *Γκριμπαβιώτης Παναγιώτης (Φροντιστήριο "Αστρολάβος" - Άρτα)*
7. *Δούδης Δημήτρης (3ο Λύκειο Αλεξανδρούπολης)*
8. *Ζαμπέλης Γιάννης (Φροντιστήρια "Πουκαμισάς" Γλυφάδας)*
9. *Κακαβάς Βασίλης (Φροντιστήριο "Ώθηση" - Μαρούσι)*
10. *Κάκανος Γιάννης (Φροντιστήριο "Παπαπαναγιώτου – Παπαπαύλου" - Σέρρες)*
11. *Κανάβης Χρήστος (Διδακτορικό στο ΕΜΠ – 2ο ΣΔΕ φυλακών Κορυδαλλού)*
12. *Καρδαμίτσης Σπύρος (Πρότυπο Λύκειο Αναβρύτων)*
13. *Κουλούρης Ανδρέας (3ο Λύκειο Γαλατσίου)*
14. *Κουστέρης Χρήστος (Φροντιστήριο "Στόχος" - Περιστέρι)*
15. *Μανώλης Ανδρέας (Φροντιστήριο "Ρηγάκης" - Κοζάνη)*
16. *Μαρούγκας Χρήστος (3ο ΓΕΛ Κηφισιάς)*
17. *Δημήτρης Μπαδέμης (Φροντιστήριο "Πουκαμισάς" - Γλυφάδας)*
18. *Νάννος Μιχάλης (1ο Γυμνάσιο Σαλαμίνας)*
19. *Νικολόπουλος Θανάσης (Λύκειο Κατασταρίου, Ζάκυνθος)*
20. *Παγώνης Θεόδωρος (Φροντιστήριο "Φάσμα" - Αγρίνιο)*
21. *Παπαδομανωλάκη Μαρία (Συνιδιοκτήτρια Πρότυπου Κέντρου Μάθησης "ΔΙΑΚΡΙΣΙΣ" - Ρέθυμνο)*
22. *Παπαμικρούλης Δημήτρης (Εκπαιδευτικός Οργανισμός "Ρόμβος")*
23. *Πάτσης Ανδρέας (Βόνιτσα - Μαθηματικός)*
24. *Ποδηματάς Θωμάς (Σπουδαστήριο Μαθηματικών Θωμάς και Ρόζα Ποδηματά - Βόλος)*
25. *Ράπτης Γιώργος (6ο ΓΕΛ Βόλου)*
26. *Σίσκας Χρήστος (Φροντιστήριο "Μπαχαράκης" - Θεσσαλονίκη)*
27. *Σκομπρής Νίκος (Συγγραφέας – 1ο Λύκειο Χαλκίδας)*
28. *Σπλήνης Νίκος (Φροντιστήριο "ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ" - Ηράκλειο Κρήτης)*
29. *Σταυρόπουλος Παύλος (Ιδιωτικά Εκπαιδευτήρια Δούκα)*
30. *Σταυρόπουλος Σταύρος (Γραμματέας Ε.Μ.Ε Κορινθίας - Γυμνάσιο Λ.Τ. Λεχαίου Κορινθίας)*
31. *Τρύφων Παύλος (1ο Εσπερινό ΕΠΑΛ Περιστερίου)*
32. *Τσακαλάκος Τάκης (συνταξιούχος αλλά ενεργός μαθηματικός)*
33. *Χαραλάμπους Σταύρος (Θεσσαλονίκη - Μουσικό Λύκειο)*
34. *Χατζόπουλος Μάκης (1ο ΓΕΛ Πετρούπολης)*

lisari team / Σχολικό έτος 2016 – 17

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΤΡΙΤΗ 5 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2017
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΘΕΤΙΚΗΣ, ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΟΚΤΩ (8)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

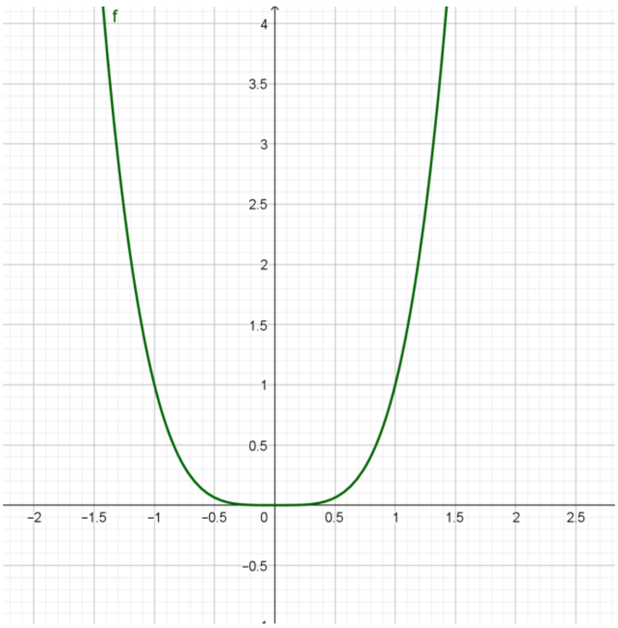
ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, σχολικό σελ. 142

Α2. α. Ψ

β. Είναι ψευδής η πρόταση διότι το σημείο αυτό αποτελεί πιθανή θέση σημείου καμπής. Για να είναι το x_0 θέση σημείου καμπής θα πρέπει η f'' να αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και να ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$.

Ένα αντιπαράδειγμα είναι η συνάρτηση $f\left(x\right)=x^4$ που η γραφική της παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Είναι εμφανές ότι στο σημείο $x_0 = 0$ η C_f δεν έχει σημείο καμπής. Όμως $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ με $f''(0) = 0$.

Α3. δ)

Α4. (α) Σ
(β) Λ
(γ) Σ
(δ) Λ
(ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Το τρίγωνο ΕΒΖ είναι ορθογώνιο οπότε από Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$$EZ^2 = EB^2 + BZ^2 \Leftrightarrow EZ^2 = x^2 + (2-x)^2 \Leftrightarrow EZ = \sqrt{2x^2 - 4x + 4}$$

Β2. Επειδή το τετράπλευρο ΘΕΖΗ είναι τετράγωνο έχουμε:

$$(\Theta HZE) = EZ^2 = 2x^2 - 4x + 4$$

Επίσης, $EB = x \geq 0$ και $BZ = 2 - x \geq 0$ δηλαδή $x \leq 2$ άρα $0 \leq x \leq 2$. Το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ δίνεται από τη συνάρτηση

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 4,\ 0 \leq x \leq 2$$

Β3. Θα μελετήσουμε την f ως προς τα ακρότατα. Η f είναι συνεχής στο $[0,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ με $f'(x) = 4x - 4$.

Το πρόσημο της $f'(x)$ και η μονοτονία της f φαίνονται στο παρακάτω πίνακα:

x	0	1	2
$f'(x)$	$-$		$+$
f	↘		↗

άρα η f είναι η γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,2]$ επομένως η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$ και μέγιστα στα σημεία $x_1 = 0$ με $f(0) = 4$ και $x_2 = 2$ με $f(2) = 4 = f(0)$.

Β4. Αναζητούμε αν υπάρχει $x_0 \in [0,2]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 4e^{x_0} + 1$

Η f είναι συνεχής στο $A_1 = [0,1]$ και γνησίως φθίνουσα άρα

$$f(A_1)=[f(1),f(0)]=[2,4]$$

Η f είναι συνεχής στο $A_2=[1,2]$ και γνησίως αύξουσα άρα

$$f(A_2)=[f(1),f(2)]=[2,4]$$

επομένως το σύνολο τιμών της f είναι

$$f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)=[2,4]$$

οπότε έχουμε ότι $2\le f(x)\le 4$ (1) για κάθε $x\in[0,2]$.

Όμως

$$0\le x\le 2\Leftrightarrow e^0\le e^x\le e^2\Leftrightarrow 4\le 4e^x\le 4e^2\Leftrightarrow 5\le 4e^x+1\le 4e^2+1 (2)$$

άρα από (1) και (2) έχουμε:

$$f(x)<4e^x+1 \text{ για κάθε } x\in[0,2].$$

Επομένως δεν υπάρχει $x_0\in[0,2]$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=4e^{x_0}+1$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από το σχήμα παρατηρούμε ότι $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(0,2)$ και $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(2,3)$

Οπότε,

$$E=\int_0^3|f'(x)|dx=-\int_0^2 f'(x)dx+\int_2^3 f'(x)dx=-(f(2)-f(0))+f(3)-f(2)=-2f(2)+2+f(3)$$

και αφού $E=8$ έχουμε

$$-2f(2)+2+f(3)=8\Leftrightarrow -2f(2)+f(3)=6 \quad (1)$$

Επιπλέον αφού η f είναι συνεχής στο [0,3] ως παραγωγίσιμη σε αυτό και δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Ε.Τ στο [0,3] τότε θα ισχύει $f(0)=f(3)\Leftrightarrow f(3)=2$ και επομένως από την (1) είναι $f(2)=-2$.

Έχουμε,

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{\ln x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to1}(xf'(x))=1\cdot(-3)=-3$$

αφού $\lim\limits_{x\to1}f'(x)=f'(1)=-3$, η f' είναι συνεχής από την γραφική της παράσταση.

Επίσης,

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{f(x)-2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to1}\frac{1}{f'(x)}=-\infty$$

αφού $f'(x)<0$ κοντά στο μηδέν και $f'(0)=0$.

Γ2. Από το Γ1 έχουμε ότι $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(0,2)$ και $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(2,3)$ και $f'(2)=0$ άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=2$ το $f(2)=-2$. Ακόμη από το διάγραμμα έχουμε πως η f' είναι γνησίως αύξουσα στο [1,3] και γνησίως φθίνουσα στο [0,1], ενώ $f''(1)=0$ αφού η καμπύλη της $C_{f'}$ δέχεται εφαπτομένη στο $(1,f'(1))$.

Το πρόσημο $f'(x)$ η μονοτονία – ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0 — 2	2 — 3
$f'(x)$	−	+
f	↘	↗

Η μονοτονίας της f' και τα διαστήματα που η f είναι κυρτή – κοίλη φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0 — 1	1 — 3
$f'(x)$	↘	↗
f	$\frown$	$\smile$

Συμπερασματικά λοιπόν,

- η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [0,2], γνησίως αύξουσα στο [2,3] και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=2$ το $f(2)=-2$ και τοπικά μέγιστα στα $x_1=0$, $x_2=3$ με τιμή $f(0)=f(3)=2$.
- η f είναι κοίλη στο [0,1], κυρτή στο [1,3] και το σημείο $(1,f(1))$ είναι σημείο καμπής.

Γ3. Αν είναι $f(x_0)\neq 0$ τότε το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}$ υπάρχει αφού η f είναι συνεχής στο [0,3] άρα και στο [2,3]. Επομένως για να μην υπάρχει το όριο θα πρέπει να υπάρχει μοναδικό $x_0\in(2,3)$ ώστε $f(x_0)=0$ και η f να μην διατηρεί πρόσημο εκατέρωθεν του x_0

Η f είναι συνεχής στο [2,3] και $f(2)\cdot f(3)=-2\cdot 2=-4<0$, άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0\in(2,3)$ ώστε $f(x_0)=0$. Επίσης η f είναι γνησίως αύξουσα στο [2,3] άρα το x_0 είναι μοναδικό και

$$2<x<x_0 \overset{f \nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(x_0)=0 \text{ άρα } \lim_{x\to x_0^-}\frac{1}{f(x)}=-\infty$$

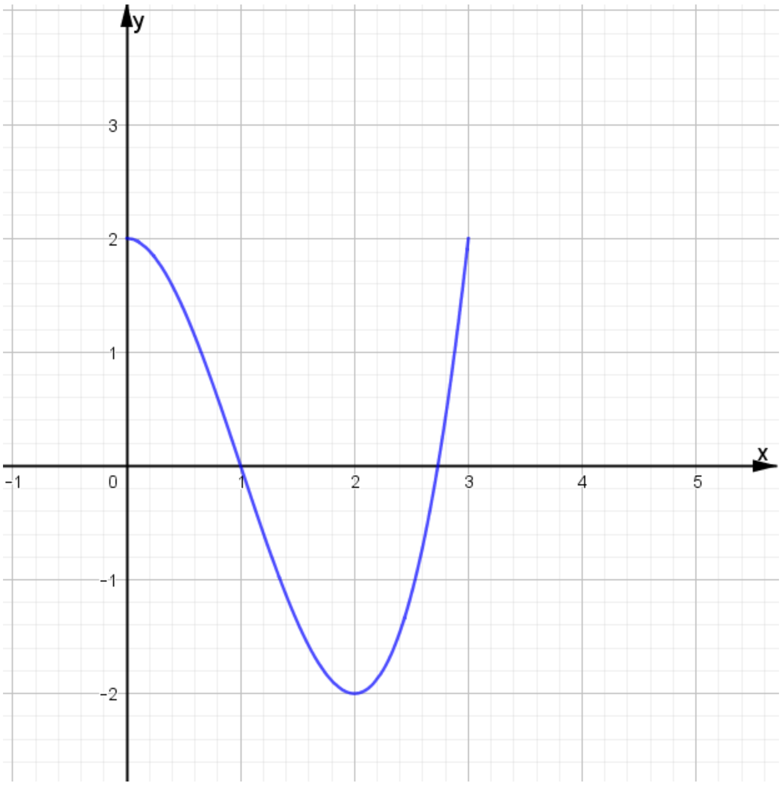
$$x_0<x<3 \overset{f \nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(x_0)=0 \text{ άρα } \lim_{x\to x_0^+}\frac{1}{f(x)}=+\infty$$

Επομένως το παραπάνω όριο στο x_0 δεν υπάρχει.

Γ4. Σύμφωνα με τον πίνακα μεταβολών της f από τα δεδομένα του ερωτήματος Γ2 έχουμε:

x	0 ··· 1	··· 2	··· 3
$f'(x)$	–	–	+
f	↘	↘	↗
	Σ.Κ	Ο.Ε	

η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι ως εξής:



ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0,2]$ ως πολυωνυμική συνάρτηση, όμως

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(x^3-3x^2+2\right)=2=f(0)$$

Επομένως ότι η f είναι συνεχής στο $[0,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ με $f'(x)=3x^2-6x$.
Άρα η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο διάστημα $[0,2]$.

Δ2. Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα είναι και συνεχής στο $x_0=0$ επομένως

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)\Rightarrow \lim_{x\to 0^-}\left(-\frac{\eta\mu x}{x}+\alpha\right)=2\Rightarrow -1+\alpha=2\Rightarrow \alpha=3$$

Δ3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ και στο $(0,+\infty)$ με

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x}{x^2} & ,x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)\\ 3x^2-6x & ,x\in(0,+\infty)\end{cases}$$

Για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ έχουμε:

$$f'(x)=\frac{\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}<0$$

όπου $g(x)=\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x, x\in\mathbb{R}$, αφού

$g'(x)=x\eta\mu x>0$ για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ οπότε $x<0\Leftrightarrow g(x)<g(0)=0$.

Η f είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ και $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$.

Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ έχουμε:

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

Το πρόσημο της $f'(x)$ και η μονοτονία της f φαίνονται στο παρακάτω πίνακα:

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	–	+	
f	↘	↗	

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$.

Συνολικά, επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{\pi}{2},2\right]$.

Δ4. Έχουμε:

$$\int_{-\pi/2}^{2} f(x)dx = \int_{-\pi/2}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{2} f(x)dx = \int_{-\pi/2}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{2}\left(x^3 - 3x^2 + 2\right)dx$$

$$= \int_{-\pi/2}^{0} f(x)dx + \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + 2x\right]_0^2$$

$$= \int_{-\pi/2}^{0} f(x)dx + 0$$

$$= \int_{-\pi/2}^{0} f(x)dx$$

Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\pi < \int_{-\pi/2}^{0} f(x)dx < \frac{3\pi}{2} - 1$$

Για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ έχουμε:

$$-\frac{\pi}{2} \le x \le 0 \overset{f\searrow}{\Rightarrow} f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \ge f(x) \ge f(0) \Rightarrow 2 \le f(x) \le 3 - \frac{2}{\pi}$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi/2}^{0} 2dx < \int_{-\pi/2}^{0} f(x)dx < \int_{-\pi/2}^{0}\left(3 - \frac{2}{\pi}\right)dx$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \frac{\pi}{2} < \int_{-\pi/2}^{0} f(x)dx < \left(3 - \frac{2}{\pi}\right) \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \pi < \int_{-\pi/2}^{0} f(x)dx < \frac{3\pi}{2} - 1$$

Δ5. Για κάθε $x \in [0,1]$ έχουμε:

$$0 \le x \le 1 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2}x \le 0$$

και

$$0 \le x \le 1 \Rightarrow -1 \le -x \le 0 \Rightarrow e^{-1} \le e^{-x} \le e^{0} \Rightarrow \frac{1}{e} \le e^{-x} \le 1 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \le -\frac{\pi}{2}e^{-x} \le -\frac{\pi}{2e} < 0$$

Επομένως, για κάθε $x \in [0,1]$ έχουμε: $-\frac{\pi}{2}x, -\frac{\pi}{2}e^{-x} \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ όπου η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα και 1 – 1 οπότε,

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\cdot x\right) = f\left(-\frac{\pi}{2}e^{-x}\right) \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}\cdot x = -\frac{\pi}{2}e^{-x} \Leftrightarrow e^{-x} = x \Leftrightarrow e^{-x} - x = 0$$

Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $e^{-x} - x = 0$ έχει μοναδική λύση στο $(0,1)$.

Θέτουμε συνάρτηση: $h(x) = e^{-x} - x,\ x \in \mathbb{R}$

Η h είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x) = -e^{-x} - 1 < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Επίσης,

$$h(0) = 1 > 0 \text{ και } h(1) = e^{-1} - 1 = \frac{1}{e} - 1 = \frac{1-e}{e} < 0$$

οπότε $h(0)\cdot h(1) < 0$, άρα η h ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[0,1]$, άρα η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(0,1)$ και επειδή η h είναι γνησίως φθίνουσα η λύση αυτή είναι μοναδική.